Løsningsforslag 1T V23

Erling Olbekk

Mai 2023

Del 1

Oppgave 1

$$\begin{aligned}
&\sin u = \frac{8}{10} \\
&\cos u = \frac{6}{10} \\
&(\sin u)^2 + (\cos u)^2 = (\frac{8}{10})^2 + (\frac{6}{10})^2 \\
&(\sin u)^2 + (\cos u)^2 = \frac{64}{100} + \frac{36}{100} = \frac{100}{100} \\
&(\sin u)^2 + (\cos u)^2 = 1
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Grafen skjærer x-aksen når funksjonsverdien er null. Jeg ser at uttrykket kan faktoriseres med heltallsmetoden.$-4 + 2 = -2, (-4) \cdot 2 = -8$.

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$$

$\underline{\underline{\text{Grafen skjærer x-aksen i } x = 4 \text{ og } x = -2}}$

Oppgave 3

Jeg utfører polynomdivisjonen $x^3 - 5x^2 - 8x + 12 : (x-1)$ for å faktorisere uttrykket.

$$
\begin{aligned}
&x^3 - 5x^2 - 8x + 12 : (x-1) = x^2 - 4x - 12 \\
&-(x^3 - x^2) \\
&\quad -4x^2 - 8x + 12 \\
&\quad -(-4x^2 + 4x) \\
&\qquad -12x + 12 \\
&\qquad -12x + 12 \\
&\qquad 0
\end{aligned}
$$

Uttrykket kan altså faktoriseres til $(x^2 - 4x - 12)(x-1)$. Her bruker jeg igjen heltallsmetoden for å faktorisere uttrykket videre. Jeg ser at $-4 = -6 + 2$, og at $-12 = (-6) \cdot 2$.

$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = (x-1)(x-6)(x+2)$
$\underline{\underline{a = 2, b = 6 \vee a = -6, b = -2}}$

Oppgave 4

Jeg ser fra den vertikale asymptoten at $x - 1$ er en faktor i nevner, og fra nullpunktet i $x = 2$ ser jeg at $x - 2$ er en faktor i teller. Uttrykket er altså på formen $c \cdot \frac{x-2}{x-1}$, der c er en konstant.
For å finne konstanten c kan vi se på den horisontale asymptoten eller skjæringspunktet med y-aksen. Jeg velger å bruke asymptoten.

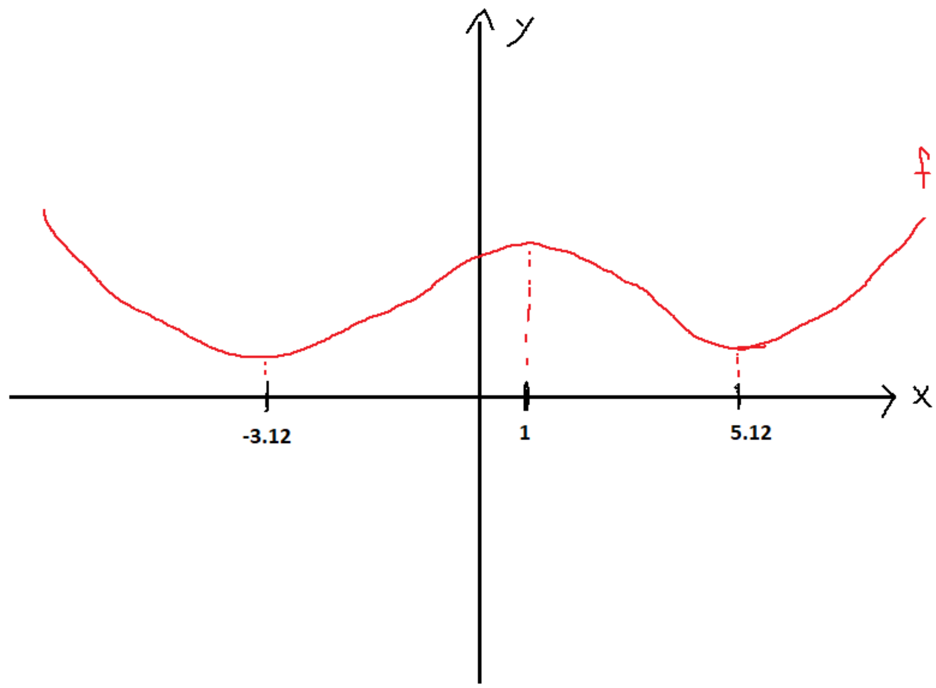
$$\lim_{x \to \infty} c \cdot \frac{x-2}{x-1} = c \cdot \frac{x}{x} = c$$

Når x blir veldig stor vil uttrykket tilnærme seg verdien c. Siden asymptoten $y = 3$ viser at funksjonen går mot 3 må $c = 3$.

$f(x) = 3 \cdot \dfrac{x-2}{x-1}$

Oppgave 5

Siden den deriverte starter som negativ må f være synkende frem til $x = 3.12$. Deretter stiger den til $x = 1$, og synker igjen frem til $x = 5.12$. Den vil altså ha tre ekstremalpunkter. Vi kan ikke vite noe om funksjonsverdier, så grafen kan forskyves opp eller ned og det vil fortsatt være en mulig skisse.



Del 2

Oppgave 1

Jeg løser hele oppgaven i CAS. Se vedlagt bilde i slutten av oppgaven.
a) Jeg definerer funksjonen og finner nullpunktene den har. To av dem er utenfor definisjonsmengden. Det er ikke umiddelbart tydelig i hvilke områder funksjonen er over null og i hvilke den er under, men grafen viser at det er i intervallet $[5.772, 8.906]$. Siden enheten er måneder regner jeg om til dager i linje 3 (jeg antar i snitt 30.5 dager i måneden).
<u>Gjennomsnittstemperaturen er over 0° i omtrent 96 døgn</u>

b) Se linje 4. Jeg regner ut stignignstallet direkte, og finner at det er 5.04. Den praktiske tolkningen av dette er den gjennomsnittlige økningen per måned av gjennomsnittstemperaturen i perioden 1. mars til 1. juli.

c) Jeg definerer $T'(x)$ som en ny funksjon, $f(x)$, og bruker denne til å finne når $T'(x) = 0$ og når $T''(x) = 0$ (Linje 5-7).
Nullpunktene til $T'(x)$ svarer til punktene $(2.76, -16.1)$ og $7.33, 4.50$ på grafen til T (Linje 6+8-9). Dette sier meg at den laveste gjennomsnittstemperaturen i perioden var $-16.1°$ Celsius, i rundt 22. februar, og den høyeste gjennomsnittstemperaturen i perioden var 4.5° Celsius rundt 10. juli.
Ekstremalpunktene til $T'(x)$(Linje 7) sier meg når temperaturen endret seg raskest. Linje 10-11 sier meg at den steg raskest rundt 20. april. Da økte gjennomsnittstemperaturen med omtrent 6.94° Celsius per måned, mens den sank raskest i slutten av september med omtrent 6.6° Celsius per måned.

1 $T(x) := 0.048\,x^4 - 1.4\,x^3 + 13.36\,x^2 - 45.8\,x + 35.2$

$\rightarrow\ T(x) := \frac{6}{125}x^4 - \frac{7}{5}x^3 + \frac{334}{25}x^2 - \frac{229}{5}x + \frac{176}{5}$

2 $T(x) = 0$

Løs: $\{x = 1.063, x = 5.772, x = 8.906, x = 13.426\}$

3 $(8.906 - 5.772) \cdot 30.5$

≈ 95.587

4 $\frac{T(7) - T(3)}{7 - 3}$

≈ 5.04

5 $f(x) := T'(x)$

$\approx f(x) := 0.192\,x^3 - 4.2\,x^2 + 26.72\,x - 45.8$

6 $f(x) = 0$

NLøs: $\{x = 2.761, x = 7.333, x = 11.781\}$

7 $f'(x) = 0$

NLøs: $\{x = 4.688, x = 9.895\}$

8 $T(2.761)$

≈ -16.086

9 $T(7.333)$

≈ 4.504

10 $f(4.688)$

≈ 6.94

11 $f(9.895)$

≈ -6.617

Oppgave 2

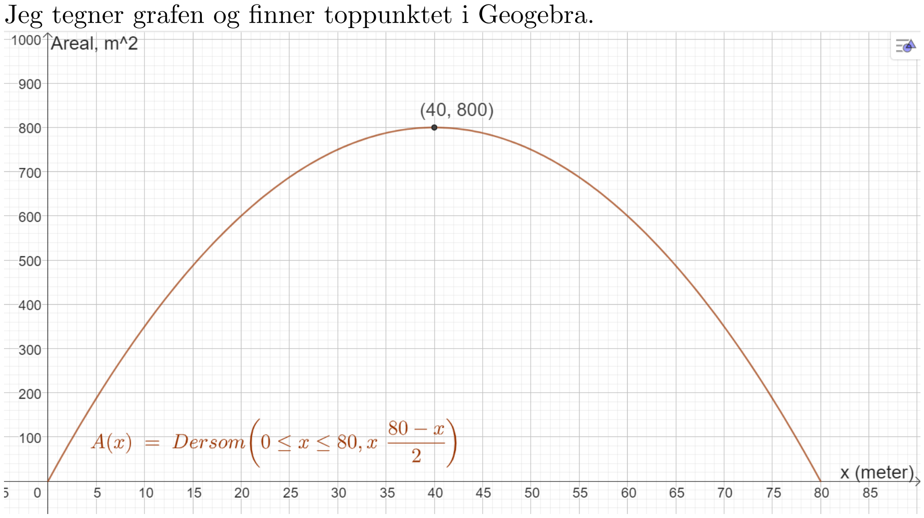
a) Hvis lengden er 60 meter er det kun 20 meter tau igjen. Bredden blir da halvparten av dette, 10 meter.
Arealet av området blir $600m^2$

b) jeg setter opp et regneark i Geogebra for å undersøke. Kolonne B regner ut bredden med formelen $(80 - Lengde)/2$, mens kolonne C multipliserer kolonnene A og B for å finne arealet.

2	Lengde	Bredde	Areal
3	10	35	350
4	20	30	600
5	30	25	750
6	40	20	800
7	50	15	750
8	60	10	600
9	70	5	350

Det ser ut som om arealet øker når lengden nærmer seg halvparten av tauets totale lengde. Da vil lengden være dobbelt så lang som bredden, slik Herman påstår.

c) Hvis vi kaller lengden x, vil bredden være gitt ved $(80 - x)/2$. Vi kan multiplisere disse for å finne en formel for arealet.
$A(x) = \frac{x(80-x)}{2}, x \in [0, 80]$
Jeg tegner grafen og finner toppunktet i Geogebra.



Påstanden stemmer, arealet er størst når lengden er 40 meter, og bredden er 20 meter.

Oppgave 3

Jeg bruker CAS for å løse, se vedlagt bilde.

1. $AC^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cos(75°)$

   $\approx \mathbf{AC^2 = 99.118}$

2. $99.118 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cos(ADC°)$

   NLøs: $\{\mathbf{ADC = -80.469, ADC = 80.469}\}$

3. $A1 := 0.5 \cdot 9 \cdot 6 \sin(80.469°)$

   $\rightarrow \mathbf{A1 := 27 \sin\left(\frac{8941}{20000} \pi\right)}$

4. $A2 := 0.5 \cdot 10 \cdot 5 \sin(75°)$

   $\rightarrow \mathbf{A2 := \frac{25}{4} \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}$

5. $A1 + A2$

   $\approx \mathbf{50.775}$

I linje 1 bruker jeg cosinussetningen på trekant ABC for å finne lengde AC (jeg trenger bare den kvadrerte avstanden). I linje 2 bruker jeg cosinussetningen igjen på trekant ACD for å finne vinkel ADC, jeg velger det positive alternativet.
I linje 3 regner jeg ut arealet til trekant ACD med arealsetningen, det kan jeg gjøre hvis jeg kan to sider i en trekant og vinkelen mellom dem.
I linje 4 regner jeg ut arealet av trekant ABC på samme måte.
I linje 5 finner jeg det totale arealet.
Arealet av figuren er omtrent 50.775

Oppgave 4

a) Bredden av hvert rektangel er 1. Det holder derfor å summere høyden av rektanglene. Se linje 2 og 3 for svar.

1 $f(x) := \frac{1}{9}\,(x+1)\,(x-6)^2$

$\rightarrow\ f(x) := \frac{1}{9}\,(x+1)\,(x-6)^2$

2 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

$\rightarrow\ \frac{196}{9}$

3 $\frac{196}{9}$

$\approx\ 21.778$

b) + c)

```python
def f(x):
    return 1/9 * (x+1)*(x-6)**2   # Definerer funksjonen f

x_min = 0   # Minste x-verdi
x_maks = 6  # Største x-verdi

n = 6000       # Antall rektangler

bredde = (x_maks-x_min)/n   #Bredden av hvert rektangel
Arealsum = 0                #Variabel for å lagre areal
# Løkken vil regne ut arealet av rektanglene. Etterhvert som n øker vil
# i*bredde bevege seg bortover på x-aksen.
for i in range(n):
    Arealsum += f(x_min + i*bredde)*bredde

print(Arealsum)
```

<u>Med 6000 rektangler blir arealet omtrent 20.002</u>

Oppgave 5

De tre trekantene ABS, SBA, og SCA er alle likebente. Vi kan bruke dette til å avgjøre flere vinkler i figuren.
$\angle BAS = 30°$
$\angle ASB = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ (Vinkelsum i $\triangle ABS$)
$\angle CSA = 360° - 120° - 90° = 150°$ (En hel sirkel er $360°$)
Siden vi nå kan alle relevant vinkler vil jeg bruke sinussetningen på de tre trekantene for å lage et uttrykk for arealene deres.
$\triangle ASC = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 150°$
$\triangle ABS = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 120°$
$\triangle SBC = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r$

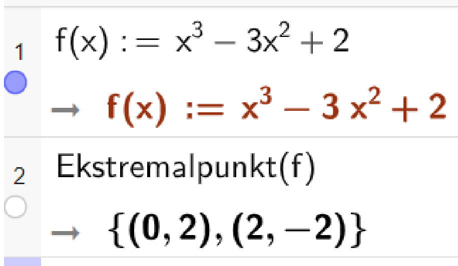
Summen av disse er lik arealet av $\triangle ABC$. jeg løser i CAS.

1	$ASC := \frac{1}{2} r^2 \sin(150°)$ $\rightarrow$ $\mathbf{ASC := \frac{1}{4} r^2}$
2	$ABS := \frac{1}{2} r^2 \sin(120°)$ $\rightarrow$ $\mathbf{ABS := \frac{1}{4} \sqrt{3}\, r^2}$
3	$SBC := \frac{1}{2} r^2$ $\rightarrow$ $\mathbf{SBC := \frac{1}{2} r^2}$
4	$ASC + ABS + SBC = 2\sqrt{3} + 6$ Løs: $\mathbf{\{r = -2\sqrt{2}, r = 2\sqrt{2}\}}$

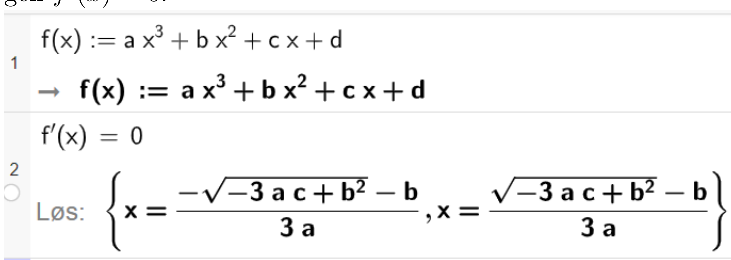
$\underline{\underline{r = 2\sqrt{2}}}$

Oppgave 6

a) Jeg løser oppgaven i CAS. Siden tredjegradsleddet er positivt er (0,2) et toppunkt og (2,-2) et bunnpunkt.



b) Jeg lager uttrykket til en generell tredjegradsfunksjon i CAS, og løser likningen $f'(x) = 0$.



Vi ser at de to ekstremalpunktene har x-koordinater

$$x = \frac{-\sqrt{-3ac + b^2} - b}{3a} \text{ og } x = \frac{\sqrt{-3ac + b^2} - b}{3a}.$$

I tilfellet hvor det ikke er et førstegradsledd vil $c = 0$. Hvis vi setter inn det i koordinatene kan vi oppdatere dem litt.

$$x = \frac{-\sqrt{b^2} - b}{3a} \text{ og } x = \frac{\sqrt{b^2} - b}{3a}.$$

Hvis $b > 0$ vil det siste av disse bli null, og hvis $b < 0$ vil det første av disse bli null. Det finnes altså et ekstremalpunkt på y-aksen hvis det ikke er førstegradsledd så lengde $b \neq 0$.
I tilfellet hvor $b = 0$ vil disse to punktene sammenfalle, og vi får et terrassepunkt.

Tryms regel ser derfor ut til å stemme, men det er kun hvis funksjonen i tillegg har et annengradsledd. Hvis den ikke har noen av delene har den et terrassepunkt på y-aksen.