Eksamen 1T
ny reform
Høst 2022

Løsningsforslag

DEL 1

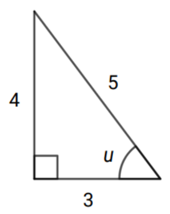
Oppgave 1 (2p.)

Oppgave 1

Gitt trekanten til høyre.

Vis at

$$\frac{\sin u}{\cos u} = \tan u$$



$$\sin u = \frac{mot}{hyp} = \frac{4}{5}$$
$$\cos u = \frac{hos}{hyp} = \frac{3}{5}$$
$$\tan u = \frac{mot}{hos} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} = \tan u$$

Som var det vi skulle vise.

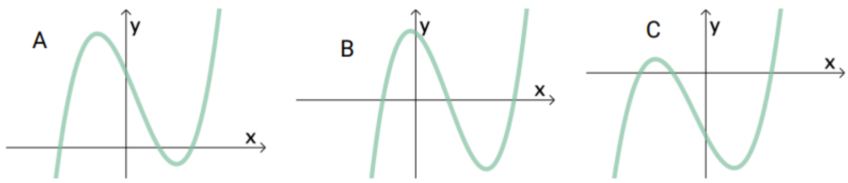
Oppgave 2 (4p.)

Oppgave 2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x-4)(x-2)(x+4)$$

a) Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til f ?
Husk å forklare hvordan du tenker.



b) Løs ulikheten

$$(x-4)(x-2)(x+4) > 0$$

a)

$$f(x) = (x-4)(x-2)(x+4)$$

$f(x)$ vil ha nullpunkter når $f(x) = 0$, da må en av faktorene være null.

Vi ser av uttrykket at denne grafen ar nullpunkter i :$x = 4$, $x = 2$ og $x = -4$
Det høyeste og det laveste nullpunktet er like langt fra y-aksen, og det midterste nullpunktet er positivt.
Da må det være graf A som er grafen til $f(x)$.

b) Bruker grafen i a) til å løse ulikheten.

$$(x-4)(x-2)(x+4) > 0$$
$$x = \langle -4, 2\rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$$

Oppgave 3 (6p.)

Oppgave 3

```
1  def f(x):
2      return (1 - 2 * x) / (x - 2)
3
4  x = 8
5
6  while x >= -8 :
7
8      print(x , f(x))
9      x = x - 1
10
```

```
8 -2.5
7 -2.6
6 -2.75
5 -3.0
4 -3.5
3 -5.0
```

Lars har skrevet en programkode. Ovenfor ser du koden, og resultatet Lars får når han kjører programmet.

Når programmet har skrevet ut de seks linjene, kommer en feilmelding.

a) Hva ønsker Lars å bruke programmet til, og hvorfor får han en feilmelding?

b) Foreslå endringer Lars kan gjøre i koden for å unngå feilmeldingen.

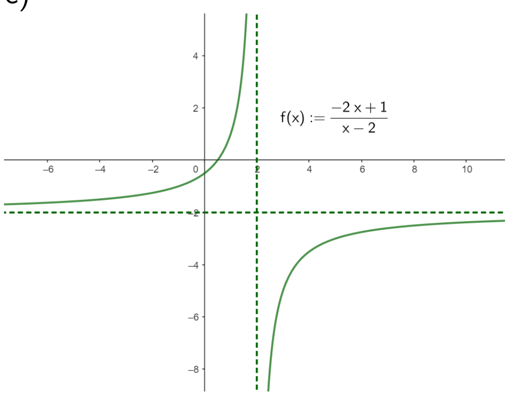
c) Skisser grafen til funksjonen f som Lars har definert i linje 1 og 2 i koden.

a)
Programmet har en while-loop som regner ut funksjonsverdien til f(x) for alle heltallsverdier fra 8 ned til -8.
Han får feilmelding når verdien x=2 skal settes inn i funksjonen fordi vi da prøver å dele på null.

b)
Må endre koden ved å legge inn et vilkår om at $x \neq 2$

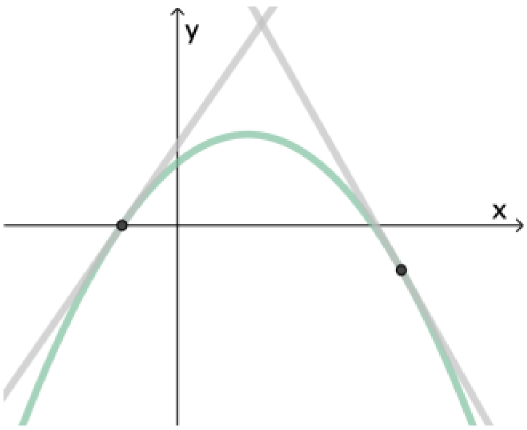
linje 7	if x!=2 :
linje 8	print(x,f(x))
linje 9	x=x-1

c)



Oppgave 4 (3p.)

Oppgave 4



Om grafen til en andregradsfunksjon f får du vite at

- tangenten i punktet $(-2,0)$ har likningen $y = 9x + 18$
- tangenten i punktet $(8,-10)$ har likningen $y = -11x + 78$

Bestem $f'(x)$.

Den deriverte til en funksjon i et punkt = stigningstallet til tangenten i punktet.

Tangenten i $(-2, 0)$ har likningen $y = 9x + 18$ forteller oss at den deriverte $f'(-2) = 9$.
Tangenten i $(8, -10)$ har likningen $y = 9x+18$ forteller oss at den deriverte $f'(8) = -10$.

Vi vet at dette er en 2.gradsfunksjon, da vil den deriverte være en lineær funksjon, med 2 kjente punkter kan vi finne uttrykket til den deriverte.
Punktene er $P_1 = (-2, 9)$ og $P_2 = (8, -11)$.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-11 - 9}{8 - (-2)} = \frac{-20}{10} = -2 \\
(y - y_1) &= a(x - x_1) \\
y - (-9) &= -2(x + 2) \\
y + 9 &= -2x - 4 \\
y &= -2x + 5
\end{aligned}
$$

Alternativ løsning :
Vi vet at dette er en 2.gradsfunksjon, da vil den deriverte være en lineær funksjon.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f'(x) &= 2ax + b \\
\text{Setter inn punktet } (-2, 9) \\
f'(-2) &= 9 \\
2a(-2) + b &= 9 \\
-4a + b &= 9 \\
\text{Setter inn punktet } (8, -11) \\
f'(8) &= -11 \\
2a \cdot 8 + b &= -11 \\
16a + b &= -11 \\
\text{Løser likningsettet} \\
-4a + b &= 9 \wedge 16a + b = -11 \\
b &= 4a + 9 \wedge 16a + 4a + 9 = -11 \\
20a &= -20 \\
a &= -1 \\
b &= 4 \cdot (-1) + 9 = -4 + 9 = 5 \\
\text{Da blir funksjonen til den deriverte :} \\
f'(x) &= -2x + 5
\end{aligned}
$$

Del 2

Oppgave 1 (9p.)

Strømmen som holder vannet i et hagebasseng varmt, blir slått av.

Anta at funksjonen T gitt ved

$$T(x) = 3{,}5 + 34{,}5 \cdot 0{,}87^x \quad , \quad x \geq 0$$

kan brukes som en modell for temperaturen $T(x)$ °C i vannet x timer etter at strømmen blir slått av.

a) Hva er temperaturen i vannet når strømmen blir slått av?

a)

Når strømmen skrus av er tiden $x = 0$, da er temperaturen i vannet $T(0) = 38°C$ (linje 2)

CAS

1	T(x):=3.5+34.5*0.87^x,x>=0
	$\rightarrow$ $T(x) := \text{Dersom}\left(x \geq 0, \frac{7}{2} + \frac{69}{2}\left(\frac{87}{100}\right)^x\right)$
2	T(0)
	$\rightarrow$ 38

b) Hvor lang tid vil det ta før temperaturen i vannet er under 20°C?

b)
Vannet har en temperatur under $20°$ etter $5,3$ timer, altså ca. 5 timer og 20 minutter.(Linje 3)

3	Løs(T(x)<20)
	$\approx$ $\{x > 5.3\}$

c) Bestem stigningstallet til den rette linjen som går gjennom punktene $(0, T(0))$ og $(4, T(4))$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

c)

Vi definerer punktene, og finner likningen ved å lage en linje gjnnom de 2 punktene.

Linjen som går gjennom $(0, T(0))$ og $(4, T(4))$ har stigningstall $a = -3.68$

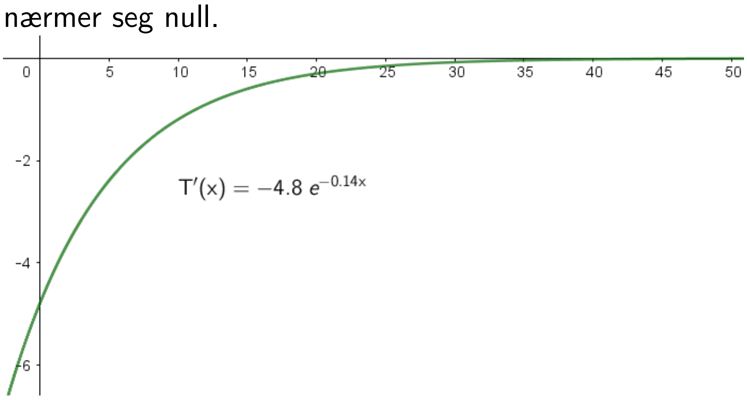
Dette betyr at temperaturen faller med ca. 3,7 grader pr.time de 4 første timene.

4	A:=(0,T(0)) $\approx$ **A := (0, 38)**
5	B:=(4,T(4)) $\approx$ **B := (4, 23.26)**
6	Linje(A, B) $\approx$ **y = −3.68 x + 38**

d) Undersøk om temperaturen i vannet noen gang vil synke med mer enn 5 °C i løpet av en time.

d)
Temperaturen faller raskest når vi starter, det kan vi se av grafen til T(x).
Den momentane vekstfarten når x=0 er $T'(x) = -4.8$, det vil si at den største endringen(vekstfarten) er at den synker med 4.8 grader pr. time. Den vil altså aldri synke med mer enn $5°C$.

Vi kan også se på grafen til den deriverte. Ser da at veksten starter på -4.8 og over tid nærmer seg null.



e) Gi en praktisk tolkning av tallet 3,5 i modellen.

e)

$$T(x) = 3,5 + 34,5 \cdot 0,87^x$$

Vi vet at :

$$\lim_{x \to \infty} a \cdot b^x = \infty \text{ når } b > 1$$

og

$$\lim_{x \to \infty} a \cdot b^x = \infty \text{ når } b < 1$$

Da vil

$$\lim_{x \to \infty} 34,5 \cdot 0,87^x = 3,5$$

og

$$\lim_{x \to \infty} T(x) = \lim_{x \to \infty} 3,5 + 34,5 \cdot 0,87^x = 3,5$$

$T(x)$ går mot 3,5 grader dersom det går lang tid. Dette er antakeligvis fordi det er 3,5 grader i lufta der bassenget står.

Oppgave 2 (3p.)

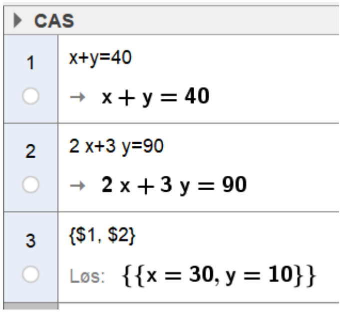
I en bygård er det 40 leiligheter med til sammen 90 rom.
Hver leilighet har enten to eller tre rom.

Hvor mange leiligheter har to rom, og hvor mange har tre rom?

Antall 2-roms = x
Antall 3-roms = y

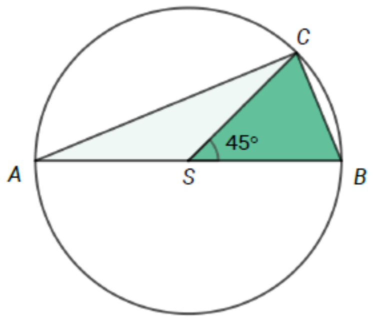
Vi setter opp et likningssett og løser det i Geogebra :

$x + y = 40 \wedge 2 \cdot x + y \cdot 3 = 90$



Det er 30 stk. 2-romsleiligheter og 10 stk. 3-roms leiligheter.

Oppgave 3 (4p.)



En sirkel har sentrum i S. AB er diameter, og C ligger på sirkelperiferien.
Arealet av $\triangle SBC$ er $3 \cdot \sqrt{2}$

a) Bestem sirkelens radius. Bruk eksakte verdier.

b) Bestem arealet av $\triangle ABC$. Bruk eksakte verdier.

a)
Arealet av $\triangle SBC = 3\sqrt{2}$
Arealsetningen : $F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$

Bruker arealsetningen. $SB = SC = r$. Da får vi :

$$F = \frac{1}{2} \cdot SB \cdot SC \cdot \sin 45^\circ$$
$$3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 45^\circ$$

1 $\frac{1}{2}$ r · r · sin(45°) = 3 $\sqrt{2}$
Løs: $\left\{\mathbf{r = -2\sqrt{3}, r = 2\sqrt{3}}\right\}$

Radius til sirkelen : $r = 2\sqrt{3}$, den negative løsningen er ikke med fordi radius alltid er positiv.

b)
Areal av $\triangle ABC = 2 \cdot$ Areal av $\triangle SBC$ fordi de har samme høyde, men grunnlinjen er dobbelt så lang.

$$F_{ABC} = 2 \cdot F_{SBC} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Oppgave 4 (7p.)

Nina og Edvard arbeider med å finne en ukjent side x i en trekant.
De har brukt cosinussetningen og satt opp likningen

$$14^2 = 16^2 + x^2 - 16x$$

a) Hvilke opplysninger kan Nina og Edvard ha fått om trekanten?

a)
Bruker cosinussetningen:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin A \\ 14^2 &= 16^2 + x^2 - 16x \\ 14^2 &= 16^2 + x^2 - 2 \cdot 16 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da ser vi at opplysningene de har fått er at $a = 14$ og $b = 16$ og at $\cos A = \frac{1}{2}$

$cosv = \frac{1}{2}$ gir oss at vinkelen i A er $v = 60°$.

CAS

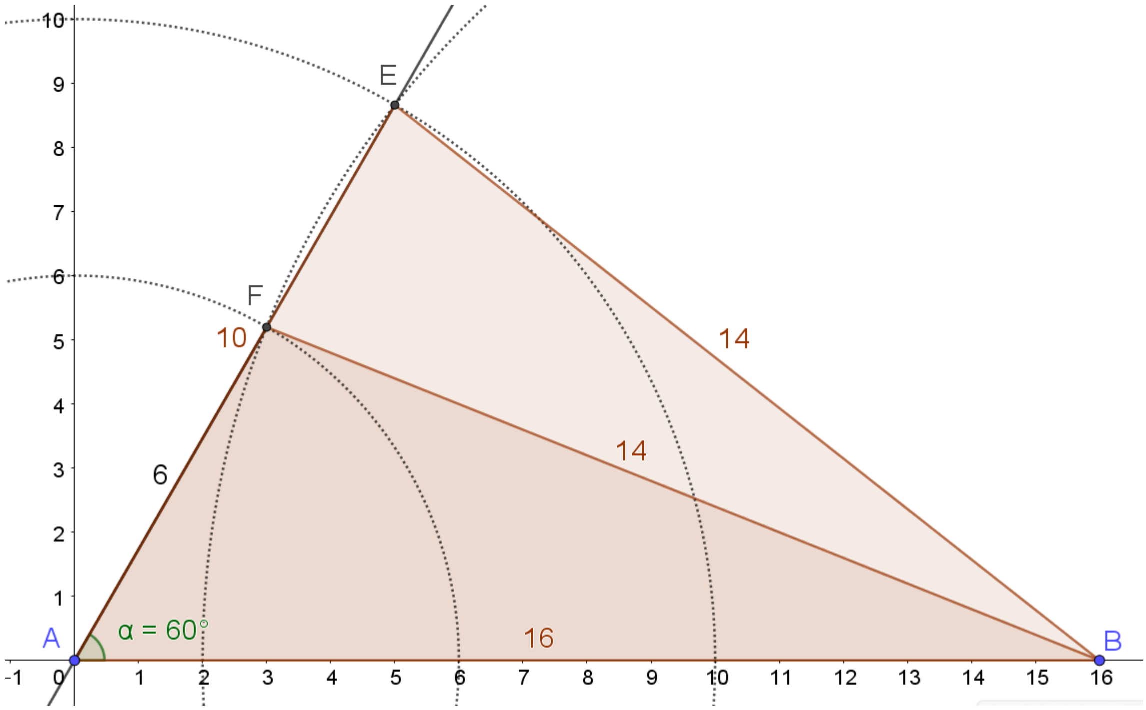
1	Løs(14^2=16^2+x^2-16 x)
	→ $\{x = 6, x = 10\}$

Siden likningen ovenfor er en andregradslikning, antar Nina at det er to ulike trekanter som passer med opplysningene de har fått.

b) Løs likningen og lag én skisse som viser at Ninas antakelse er riktig.
Sett mål på skissen.

b)

Det er 2 trekanter som passer til verdiene, slik Nina antok.
I figuren lar jeg AB være 16. Finner så hvor avstandene 6 og 10 fra A, passer til avstand 14 fra B.

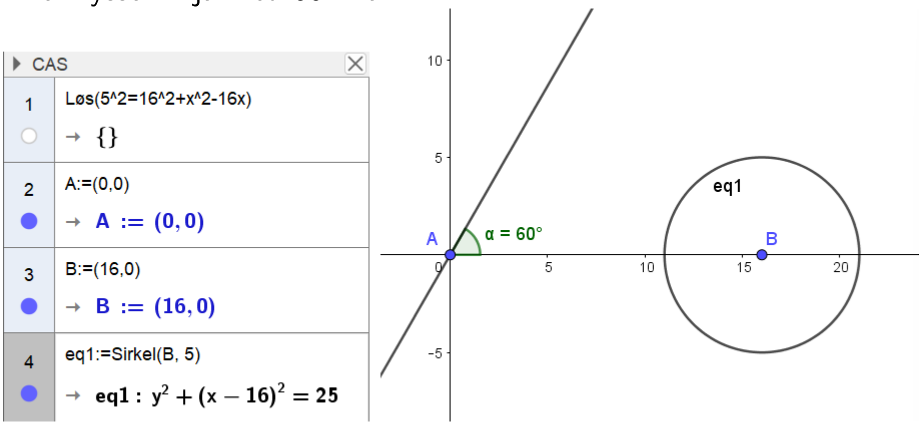


Nina og Edvard vet at andregradslikninger kan ha to løsninger, én løsning eller ingen løsning. Edvard bytter ut 14^2 med 5^2. Da har likningen ovenfor ingen løsning.

«Det kunne vi sett om vi hadde laget en skisse», sier Nina. «Jeg lurer på hvilket tall vi måtte erstattet 14^2 med for å få nøyaktig én løsning.»

c) Ta utgangspunkt i skissen du har laget. Gjør beregninger og bestem lengdene av sidene i det tilfellet der likningen har nøyaktig én løsning.
Bruk eksakte verdier.

c)
Løser likningen med den nye verdien og ser at jeg ikke får svar, altså ingen løsning. Tegner situasjonen tilsvarende som i b), og ser at grunnen er at sirkelen med radius 5 ikke krysser linja med $60°$ fra A.

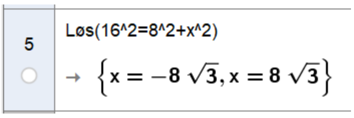


Det vil være én løsning på likningen dersom BC står vinkelrett på AC, da vil radien i sirkelen i B være akkurat så stor at den treffer linja fra A, men ikke krysser den.

Vi vil da ha en $30° - 60° - 90° -$trekant. Da vet vi at det korteste katetet alltid er halvparten av hypotenusen. Altså vil AC=8.

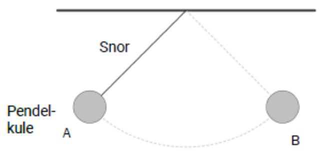
Bruker Pythagoras' for å finne BC :

$$16^2 = 8^2 + x^2$$
$$x = \pm 8\sqrt{3}$$



Alst er : $AC = 8$, $AB = 16$ og $BC = 8\sqrt{3}$

Oppgave 5 (4p.)



Figuren til venstre viser en pendel. Tiden pendelen bruker på å svinge fra posisjon A til posisjon B og tilbake til posisjon A igjen, kalles svingetiden.

Klasse 1STA har utført et forsøk i naturfag. De har målt svingetiden til pendler med ulike snorlengder.

Tabellen nedenfor viser svingetiden til pendler med åtte ulike snorlengder.

Snorlengde (meter)	0,1	0,3	0,5	0,8	1,0	1,3	1,6	2,0
Svingetid (sekund)	0,69	1,17	1,44	1,82	2,08	2,27	2,53	2,80

a) Bruk tallene i tabellen, og lag en modell på formen

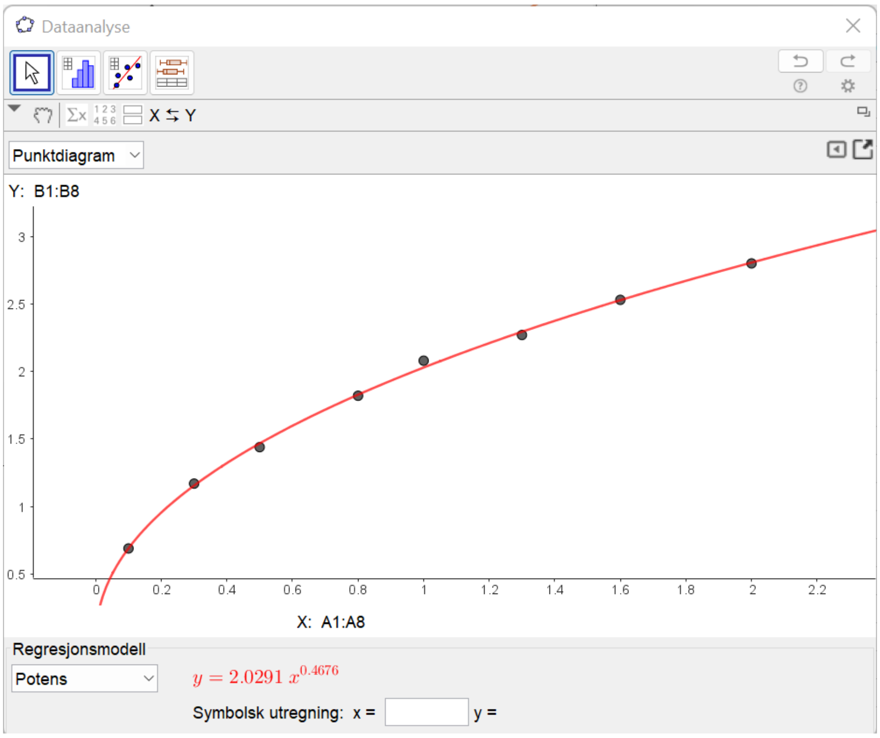
$$S(x) = a \cdot x^b$$

som viser svingetiden $S(x)$ sekunder til en pendel med snorlengde x meter.

Legger tabellen inn i regnearket i Geogebra og bruker regresjon, og potensmodell.
Får da funksjonen

$$S(x) = 2.029x^{0.468}$$

	A	B
1	0.1	0.69
2	0.3	1.17
3	0.5	1.44
4	0.8	1.82
5	1	2.08
6	1.3	2.27
7	1.6	2.53
8	2	2.8
9		



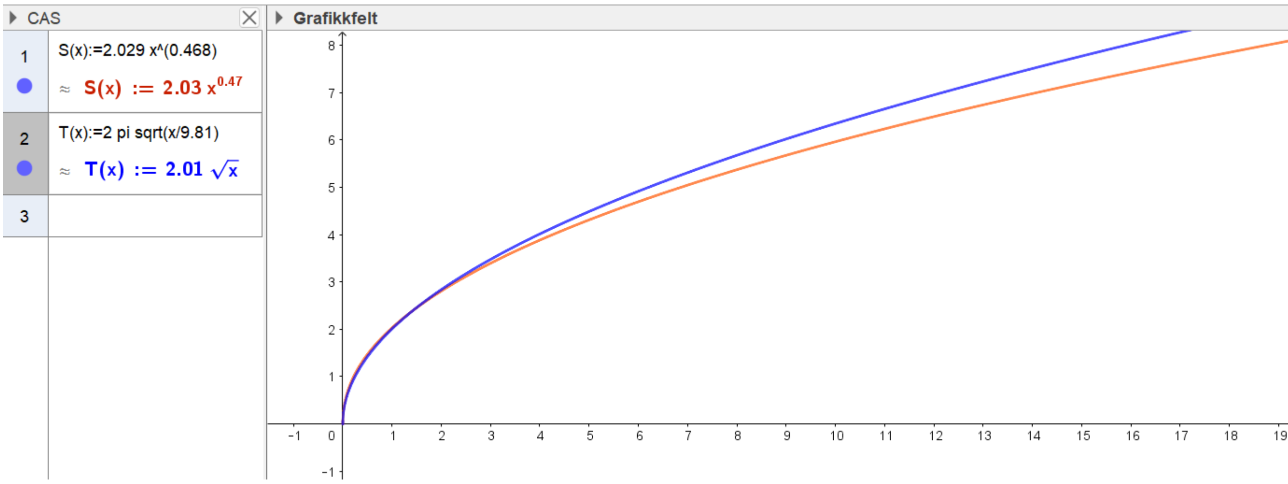
Formelen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

kan brukes for å regne ut svingetiden T til en pendel, når vi ser bort fra friksjon og luftmotstand. L er snorlengden gitt i meter, og g er tyngdens akselerasjon. På jorden er $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

b) Gjør beregninger og sammenlikn uttrykket du fant for $S(x)$ i oppgave a) med formelen for T.

b)



Legger begge grafen inn i samme koordinatsystem. Ser at de passer bra overens i starten, men etterhver blir forskjellene større.

$$S(x) = 2.029x^{0.468}$$
$$T(x) = 2.01x^{0.5}$$

Oppgave 6 (7p.)

Per og Solveig har nok materialer til å lage et gjerde som er 64 m langt.
De skal gjerde inn et område som skal ha form som et rektangel, og de ønsker at området skal få størst mulig areal.

Per påstår at arealet blir størst mulig dersom alle sidekantene er like lange.

a) Vis at Per sin påstand kan være riktig, ved å lage en oversikt som viser arealet av ulike rektangler med omkrets 64 m.

a)
Dersom omkretsen $2a + 2b = 64$, så kan vi se på oversikt der $a + b = 32$:

a	b	a+b	a*b
16	16	32	256
14	18	32	252
12	20	32	240
10	22	32	220
8	24	32	192
6	26	32	156
4	28	32	112
2	30	32	60

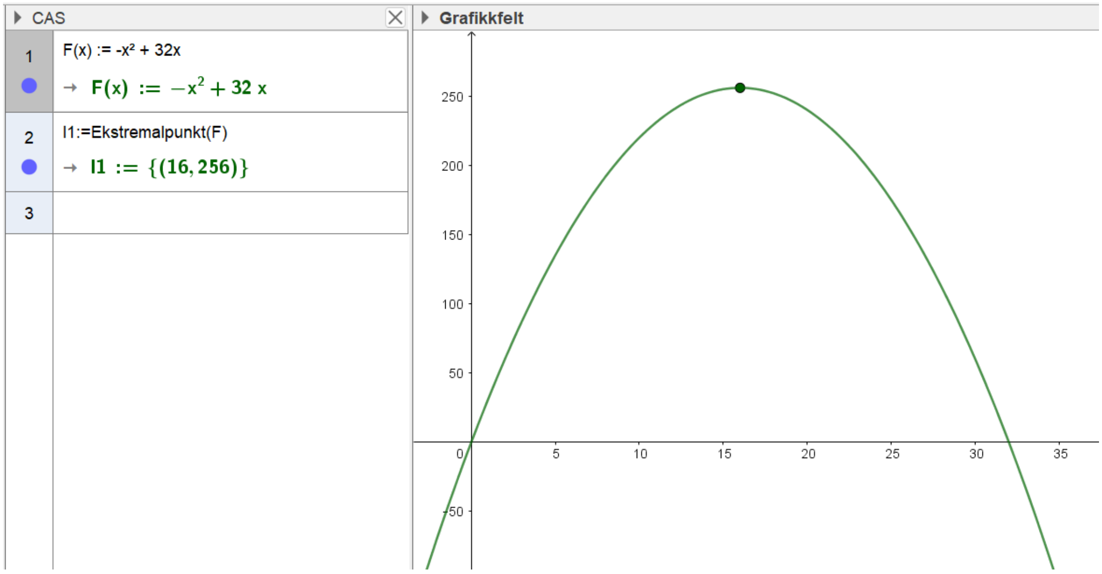
Vi ser av tabellen at arealet er størst når sidene er like lange, som var det vi skulle vise.

Solveig lurer på om de kan tegne en graf som viser at Per har rett. Hun prøver å sette opp et funksjonsuttrykk som hun kan bruke.

b) Sett opp funksjonsuttrykket for Solveig. Tegn grafen, og vis at Per sin påstand er riktig.

b)

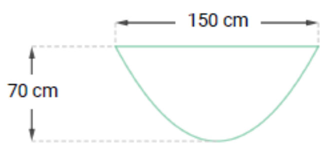
$$\begin{aligned} 2a + 2b &= 64 \\ a + b &= 32 \\ b &= 32 - a \\ F(a) &= a \cdot b \\ &= a \cdot (32 - a) \end{aligned}$$



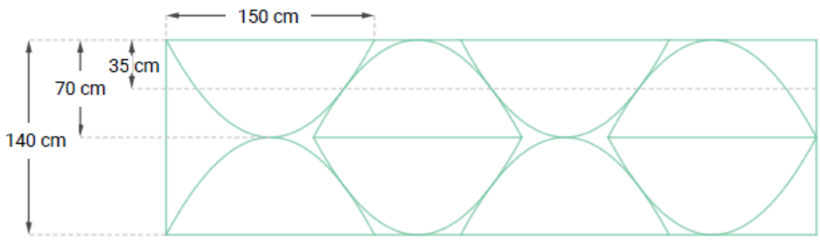
Vi ser av grafen at den har toppunkt når $x = 16$, da er rektangelet et kvadrat.

Oppgave 7 (10p.)

En bedrift produserer gardiner. Hvert gardin skal ha form som en parabel. Høyden skal være 70 cm. Lengden øverst skal være 150 cm. Se figuren nedenfor.

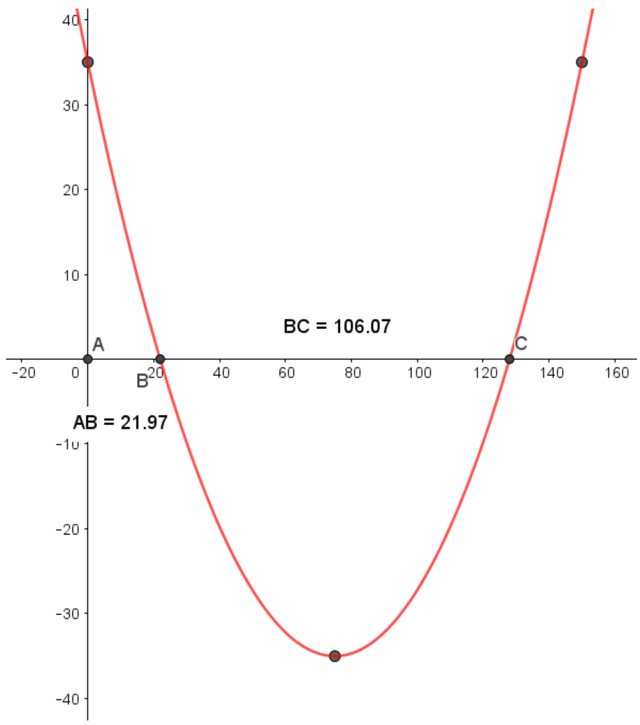


Bedriften vil klippe ut gardinene fra tøyruller som er 140 cm brede. For å bruke så lite tøy som mulig vil en maskin klippe ut gardinene slik figuren nedenfor viser.



Gjør beregninger, og finn ut hvor langt tøystykke bedriften minst må bruke for å lage åtte gardiner.

Legger tegningen inn i et koordinatsystem og finner 3 punkter. Bruker disse til å finne et 2.gradsuttrykk ved rekursjon.



Finner plasseringen til nullpunktene på grafen i tegningen til gardinene, og finner da nødvendige verdier for å regne ut stofflengden.

Lengden på stoffet blir da : $2 \cdot 22 + 4 \cdot 106 = 460$, dvs. 4,6 meter stoff for å lage 8 gardiner.

Alternativ løsning :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
f(0) &= 35 \\
f(150) &= 35 \\
f(75) &= -35
\end{aligned}
$$

CAS

1	a 75^2+b 75+c=-35 → $5625\,a + 75\,b + c = -35$
2	c=35 → $c = 35$
3	a 150^2+b 150+c=35 ≈ $22500\,a + 150\,b + c = 35$
4	{$1, $2, $3} Løs: $\left\{\left\{a = \frac{14}{1125}, b = \frac{-28}{15}, c = 35\right\}\right\}$
5	f(x):=14/1125 x^2-28/15 x+35 → $f(x) := \frac{14}{1125}x^2 - \frac{28}{15}x + 35$
6	Løs(f(x)=0) → $\left\{x = \frac{-75\sqrt{2} + 150}{2}, x = \frac{75\sqrt{2} + 150}{2}\right\}$

7	d_1:=(-75 sqrt(2) + 150) / 2 → $d_1 := \frac{1}{2}\left(-75\sqrt{2} + 150\right)$
8	d_2:=(75 sqrt(2) + 150) / 2 → $d_2 := \frac{1}{2}\left(75\sqrt{2} + 150\right)$
9	lengde:=2*d_1+4*(d_2-d_1) → $\text{lengde} := 225\sqrt{2} + 150$
10	225sqrt(2) + 150 ≈ 468.2