Eksamen 1T
Vår 2022
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (3p.)

a)

$$
\begin{aligned}
(x-2)(x+1) &= 0 \\
x-2 = 0 &\vee x+1 = 0 \\
\underline{\underline{x=2}} &\vee \underline{\underline{x=-1}}
\end{aligned}
$$

b)

		-1		2	
x-2	- - - - - -		- - - - - -	0	————
x+1	- - - - - -	0	————		————
f(x)	————	0	- - - - - -	0	————

Ut fra fortegnslinjen kan vi sette opp ulikheten :

$$
\begin{aligned}
(x-2)(x+1) &> 0 \\
x &\in \underline{\underline{\langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2 (2p.)

> Identitet : to matematiske uttrykk med likhetstegn mellom som er sann for alle verdier av x.
>
> Likning : to matematiske uttrykk med likhetstegn mellom som er sann for én eller flere verdier av x.

$$
\begin{aligned}
9x^2 - 30x + r &= (3x-s)^2 \\
(3x)^2 - 2\cdot(3x)\cdot 5 + 5^2 &= (3x-5)^2 \\
r &\underline{\underline{= 25}} \\
s &\underline{\underline{= 5}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3 (3p.)

1)
Rettvinklet trekant : $\tan v = \frac{3}{4} = \frac{\text{mot}}{\text{hos}}$

Hypotenusen : $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

da vil $\sin v = \frac{3}{5}$, altså kan ikke $\sin v = \frac{3}{10}$

2)
$\tan v = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, altså kan katetene være 6 og 8.

3)
Hypotenusen kan være kortere enn 4, hele trekanten kan skaleres ned, så lenge forholdet mellom katetene er $\frac{3}{4}$.

Oppgave 4 (3p.)

Programmet definerer først en funksjon $f(x) = x^2$

Setter startverdien til x=1

Kjører en while-loop som skriver ut alle kvadrattallene opp til 400.

Loopen kjører hver x-verdi gjennom funksjonen f(x) som kvadrerer verdien til x og skriver ut,

deretter økes x-verdien med 1, loopen kjører til f(x) =400.

Programmet printer de 20 første kvadrattallene.

Oppgave 5 (3p.)

Vertikal asymptote $x = -2$

$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$

Den vertikale asymptoten gir oss at c=2, fordi $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Horisontal asymptote $y = 3$

Den horisontale asymptoten gir :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= 3\\ \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{x+2} &= 3\\ \lim_{x\to\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{1+\frac{2}{x}} &= 3\\ \frac{a}{1} &= 3\\ a &= 3\end{aligned}$$

En mulig løsning er : $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$

Konstantleddet i telleren vil ikke påvirke asymptotene,

derfor passer alle funksjoner $f(x) = \frac{3x+b}{x+2}$, der $b \in R$

eller $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ eller $f(x) = \frac{6x}{2x+4}$

Oppgave 6 (4p.)

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 18x - 9$

a)
Divisjonen går opp dersom x=3 er et nullpunkt.

$f(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 18 \cdot 3 - 9 = 2 \cdot 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3^3 - 3^2 = 0,$

altså vil divisjonen gå opp.

b)

$$\begin{aligned}2x^3 + x^2 - 18x - 9 &= (x-3)(2x^2+7x^2)\\ &= 2(x-3)(x+3)(x+\frac{1}{2})\end{aligned}$$

Da får vi nullpunktene $x = 3$, $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$

2 negative nullpunkter utelukker graf A.

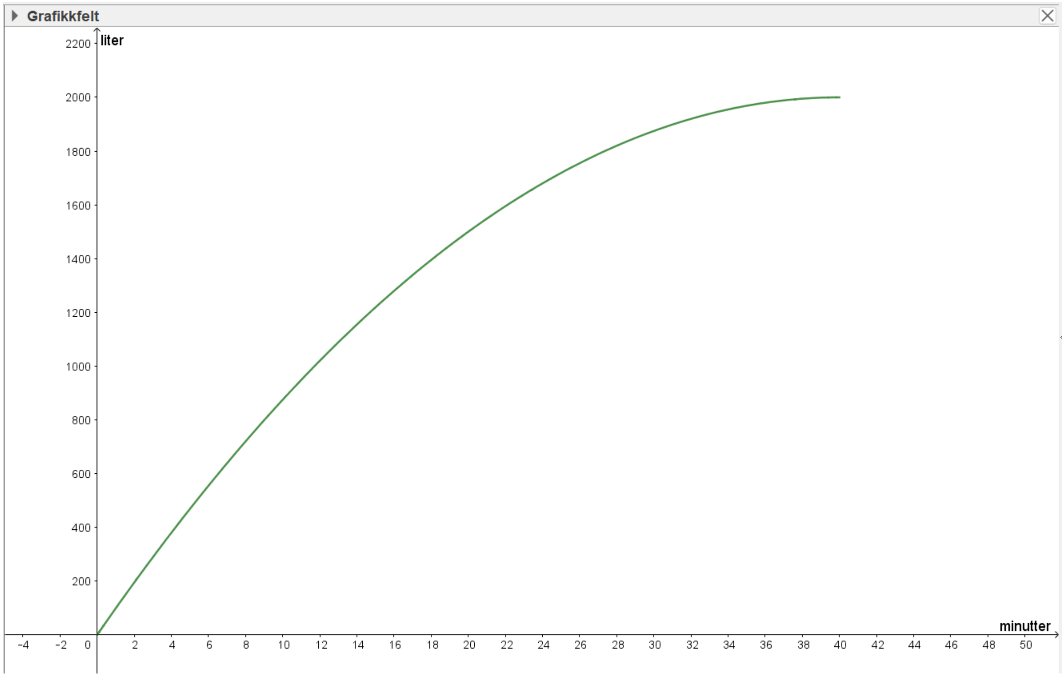
Det minste og det største nullpunktet er like langt fra origo, $x = \pm 3$, da ser vi at det må være graf C som er grafen til $f(x)$.

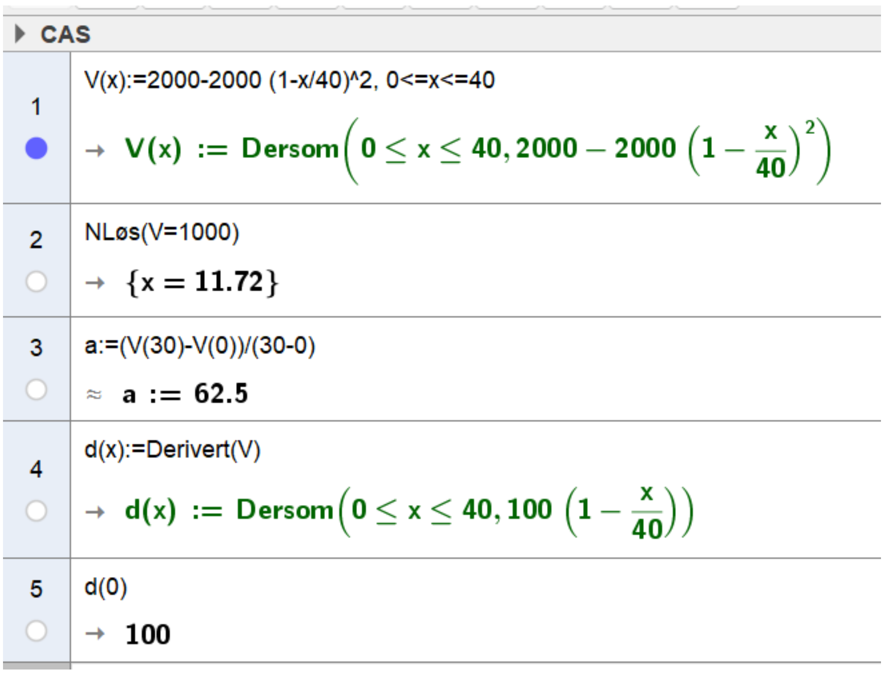
DEL 2

Oppgave 1 (10p.)

$$V(x) = 2000 - 2000 \cdot (1 - \frac{x}{40})^2 \ , \ x \in \langle 0, 40 \rangle$$

a)





$$\begin{aligned} V(0) &= 2000 - 2000 \cdot (1 - \frac{0}{40})^2 \\ &= 2000 - 2000 \cdot (1)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Det vil si at ved tiden 0 så er det tappet ut 0 liter vann fra tanken.

b)
$V_f = [0, 2000]$.

Verdimengden til V er fra 0 til 2000, dvs. tanken kan max ta 2000 liter, og mindre enn null gir ingen mening i denne situasjonen.

c)
Halvparten av vannet tappet ut vil si at $V(x) = 1000$.

Etter ca. 12 minutter er halvparten av vannet tappet ut.

d)
Stigningstallet til den rette linjen er det gjennomsnittlige farten til vannet som tappes ut den første halvtimen.

$$a = \frac{V(30) - V(0)}{30 - 0} = 62,5$$

dvs. ca 62,5 liter / minutt

e)
Farten til vannet som tappes ut finner vi ved $V'(x)$, liter / minutt.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 100(1 - \frac{x}{40}) \\ &= -\frac{5}{2}x + 100 \end{aligned}$$

Ser at dette er en lineær graf som synker fra start.
Når $t = 0$ tappes det ut 100 liter vann pr. minutt, altså vil det aldri tappes ut 105 ltr/min.

Oppgave 2 (5p.)

a)
Figur 1 : $1^2 = 1$

Figur 2 : $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

Figur 3 : $1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 5 + 9 = 14$

Figur 4 : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 14 + 16 = 30$

Figur 5 : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 30 + 25 = 55$

For å lage figur 5 må vi altså ha 55 klosser.

b)

c)

Vi kan legge tallene inn i excel :

Figurnr.	antall	Sum
1	1	1
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	**25**	**55**
6	36	91
7	49	140
8	64	204

Figurnr.	antall	Sum
1	=A2^2	=B2
2	=A3^2	=+C2+B3
3	=A4^2	=+C3+B4
4	=A5^2	=+C4+B5
5	**=A6^2**	**=+C5+B6**
6	=A7^2	=+C6+B7
7	=A8^2	=+C7+B8
8	=A9^2	=+C8+B9
9	=A10^2	=+C9+B10

18	324	2109
19	361	2470
20	400	2870
21	441	3311
22	484	3795
23	529	4324
24	576	4900
25	625	5525
26	676	6201
27	729	6930
28	784	7714
29	841	8555
30	900	9455
31	961	10416
32	1024	11440
33	1089	12529
34	1156	13685
35	1225	14910

A	B	C
18	=A19^2	=+C18+B19
19	=A20^2	=+C19+B20
20	=A21^2	=+C20+B21
21	=A22^2	=+C21+B22
22	=A23^2	=+C22+B23
23	=A24^2	=+C23+B24
24	=A25^2	=+C24+B25
25	=A26^2	=+C25+B26
26	=A27^2	=+C26+B27
27	=A28^2	=+C27+B28
28	=A29^2	=+C28+B29
29	=A30^2	=+C29+B30
30	=A31^2	=+C30+B31
31	=A32^2	=+C31+B32
32	=A33^2	=+C32+B33
33	=A34^2	=+C33+B34
34	=A35^2	=+C34+B35
35	=A36^2	=+C35+B36

Husk at vi enkelt kan kopiere celler, og løpende nummer i excel.

Husk å vise utklipp både med tall og med formler.

Alternativ løsning :
Dersom vi følger mønsteret fra a) får vi : $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2=385$

1	Sum(a^2,a,1,10)
	→ **385**
2	Løs(Sum(a^2,a,1,x)=10000)
	→ **{x = 30.58}**

Vi kan altså lage 30 figurer med 10000 klosser.

3	10000-Sum(a^2,a,1,30)
	→ **545**

Vi vil ha igjen 545 klosser, som altså er for lite til å lage figur nummer 31.

Oppgave 3 (5p.)

a)
Finner BD : se linje 1 $\rightarrow$ $BD = 2\sqrt{3}a$

Finner AD : se linje 2 $\rightarrow$ $AD = (\sqrt{3}+3)a$

Finner AB : se linje 3 $\rightarrow$ $AB = 3\sqrt{2}a$

$BC = CD = 2a$

Omkretsen = AB+BC+CD+DA=$a(3\sqrt(2) + \sqrt(3) + 7)$

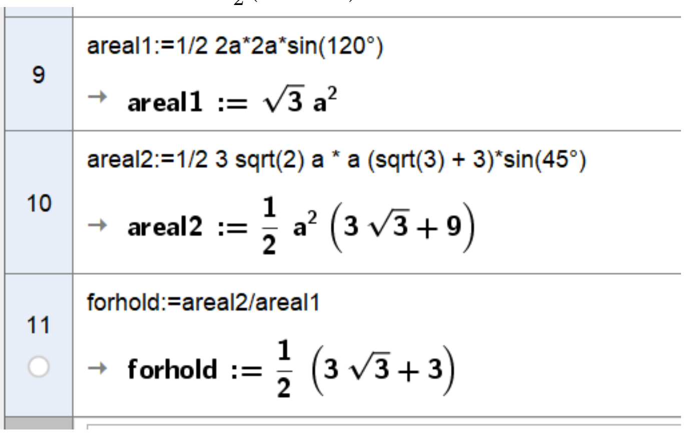
▸ CAS

1	Løs(x/sin(120°)=(2a)/sin(30°)) $\rightarrow \left\{x = 2\sqrt{3}\,a\right\}$
2	Løs(x/sin(75°)=(2 sqrt(3) a)/sin(45°)) $\rightarrow \left\{x = \left(\sqrt{3}+3\right)a\right\}$
3	Løs(x/(sin(180°-45°-75°))=(2 sqrt(3) a)/sin(45°)) $\rightarrow \left\{x = 3\sqrt{2}\,a\right\}$
4	AB:=3sqrt(2) a $\rightarrow \mathbf{AB} := 3\sqrt{2}\,a$
5	BC:=2a $\rightarrow \mathbf{BC} := 2\,a$
6	CD:=2a $\rightarrow \mathbf{CD} := 2\,a$
7	DA:=(sqrt(3) + 3) a $\rightarrow \mathbf{DA} := a\left(\sqrt{3}+3\right)$
8	omkrets:=AB+BC+CD+DA $\rightarrow \mathbf{omkrets} := a\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}+7\right)$

b)
Areal av $\triangle ABD = \sqrt{3}a^2$ (se linje 9)

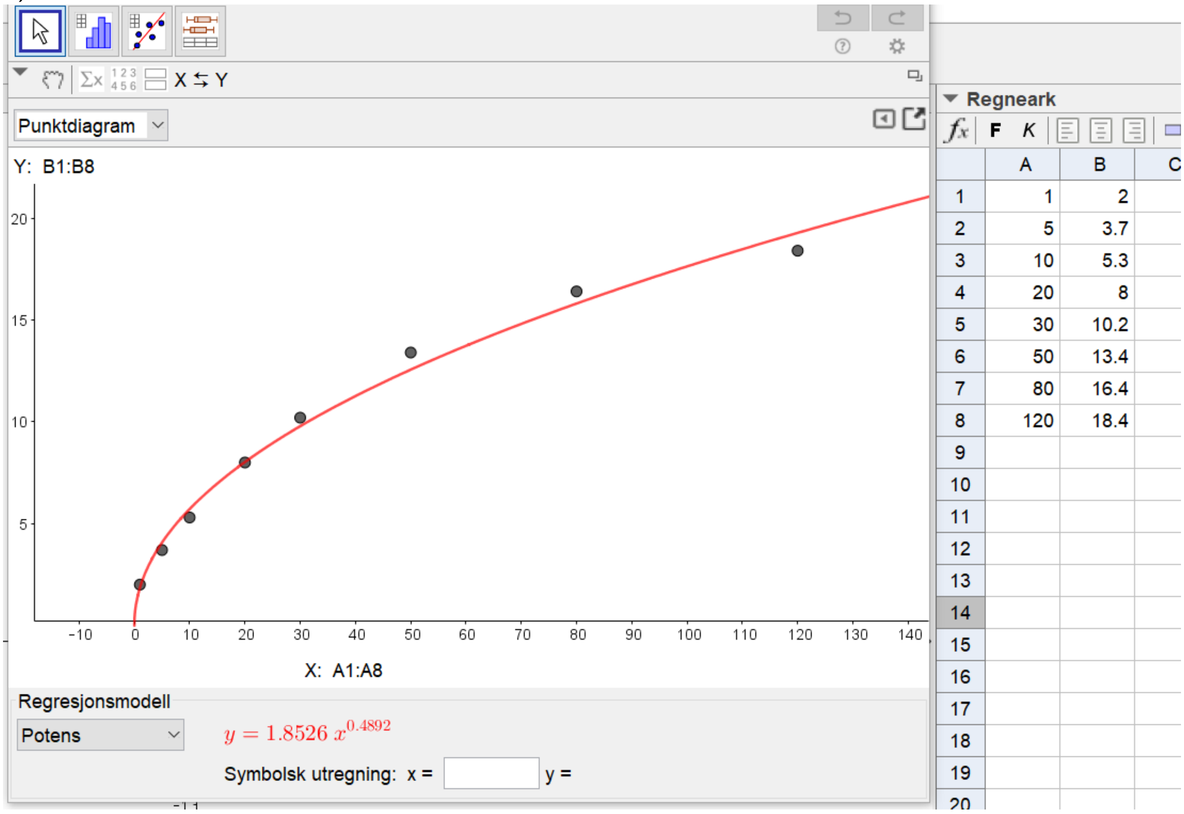
Areal av $\triangle BCD = \frac{1}{2}(3\sqrt{3}+3)a^2$ (se linje 10)

Forholdet blir da : $\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$, som skulle vises.



Oppgave 4 (8p.)

a)



	A	B
1	1	2
2	5	3.7
3	10	5.3
4	20	8
5	30	10.2
6	50	13.4
7	80	16.4
8	120	18.4

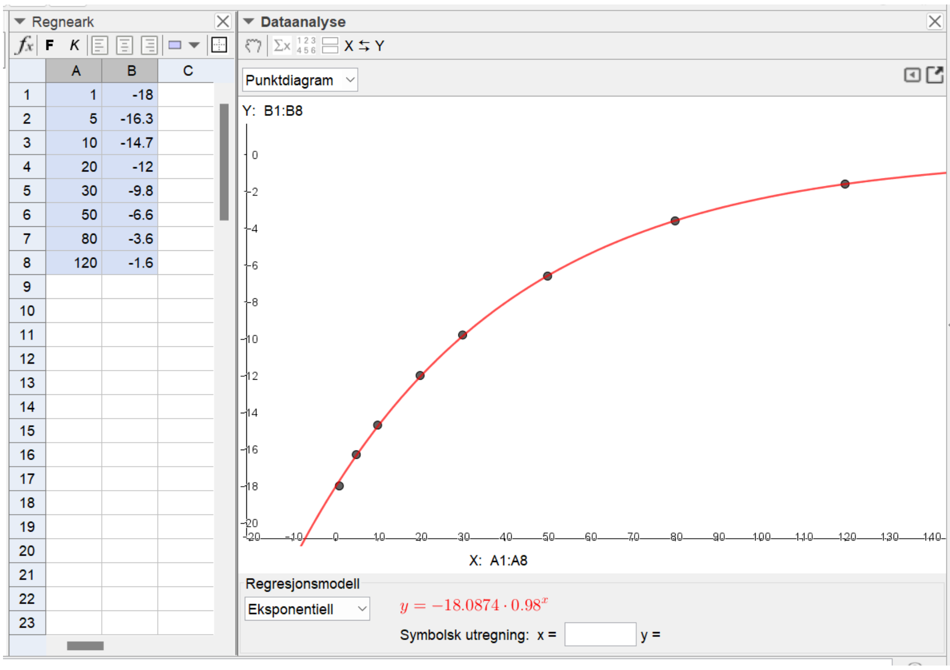
Vi legger tallene fra tabellen inn i regnearket i Geogebra.
Velger regresjonsanalyse, regresjonsmodell : potensfunksjon.

Får da en modell : $T_1(x) = 1,85 \cdot x^{0.49}$

altså er a=1,85 og b= 0,49

b)
Gyldighetsområdet : I denne modelln vil temperaturen fortsette å stige uendelig. Det vil ikke skje i virkeligheten, den vil stoppe på 20 grader, fordi termostaten vil da skru av varmen.
Gyldighetsområdet vil være $D_T = [0, 130\rangle$

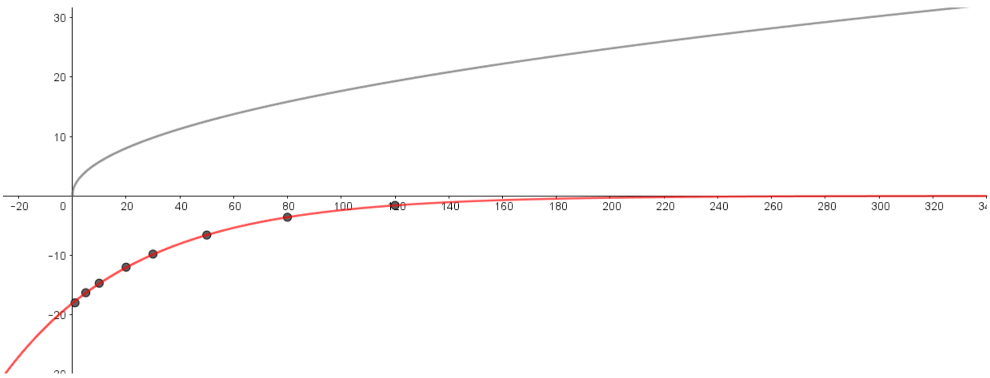
c)



d)
Legger begge grafene inn i Geogebra.

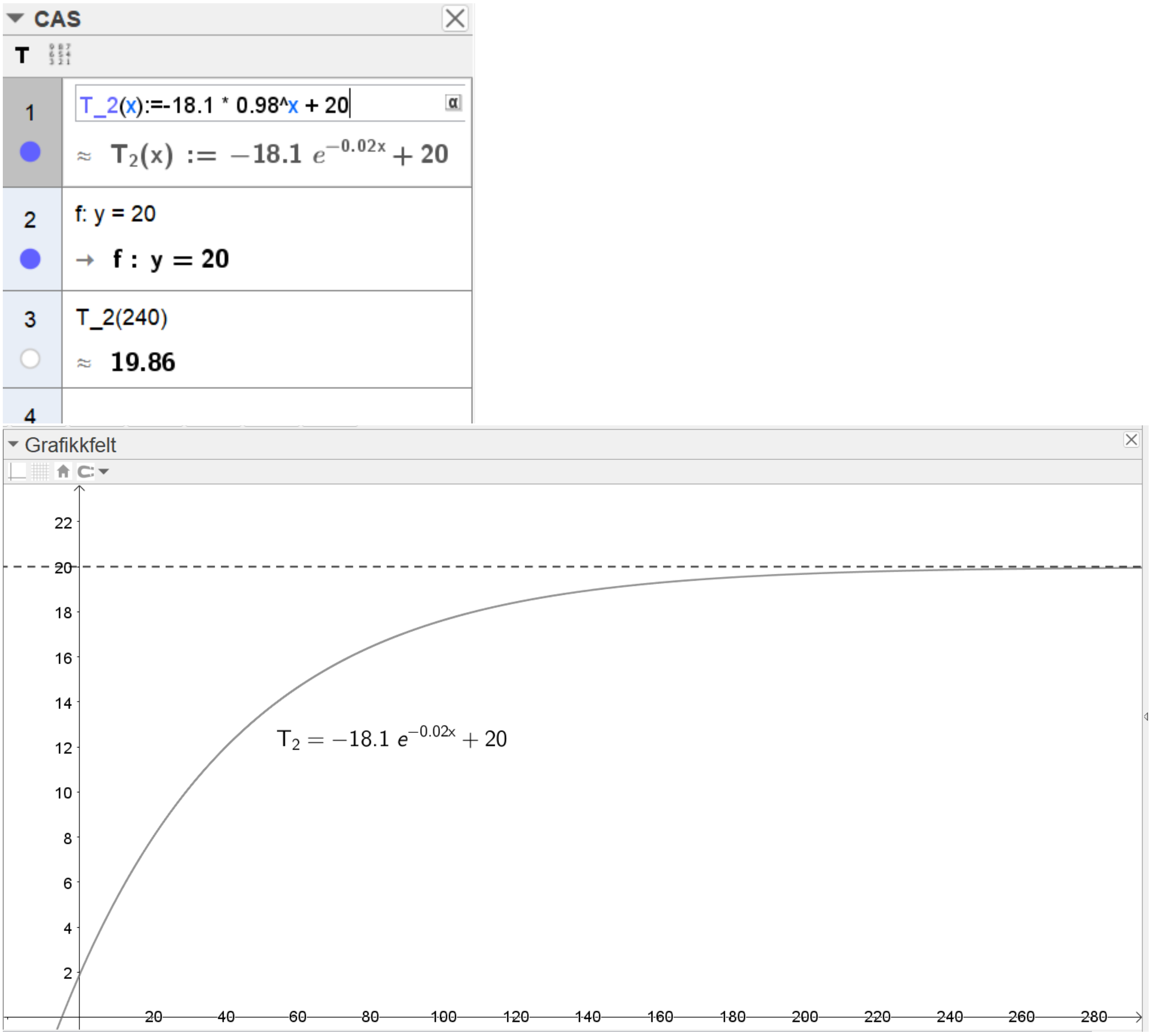
Ser her at den første grafen (øverst), fortsetter å stige, men den andre ser ut til å flate ut mot x-aksen.

Den nederste starter på feil sted, -18 grader, det er 2 grader når vi strarter modellen.



e)
Ved å legge til 20 løfter vi grafen opp slik at den starter på 2 grader.

Etter 4 timer (240 minutter) er temperaturen være 19,9 grader.



Oppgave 5 (4p.)

2.gradsfunksjon :
når stigningstallet til tangenten a=0 så er $f'(x) = 0$, og vi har grafens ekstremalpunkt.
dvs. grafen har et topp eller bunnpunkt når $x = 1$.
Stigningstallet når x=4 er a=6, altså stiger grafen etter ekstremalpunktet, så vi har et bunnpunkt.

a)
$f'(x)$ er en rett linje siden f(x) er en andregradsfunksjon.

Da er den deriverte på formen : $f'(x) = ax + b$

$f'(1) = 0, a + b = 0, b = -a$
$f'(4) = 6, 4a + b = 6, 4a - a = 6, a = 2, b = -2$
$f'(x) = 2x - 2$

b)
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Symmetrilinje når $x = 1 = \frac{-b}{2a}, a = 1, b = -2$

$f(x) = x^2 - 2x + c$
$f(0) = c = 4$
$f(x) = x^2 - 2x + 4$

Oppgave 6 (6p.)

a)
Nullpunktene til funksjonen finner vi når $f(x) = 0$
Løst i Geogebra:

1	f(x):=x^3-2 b x^2+(b^2+3) x $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := x^3 - 2\,b\,x^2 + b^2\,x + 3\,x}$
2	Løs(f(x)=0) $\rightarrow$ $\mathbf{\{x = 0\}}$

altså vil det bare finnes et nullpunkt i $x = 0$.

Løst for hånd :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2b \cdot x^2 + (b^2 + 3) \cdot x \\ &= x(x^2 - 2b \cdot x + (b^2 + 3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2b \cdot x + (b^2 + 3) &= 0 \\ x &= \frac{-(-2b) \pm \sqrt{(-2b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b^2 + 3)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2b \pm \sqrt{-4(b^2 + 3)}}{2} \\ -4(b^2 + 3) &< 0 \text{ for alle verdier av b} \end{aligned}$$

b)
Ett stasjonært punkt vil si ett terrassepunkt siden dette er en 3.gradsfunksjon. Da har $f'(x) = 0$ bare èn løsning.

3	Løs(f'(x)=0) $\rightarrow$ $\mathbf{\left\{x = \frac{2\,b - \sqrt{b^2 - 9}}{3}, x = \frac{2\,b + \sqrt{b^2 - 9}}{3}\right\}}$
4	Løs(b^2-9<=0) $\rightarrow$ $\mathbf{\{-3 \leq b \leq 3\}}$

Løst for hånd:
Bruker abc-formelen og finner ut når uttrykket under rottegnet er mindre eller lik null.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
3x^2 - 4b \cdot x + (b^2+3) &= 0 \\
x &= \frac{-(-4b) \pm \sqrt{(-4b)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (b^2+3)}}{2 \cdot 3} \\
&= \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 12b^2 - 36}}{6} \\
&= \frac{4b \pm \sqrt{4b^2 - 36}}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4b^2 - 36 &\leq 0 \\
b^2 - 9 &\leq 0 \\
x &\in \big[-3, 3\big]
\end{aligned}
$$

c)

5	Løs(f'(x)=3) $\rightarrow \left\{x = b, x = \frac{1}{3}\,b\right\}$
6	Tangent(b, f) $\rightarrow y = 3\,x$
7	Tangent(b/3, f) $\rightarrow y = \frac{4}{27}\,b^3 + 3\,x$

Tangentene med stigningstall $a = 3$ er :
$y = 3x$ og $y = 3x + \frac{4b^3}{27}$