Eksamen 1T
Høst 2023
Løsningsforslag

Oppgavene er delt inn i tre kategorier, kategori 1, kategori 2 og kategori 3.

Kategori 1:	Oppgaver som krever at kandidaten viser forståelse av begreper og ferdigheter.
Kategori 2:	Oppgaver som krever at kandidaten ser sammenhenger, kan anvende begreper og bruke ferdigheter på varierte måter og i ulike situasjoner.
Kategori 3:	Oppgaver som krever en form for utforsking eller problemløsing. Oppgavene krever at kandidaten systematiserer opplysninger, finner sammenhenger, modellerer, generaliserer og viser problemløsingskompetanse.

DEL 1

Oppgave 1 (2 p.)

Vinklene i en likesidet trekant er $60°$ Hvis vi deler en likesidet trekant ved å lage en normal fra toppen ned på grunnlinjen får vi to like rettvinlede trekanter. Dette blir høyden i trekanten og den deler grunnlinjen på midten.

Den rettvinklede trekantens vinkel på $60°$ har hypotenus som er 2, og hosliggende katet som er 1.

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{hos}{hyp} \\ \cos 60° &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

som skulle vises.

> Kommentarer fra sensorveiledningen:
> En kandidat som setter opp et riktig utrykk for cosinus til en vinkel, eller gjør noen riktige beregninger, kan få 1 poeng.

Oppgave 2 (3 p.)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \\ f(-1) &= (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 \\ &= -1 + 2 + 5 - 6 = 0 \\ (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x+1) &= x^2 + x - 6 \\ &= (x+3)(x-2) \\ f(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \\ &= (x+1)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

$f(x)$ skjærer x-aksen (har nullpunkter) i $x = -3$, $x = -1$ og $x = 2$.

> Kommentarer fra sensorveiledningen:
> En kandidat som finner ett nullpunkt ved «prøving og feiling», får 1 poeng.
> En kandidat som faktoriserer uttrykket, men ikke bestemmer nullpunktene, får 2 poeng.
> En kandidat som gjør noen riktige beregninger, kan få 1 eller 2 poeng.

Oppgave 3 (3 p.)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x^2 - x + 4 \\
f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 4 \\
&= 1 - 3 - 1 + 4 \\
&= 1 \\
P &= (1, f(1)) = (1, 1) \\
f'(x) &= 3x^2 - 6x - 1 \\
f'(1) &= 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 1 \\
&= -4
\end{aligned}
$$

Tangenten i punktet $P(1, 1)$ har stigningstall $a = -4$, fordi den deriverte i punktet er $f'(1) = -4$

Setter inn punktet for å finne konstantleddet.

$$
\begin{aligned}
y &= -4x + b \\
1 &= -4 \cdot 1 + b \\
b &= 1 + 4 = 5 \\
\text{Tangenten blir da :} & \\
y &= -4x + 5
\end{aligned}
$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:
En kandidat som gjør noen riktige beregninger, kan få 1 eller 2 poeng.

Oppgave 4 (2 p.)

Arealet av en trekant er $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
Trekantene har lik grunnlinje, da er det høyden som avgjør hvilken som er størst.

Supplementvinkelen til $150°$ er $30°$.
Sidene er like lange, da vil det være den største vinkelen ($32°$) som gir størst høyde.

Kommentarer fra sensorveiledningen:
Riktig svar uten argumentasjon gir ingen uttelling.
Riktig svar med en mangelfull argumentasjon, kan gi 1 poeng.

Oppgave 5 (2+2 p.)

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x-8}{x+2} \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-8}{x+2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{8}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2
\end{aligned}
$$

Vertikal asymptote når $x = -1$, fordi det gir null i nevneren.

Horisontal asymptote når $y = 2$, grafen nærmer seg denne verdien når x blir veldig stor (eller liten).

Figur C har vertikal asymptote på negativ side, altså passer ikke den.
Figur B har horisontal asymptote på negativ side, altså passer ikke den heller.
Figur A passer til $f(x)$.

b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x^2-4}{(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{x^2-4}{x^2-9} \\
\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-9} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} = 1
\end{aligned}
$$

Vertikal asymptoter når $x = -3$ og $x = 3$, da er nevneren null.

Horisontal asymptote når $y = 1$.

Figur D har horisontal asymptote når $y = 0$, altså passer ikke den.

Figur E har vertikale asymptoter som ikke er symmetriske om y-aksen, altså passer ikke den heller.

Figur F passer til $g(x)$.

Kommentarer fra sensorveiledningen:
Riktig svar uten argumentasjon gir ingen uttelling.
Riktig svar med en mangelfull argumentasjon, kan gi 1 poeng.

DEL 2

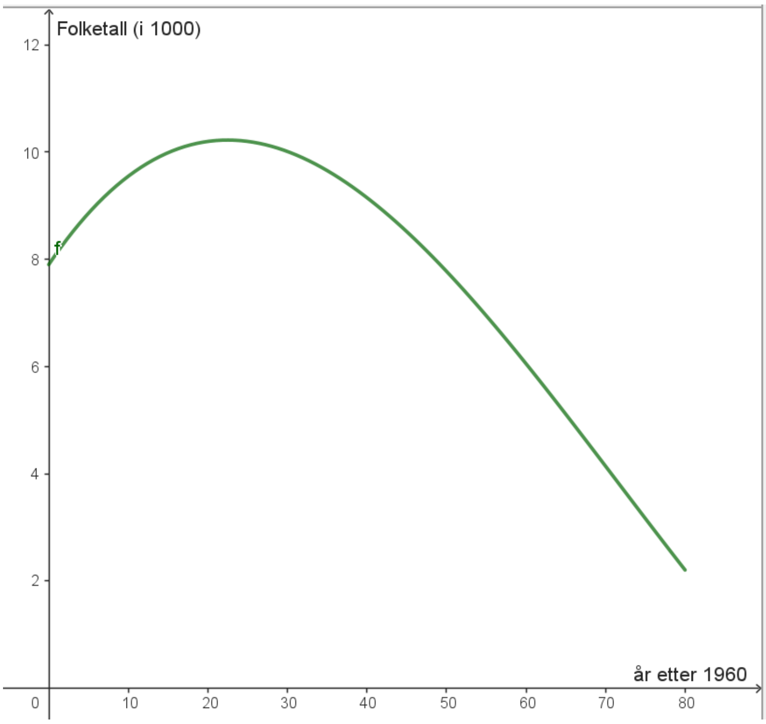
Oppgave 1 (2+2+2 p.)

a)
Finner høyeste folketall ved kommandoen 'Ekstremalpunkt', og ved å sette $f'(x) = 0$.

Høyeste folketall var 22.5 år etter 1960, altså i løpet av 1982, da var folketallet 120 710 personer.

CAS

1	F(x):=1 / 1000 (0.027x³ - 5.8x² + 220x + 7900) $\checkmark\ F(x) := \frac{1}{1000}\left(0.03\,x^3 - 5.8\,x^2 + 220\,x + 7900\right)$
2	f(x):=Funksjon(F(x), 0, 80) $\approx\ f(x) := \text{Dersom}\left(0 \le x \le 80,\ \frac{1}{1000}\left(\frac{27}{1000}\,x^3 - \frac{29}{5}\,x^2 + 220\,x + 7900\right)\right)$
3	Ekstremalpunkt(F) $\approx\ \{(22.5,\ 10.22), (120.71,\ -2.57)\}$
4	Løs(F'(x)=0) $\approx\ \{x = 22.5, x = 120.71\}$



b)
Stigningstallet til linjen gjennom $(30, F(30))$ og $(70, F(70))$ er $-0,1467$.

Det sier oss at den gjennomsnittlige veksten i perioden 1990 til 2030 i følge denne modellen kommer til å være -146700, altså en årlig nedgang.

5	(F(70)-F(30))/(70-30)
	$\approx\ -0.1467$

c) Folketallet vil i følge modellen synke raskest etter 71 år, altså i 2031, det synker da med 195300 personer pr. år.

6	d(x):=F'(x)
	$\rightarrow\ d(x) := \frac{81}{1000000} x^2 - \frac{29}{2500} x + \frac{11}{50}$
7	Ekstremalpunkt(d)
	$\approx\ \{(71.6049,\ -0.1953)\}$

Kommentarer fra sensorveiledningen:
a) 1 poeng for hver metode med riktig svar.
b) 1 poeng for riktig stigningstall.
1 poeng for en riktig praktisk tolkning av stigningstallet med riktig enhet.
c) En kandidat som velger en riktig strategi, men ikke kommer fram til riktig svar, kan få 1 poeng.

Oppgave 2 (3 p.)

Arealsetningen : $F = a \cdot b \cdot \sin(\angle(a,b))$

Finner $\angle BDA$, og bruker sinussetningen til å finne lengden til AB
F1 er arealet av $\triangle ABD$: $F1 = 17,21$

Bruker cosinussetningen til å finne $\angle CBD = 36,34°$
F2 er arealet av $\triangle BCD$: $F2 = 21,33$

Totalt areal blir da $F = 38,54$

CAS

1	180-125-35 → **20**
2	NLøs(x/sin(20°)=12/sin(125°)) → **{x = 5.01}**
3	F1:=1/2*5*12*sin(35°) ≈ **F1 := 17.21**
4	NLøs(8^2=6^2+12^2-2*6*12*cos(x°)) ≈ **{x = −36.34, x = 36.34}**
5	F2:=1/2*12*6*sin(36.34°) ≈ **F2 := 21.33**
6	F:=F1+F2 ≈ **F := 38.54**

Kommentarer fra sensorveiledningen:
En kandidat som gjør noen riktige beregninger, kan få 1 eller 2 poeng. Kandidaten kan for eksempel få 1 poeng for å bestemme lengden av en ukjent side, og 1 poeng for å bestemme en ukjent vinkel i $\triangle BCD$.

Oppgave 3 (2+3+2p.)

a)
Bruker excel og finner at summen av de 8 første linjestykkene er ca. 569,5.

	A
1	100
2	90
3	81
4	72,9
5	65,61
6	59,049
7	53,1441
8	47,82969
9	
10	569,53279

	A
1	100
2	=+A1*0,9
3	=+A2*0,9
4	=+A3*0,9
5	=+A4*0,9
6	=+A5*0,9
7	=+A6*0,9
8	=+A7*0,9
9	
10	=SUMMER(A1:A8)
11	

b)
Definerer startverdien start $= 100$
Definerer prosenten prosent $= 90\%$, fordi vi multipliserer med 0,9 for hver gang.
Setter lengden på linjen l=start, og total lengde L=0
Oppretter en teller a=0, og en max verdi for L max=900
Kjører en while-loop inntil $L >=$max,, a vil da være antall linjestykker for å få over 9 meter totalt.

```python
start = 100
prosent = 90
l = start
L = 0
a = 0
max = 900
while L < max :
    L = L + l
    l = l * prosent/100
    a = a+1

print(f'Det må være minst {a} linjestykker')
print(f' for at summen skal blir mer enn {max}')

```

c)

```python
start = 100
prosent = 90
l = start
L = 0
a = 0
max = 900
for a in range(100) :
    L = L + l
    l = l * prosent/100
print(L)
```

Sum av 50 linjer = 994,85
Sum av 100 linjer = 999,97
Endringen var 5.13
Dette er en økning på 0,51 %.

Eller vi kan bruke CAS:

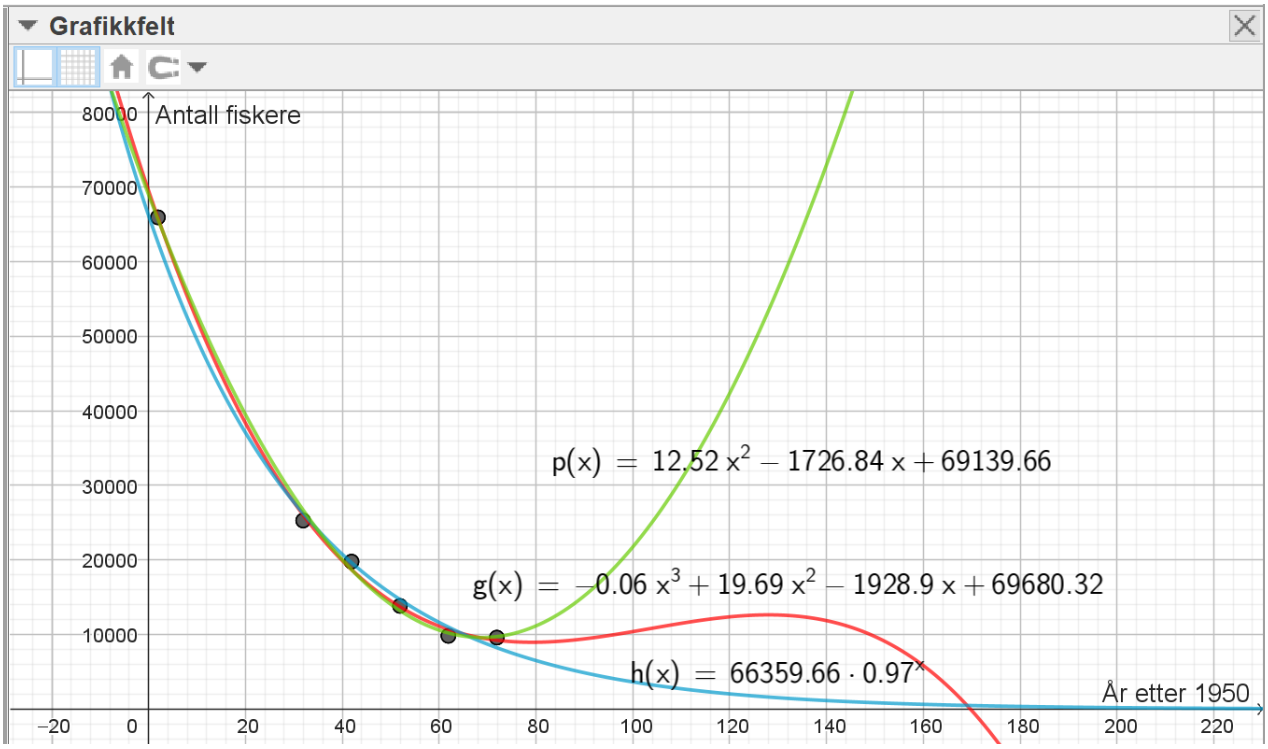
CAS	
1	a(x):=100*0.9^(x-1) $\rightarrow\ a(x) := 100 \left(\frac{9}{10}\right)^{x-1}$
2	Sum(a(x),x,1,50) $\approx\ 994.8462$
3	Sum(a(x),x,1,100) $\approx\ 999.9734$
4	999.9734386011-994.8462247927 $\approx\ 5.1272$
5	Løs(994.8462247927*x=5.1272138084) $\approx\ \{x = 0.0052\}$

Kommentarer fra sensorveiledningen:
a) En kandidat som gjør noen riktige beregninger, kan få 1 poeng.
b) Et delvis riktig program kan gi 1 poeng. En kandidat som svarer riktig på spørsmålet, og viser hvordan svaret framkommer, får 1 poeng for dette.
c) En kandidat som gjør noen riktige beregninger, kan få 1 poeng

Oppgave 4 (2+2p.)

a)
Bruker regresjonsanalyse i Geogebra på tallene i tabellen.

	A	B
1	2	65956
2	32	25289
3	42	19780
4	52	13841
5	62	9825
6	72	9591



Jeg har valgt 3 ulike modeller.

1. $p(x) = 12,5x^2 - 1726,8x + 69140$ (2.gradsfunksjon) : Denne passer bra med punktene, men stiger bratt rett etter 2022, og det er nok ikke realistisk at antall fiskere plutselig skal stige så raskt.

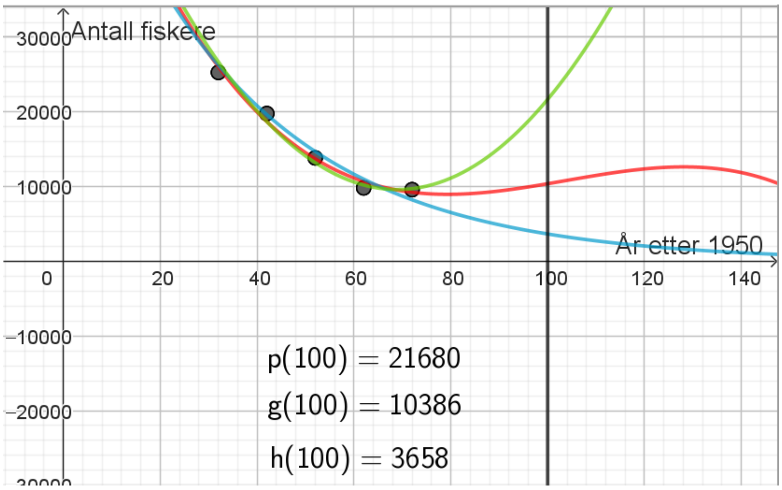
2. $g(x) = -0,06x^3 + 19,7x^2 - 1929x + 69680$ (3.gradsfunksjon) : Passer bra med punktene, flater ut ved 2022. Stiger litt etter definisjonsområdet, noe som faktisk kan skje.

3. $h(x) = 66360 \cdot 0,97^x$(eksponentiell funksjon) : Passer ganske bra med punktene, men flater ikke ut i 2022 og synker raskt mot null.

Jeg ville her ha valgt 3.gradsfunksjonen.

b)
Jeg anser det som mest realistisk at antall fiskere flater ut på rundt 10000, altså $g(x)$.

I følge 3.gradsmodellen i oppgave a) vil antall fiskere i 2050 være 10386.



> Kommentarer fra sensorveiledningen:
> a) En modell som passer dårlig med datamaterialet kan gi 1 poeng dersom valget av modell er argumentert for.
> For å få full uttelling må kandidaten sette $x = 0$ i 1950.
> b) Et riktig svar på spørsmålet kan gi 1 poeng. En vurdering av modellens gyldighetsområde kan gi 1 poeng.
> Oppgave a) og b) må sees under ett med tanke på argumentasjon for valg av modell og gyldighetsområde.

Oppgave 5 (2+2 p.)

a)

Vi kan finne denne avstanden på ulike måter:
1. CAS : Avstand(P,Q)=6
2. CAS: f(1)-g(1)=6

Avstanden fra P til Q er 6.

CAS

1	f(x):=2x+8 → $f(x) := 2x + 8$
2	g(x):=x^3-x^2-4x+8 → $g(x) := x^3 - x^2 - 4x + 8$
3	eq1: x = 1 → $eq1 : x = 1$
4	f(1)-g(1) → 6
5	Avstand(P, Q) → 6

b)

Lager en ny funksjon som er avstanden melllom $f(x)$ og $g(x)$.
Setter den deriverte lik null for å finne største (og minste) avstand mellom grafene. Største avstand finner vi når $x = \frac{1}{3}\left(\sqrt{19}+1\right)$
Da kan vi finne den største avstanden i denne x-verdien, $f(x) - g(x) = \frac{2}{27}\left(19\sqrt{19}+28\right)$.

6	h(x):=f(x)-g(x) → $h(x) := -x^3 + x^2 + 6x$
7	Løs(h'(x)=0) → $\left\{x = \frac{-\sqrt{19}+1}{3}, x = \frac{\sqrt{19}+1}{3}\right\}$
8	a:=(sqrt(19) + 1) / 3 → $a := \frac{1}{3}\left(\sqrt{19}+1\right)$
9	f(a)-g(a) → $\frac{2}{27}\left(19\sqrt{19}+28\right)$

> Kommentarer fra sensorveiledningen:
> a) En kandidat som velger en riktig strategi, men ikke kommer fram til riktig svar, kan få 1 poeng.
> b) En kandidat som velger en riktig strategi, men ikke kommer fram til riktig svar, kan få 1 poeng.

Oppgave 6 (3 p.)

Definerer funksjonen $f(x)$
Setter opp 3 uavhengige likninger - se linje 2-4
Løser dette som likningsett for å finne verdiene til a, b, og c.

$a = \frac{1}{5}$

$b = \frac{11}{5}$

$c = -\frac{16}{5}$

CAS

1	f(x):=a x^3+b x^2+c x-64 → $f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x - 64$
2	(f(5)-f(0))/(5-0)=64/5 ✓ $\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{64}{5}$
3	f(-8)=0 ✓ $f(-8) = 0$
4	f'(-8)=0 ✓ $f'(-8) = 0$
5	{$2, $3, $4} Løs: $\left\{\left\{a = \frac{1}{5}, b = \frac{11}{5}, c = \frac{-16}{5}\right\}\right\}$

Kommentarer fra sensorveiledningen:
I utgangspunktet kan kandidaten få 1 poeng for hver opplysning (punkt på graf, toppunkt, gjennomsnittlig vekstfart) som tolkes og brukes riktig. For å få full uttelling, må kandidaten i tillegg komme fram til riktig svar.

Oppgave 7 (2+2+2 p.)

a)
Areal av et rektangel er $A = g \cdot h$
Her er grunnlinjen 5 og høyden $f(5)$, da er arealet $A = \frac{8}{9}$.

1	f(x):=8/(x^2+20) $\rightarrow \; f(x) := \frac{8}{x^2+20}$
2	A1:=5*f(5) $\rightarrow \; \mathbf{A1} := \frac{8}{9}$

b)

Vi kan finne disse verdiene i CAS, da får vi eksakte vedier :

6	A(1) $\rightarrow \frac{8}{21}$
7	A(2) $\rightarrow \frac{2}{3}$
8	A(3) $\rightarrow \frac{24}{29}$
9	A(4) $\rightarrow \frac{8}{9}$
10	A(5) $\rightarrow \frac{8}{9}$
11	A(6) $\rightarrow \frac{6}{7}$
12	A(7) $\rightarrow \frac{56}{69}$
13	A(8) $\rightarrow \frac{16}{21}$
14	A(9) $\rightarrow \frac{72}{101}$
15	A(10) $\rightarrow \frac{2}{3}$

Vi kan bruke excel:

	A	B	C
1	x	f(x)	A=x*f(x)
2	1	0,38	0,38
3	2	0,33	0,67
4	3	0,28	0,83
5	4	0,22	0,89
6	5	0,18	0,89
7	6	0,14	0,86
8	7	0,12	0,81
9	8	0,10	0,76
10	9	0,08	0,71
11	10	0,07	0,67

	A	B	C
1	x	f(x)	A=x*f(x)
2	1	=8/(A2^2+20)	=A2*B2
3	2	=8/(A3^2+20)	=A3*B3
4	3	=8/(A4^2+20)	=A4*B4
5	4	=8/(A5^2+20)	=A5*B5
6	5	=8/(A6^2+20)	=A6*B6
7	6	=8/(A7^2+20)	=A7*B7
8	7	=8/(A8^2+20)	=A8*B8
9	8	=8/(A9^2+20)	=A9*B9
10	9	=8/(A10^2+20)	=A10*B10
11	10	=8/(A11^2+20)	=A11*B11

Vi kan bruke Python:

```python
def f(x):
    return(8/(x**2+20))

for i in range(1,11):
    print(f'A({i})={round(i*f(i),3)}')
```

Running: 1t-ex-23-h.py

```
A(1)=0.381
A(2)=0.667
A(3)=0.828
A(4)=0.889
A(5)=0.889
A(6)=0.857
A(7)=0.812
A(8)=0.762
A(9)=0.713
A(10)=0.667
>>>
```

c)
Finner et uttrykk for arealet - linje 3.
Arealet er størst når $x = 2\sqrt{5}$.
Da er arealet $A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3	A(x):=x*f(x) $\rightarrow \ \mathbf{A(x)} := 8 \cdot \frac{x}{x^2 + 20}$
4	Løs(A'(x)=0) $\rightarrow \ \left\{x = -2\sqrt{5}, x = 2\sqrt{5}\right\}$
5	Amax:=2 sqrt(5)*f(2 sqrt(5)) $\rightarrow \ \mathbf{Amax} := \frac{2}{5}\sqrt{5}$

Kommentarer fra sensorveiledningen:
a) En kandidat som velger en riktig strategi, men ikke kommer fram til riktig svar, kan få 1 poeng. b) Mindre systematiske og mangelfulle oversikter kan gi 1 poeng. c) En kandidat som velger en riktig strategi, men ikke kommer fram til riktig svar, kan få 1 poeng.

Veiledende karaktergrenser

Karakter	1	2	3	4	5	6
Poeng		9	18	27	35	43