# Løsningsforslag 1T H23

Erling Olbekk

November 2023

## Del 1

### Oppgave 1

Alle vinklene er 60 grader. Hvis vi trekker en linje fra ett av hjørnene til midtpunktet på motstående side vil vi få en $30 - 60 - 90$-Trekant, hvor hypotenusen har lengde 2, og korteste katet har lengde 1. Denne kateten blir også hosliggende katet for vinkelen på $60°$. Det følger av dette av $cos(60°) = \frac{1}{2}$

### Oppgave 2

Jeg vil prøve å finne et nullpunkt for funksjonen slik at jeg vet en faktor jeg kan dele det på for å faktorisere. Siden konstantleddet er $-6$ prøver jeg faktorer i 6.

$$f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$$

$x - 2$ er en faktor i $f$. Jeg vet altså at $f(x) : (x - 2)$ går opp.

$$\begin{aligned}
&(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2) = x^2 + 4x + 3 \\
&-(x^3 - 2x^2) \\
&\quad (4x^2 - 5x - 6) \\
&\qquad -(4x^2 - 8x) \\
&\qquad\quad (3x - 6) \\
&\qquad -(3x - 6) \\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Ved faktorising med heltallsmetoden ser jeg at $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$, så $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$
.
Funksjonen har nullpunkt, og skjærer da x-aksen i $x = -3, x = -1, x = 2$

## Oppgave 3

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 4 = 1$. Tangeringspunktet er altså $(1, 1)$. Jeg finner stigningstallet til tangenten ved å derivere funksjonen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 1 \\ f'(1) &= 3 - 6 - 1 \\ f'(1) &= -4 \end{aligned}$$

Vi kan finne konstantleddet til tangentens likning ved å sette inn $x = 1, y = 1, a = -4$ i likningen $y = ax + b$.

$$\begin{aligned} 1 &= -4 \cdot 1 + b \\ 1 + 4 &= b \\ 5 &= b \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y = -4x + 5}}$$

## Oppgave 4

Siden begge trekantene har to like lange bein, vil arealet være størst i trekanten hvor $sin(\alpha)$ er størst, der $\alpha$ er vinkelen mellom beina. Dette følger fra arealsetningen.

$$sin(150°) = sin(30°) < sin(32°)$$

<u>Trekanten til høyre har størst areal</u>

## Oppgave 5

a) Grafen til $f$ skal ifølge nevner ha en vertikal asymptote når $x = -2$, som utelukker graf A. Når $x$ blir stor tilnærmer grafen seg linjen $y = \frac{2x}{x} = 2$, dette utelukker graf B.

<u>Den eneste grafen som passer med dette er graf C.</u>

b) Grafen til $g$ har bruddpunkt i $x = 3$ og i $x = -3$, som utelukker graf E. $g(0) = \frac{-4}{-3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$, som betyr at grafen skal skjære y-aksen når $y = \frac{4}{9}$. Dette utelukker graf D.

<u>Den eneste grafen som passer er graf F</u>

# Del 2

## Oppgave 1

a) Jeg løser oppgaven i CAS.

Metode 1. Jeg bruker ekstremalpunktkommandoen i CAS for å finne funksjonens ekstremalpunkt. Dette gir to muligheter. Jeg vet at siden dette er en tredjegradsfunksjon med positivt tredjegradsledd vil den første løsningen være et toppunkt.

Metode 2. Jeg finner ut når vekstfarten til funksjonen er null. Dette gir de samme løsningene som metoden over.

1 $F(x) := \frac{1}{1000}\left(0.027\,x^3 - 5.8\,x^2 + 220\,x + 7900\right)$

$\rightarrow\ F(x) := \frac{27}{1000000}x^3 - \frac{29}{5000}x^2 + \frac{11}{50}x + \frac{79}{10}$

2 Ekstremalpunkt(F)

$\approx\ \{(22.501, 10.221), (120.709, -2.566)\}$

3 $F'(x) = 0$

NLøs: $\{x = 22.501, x = 120.709\}$

4 $F(22.5)$

$\approx\ 10.221$

<u>Folketallet var høyest midt i 1982</u>

b) Jeg regner ut stigningstallet i CAS. Stigningstallet er -0.147. Det sier meg at det i perioden 1990 til 2030 i gjennomsnitt forsvinner 147 mennesker fra området per år.

c) Jeg finner når $F'$ har et ekstremalpunkt i CAS. Dette skjer i $x = 71.6$, altså i løpet av 2031. Da synker folketallet raskest ifølge modellen.

5 $\frac{F(70) - F(30)}{70 - 30}$

$\approx\ -0.147$

6 Ekstremalpunkt($F'(x)$)

$\approx\ \{(71.605, -0.195)\}$

## Oppgave 2

1. $$\frac{AD}{\sin(35°)} = \frac{12}{\sin(125°)}$$
   NLøs: $\{\mathbf{AD = 8.402}\}$

2. $$12^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos(C°)$$
   NLøs: $\{\mathbf{C = -117.28, C = 117.28}\}$

3. $$ADB = 180 - 125 - 35$$
   $\rightarrow$ $\mathbf{ADB = 20}$

4. $$A = \frac{1}{2} \cdot (12 \cdot 8.4 \cdot \sin(20°) + 8 \cdot 6 \cdot \sin(117.28°))$$
   $\approx$ $\mathbf{A = 38.568}$

I linje 1 bruker jeg sinussetningen på $\triangle ABD$ for å finne $AD$.
I linje 2 bruker jeg cosinussetningen på $\triangle BCD$ for å finne $\angle C$
I linje 3 finner jeg $\angle ADB$ ved vinkelsummen i trekanten.
I linje 4 bruker jeg arealsetningen på begge trekantene for å finne det totale arealet. $\underline{\underline{\text{Arealet er omtrent 38.57}}}$

## Oppgave 3

a) Jeg regner ut direkte.
$100 + 90 + 90 \cdot 0.9 + 90 \cdot 0.9^2 + 90 \cdot 0.9^3 + 90 \cdot 0.9^4 + 90 \cdot 0.9^5 + 90 \cdot 0.9^6 \approx 569.5$

b) Se bildet. Vi trenger 22 linjestykker.

```python
"""
Den første pinnen vil ha lengde 100*0.9^0
Den andre pinnen vil ha lengde 100*0.9^1
Den tredje vil ha lengde 100*0.9^2
osv..
"""
antall = 0
Total_lengde = 0

while Total_lengde < 900:
    Total_lengde += 100*0.9**antall
    antall += 1

print(f"Vi trenger {antall} linjestykker. Lengden blir da {Total_lengde:.2f}cm.")
```

```
In [4]: runfile('C:/Users/Erling/Documents/Spyder/untit
Documents/Spyder')
Vi trenger 22 linjestykker. Lengden blir da 901.52cm.
```

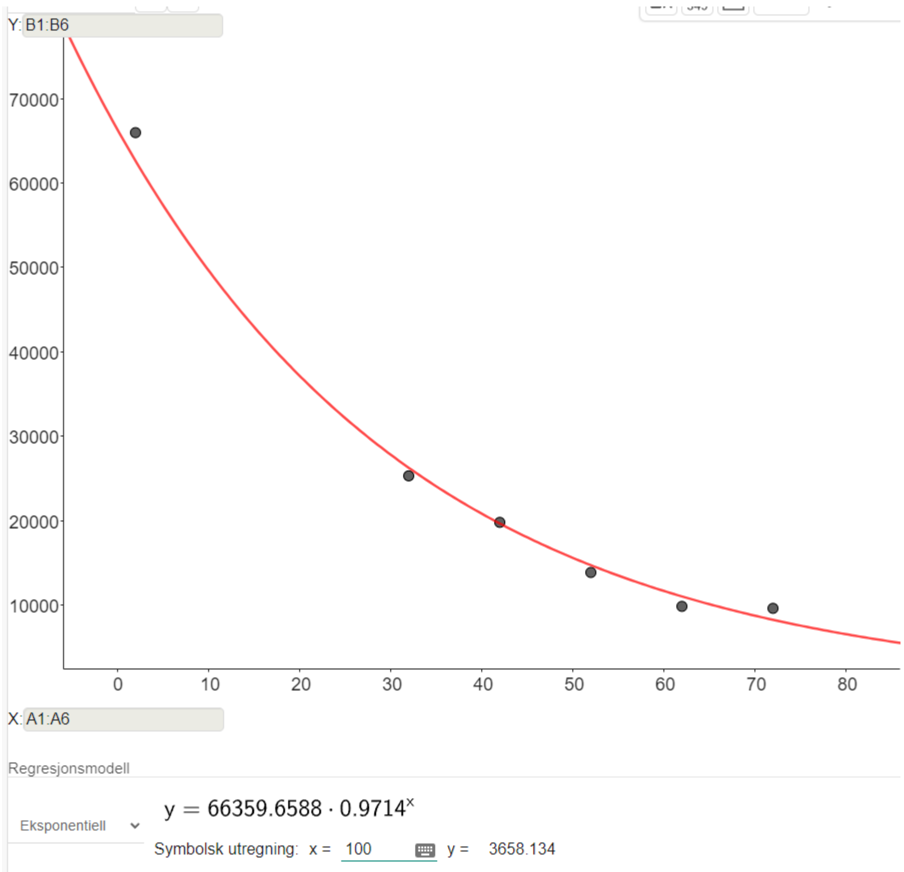
c) Se bildet. Svaret som skrives ut er 1.0052. Dette svarer til en prosentvis økning på 0.52%

```python
antall = 0
Total_lengde = 0

while antall<150:
    Total_lengde += 100*0.9**antall
    antall += 1
    if antall==50:
        Verdi1 = Total_lengde
    elif antall ==100:
        svar = Total_lengde/Verdi1

print(f"Forholdet er {svar}")
```

## Oppgave 4




a) Jeg bruker verdiene i tabellen, men setter $x$ til antall år etter 1950, og lager en eksponentiell modell. Det var denne modellen som passet best med punktene. En potensmodell kunne også vært aktuelt her, men den var ikke en like godt tilpasset datasettet.

En modell er $F(x) = 66360 \cdot 0.97^x$

b) Ifølge modellen vil det være ca. 3650 fiskere i Norge i år 2050. Dette er godt mulig, vi leser til stadighet i avisene om at det blir vanskeligere å etablere seg som fisker fordi markedet domineres av færre større aktører. Ifølge tabellen har ikke antallet fiskere sunket nevneverdig de siste 10 årene, så det er kanskje mulig at nedgangen har stoppet opp. Det er også lite sannsynlig at antallet fiskere med tiden vil fallet ned til null, slik en eksponentialfunksjon av denne typen gjør.

Hvor langt antallet fiskere vil synke kan bare fremtiden vise, men jeg vil påstå at modellen stemmer godt for $x \in [0, 70]$

## Oppgave 5

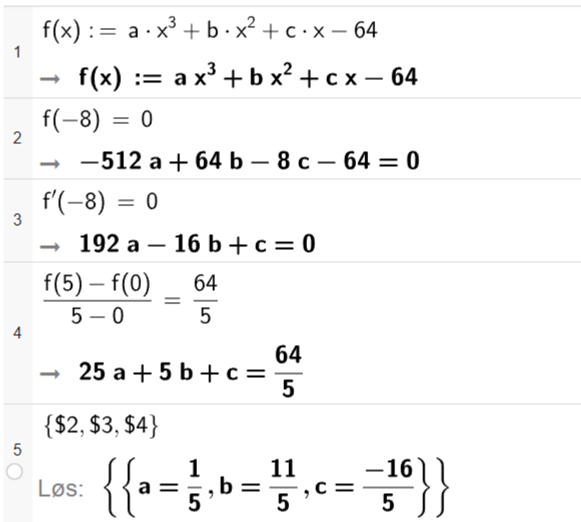
| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) := 2x + 8$ <br> $\rightarrow$ $f(x) := 2x + 8$ |
| 2 | $g(x) := x^3 - x^2 - 4x + 8$ <br> $\rightarrow$ $g(x) := x^3 - x^2 - 4x + 8$ |
| 3 | $f(1) - g(1)$ <br> $\rightarrow$ $6$ |
| 4 | $h(x) := f(x) - g(x)$ <br> $\rightarrow$ $h(x) := -x^3 + x^2 + 6x$ |
| 5 | $h'(x) = 0$ <br> Løs: $\left\{x = \frac{-\sqrt{19}+1}{3}, x = \frac{\sqrt{19}+1}{3}\right\}$ |

a) Jeg definerer funksjonene i CAS. Avstanden er bare forskjellen i funksjonsverdi for $x = 1$. Se linje 3. Avstanden er 6

b) Jeg definerer funksjonen $h(x)$ som differansen mellom $f$ og $g$. Funksjonsverdien til $f$ er avstanden mellom R og S. I linje 5 finner jeg at denne har to ekstremalpunkt. Det siste av disse er et toppunkt siden $h$ er en tredjegradsfunksjon med negativt tredjegradsledd. $a = \frac{\sqrt{19}+1}{3}$

## Oppgave 6

Jeg definerer funksjonen i CAS. Vi vet at punktet $(-8, 0)$ ligger på grafen (linje 2). Vi vet også at det er et toppunkt, så den momentane vekstfarten er null (linje 3). Den momentane vekstfarten i intervallet $[0, 5]$ er kjent (linje 4). Likningssettet gir løsningen på oppgaven. Se linje 5.



## Oppgave 7

Jeg løser oppgave a) og b) med et program som regner ut alle verdiene oppgave b) spør om. Svaret på a) er en del av listen. Det ser ut som om arealet er størst når $n$ er mellom 4 og 5 et sted.

```python
def f(x): #Definerer funksjonen f
    return 8/(x**2 + 20)

for n in range(1,11): #Løkke for de relevante verdiene
    areal = n*f(n) #Regner ut areal. Bredde*høyde
    print(f"n={n}, A={areal:.3f}")
```

```
n=1, A=0.381
n=2, A=0.667
n=3, A=0.828
n=4, A=0.889
n=5, A=0.889
n=6, A=0.857
n=7, A=0.812
n=8, A=0.762
n=9, A=0.713
n=10, A=0.667
```

c) Jeg lager en funksjon for arealet av rektangelet. Breden er bare $x$, høyden er $f(x)$. Denne funksjonen har et toppunkt når $x = 2\sqrt{5} \approx 4.47$. Dette stemmer godt med resultatet fra b).

1 $f(x) := \dfrac{8}{x^2 + 20}$

$\rightarrow\ f(x) := \dfrac{8}{x^2 + 20}$

2 $A(x) := x\, f(x)$

$\rightarrow\ A(x) := 8 \cdot \dfrac{x}{x^2 + 20}$

3 $A'(x) = 0$

Løs: $\left\{x = -2\sqrt{5}, x = 2\sqrt{5}\right\}$

$\underline{\underline{\text{Arealet er størst når } k = 2\sqrt{5}}}$