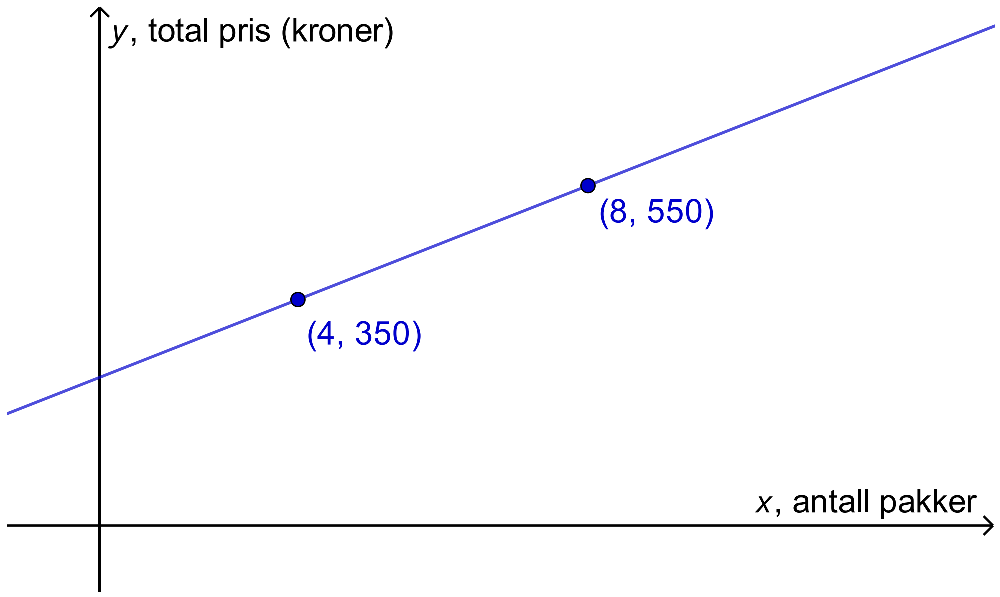
Funksjoner

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng) (VÅR 2019)

Et budfirma henter små pakker hos forretninger. Pakkene kjøres ut til kunder.

Den totale prisen en forretning må betale for å få kjørt ut x pakker, er gitt ved en lineær sammenheng $y = ax + b$. Grafen nedenfor illustrerer denne sammenhengen.



a) Bestem tallene a og b.

Vi vet at stigningstallet til linja a er den gjennomsnittlige veksten og bruker de to punktene:

$$a = \frac{550-350}{8-4} = \frac{200}{4} = \underline{\underline{50}}$$

Deretter kan jeg regne ut konstantleddet b:

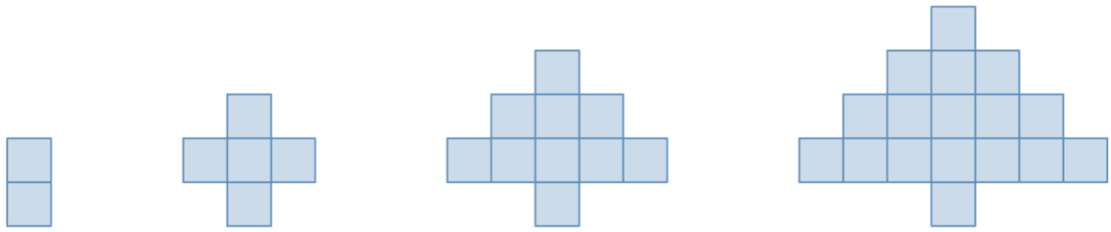
$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ 350 &= 50 \cdot 4 + b \\ 350 - 200 &= b \\ b &= \underline{\underline{150}} \end{aligned}$$

b) Gi en praktisk tolkning av tallene a og b i denne oppgaven.

Stigningstallet a forteller hvor mye det koster for hver pakke som firmaet skal hente og levere.

Konstantleddet b er en fastpris som kunden må betale for hver tur.

Oppgave 2 (6 poeng) **(VÅR 2019)**



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

Ovenfor ser du fire figurer. Figurene er satt sammen av små, blå kvadrater. Rikke vil fortsette å lage figurer etter samme mønster. Hun har sett på differansen mellom antall små, blå kvadrater i to etterfølgende figurer og begynt å fylle ut tabellen nedenfor.

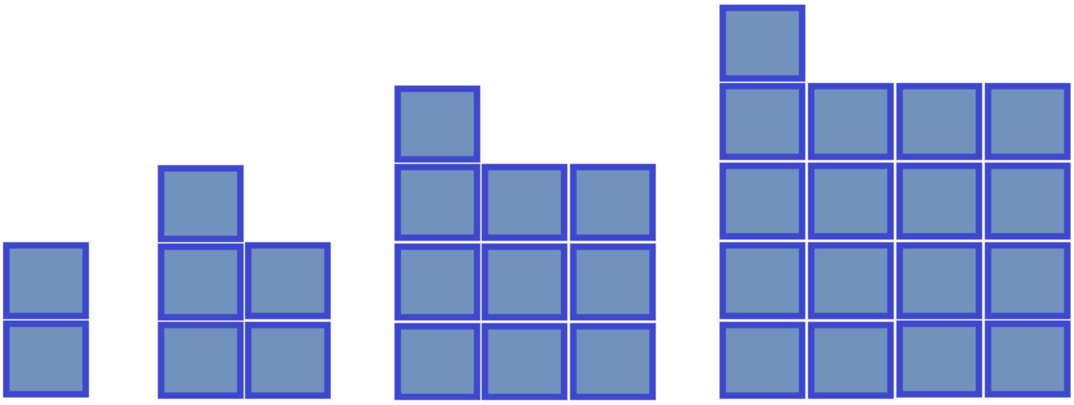
Figur nummer	1	2	3	4	5	6	7	8
Antall kvadrater	2	5	10					
Differanse		3	5	7				

a) Skriv av tabellen ovenfor, og fyll inn tallene som mangler.

Figur nummer	1	2	3	4	5	6	7	8
Antall kvadrater	2	5	10	17	26	37	50	65
Differanse		3	5	7	9	11	13	15

Rikke påstår at antall små blå kvadrater i figur n er n^2+1.

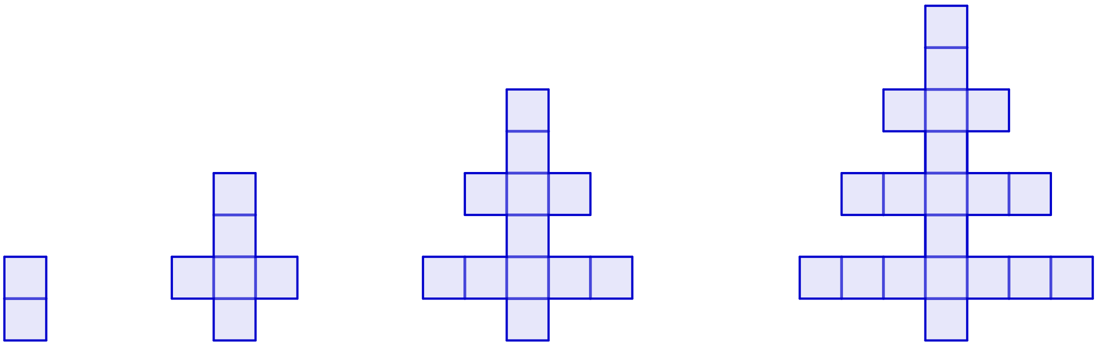
b) Vis at påstanden stemmer for figur 2, figur 3 og figur 4 ved å lage nye tegninger, en for hver figur, der du plasserer de små, blå kvadratene på en annen måte.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

Figurene er satt sammen av et kvadrat med et lite, blått kvadrat i tillegg. Antall kvadrater stemmer med figurene i oppgave a).

Olav arbeider med figurene nedenfor. De er satt sammen av små, blå kvadrater. Han vil fortsette å lage figurer etter dette mønsteret.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

c) Bestem et uttrykk for antall små, blå kvadrater i figur n uttrykt ved n.

$$\text{figur } 1 = 1\cdot 1+1 = 1^2+1 = 2$$
$$\text{figur } 2 = 2\cdot 2+2 = 2^2+2 = 6$$
$$\text{figur } 3 = 3\cdot 3+3 = 3^2+3 = 12$$
$$\text{figur } 4 = 4\cdot 4+4 = 4^2+4 = 20$$
$$\ldots$$
$$\text{figur } n = n\cdot n+n = \underline{\underline{n^2+n}}$$

Oppgave 3 (5 poeng) **(HØST 2018)**

Anne trener på en tredemølle. I en treningsøkt løp hun til sammen 10 km. Hun startet med å løpe 3 km med en fart på 10 km/h. Så løp hun 7 km med en fart på 12 km/h.

a) Forklar at Anne bruker 6 minutter på hver kilometer når farten er 10 km/h.

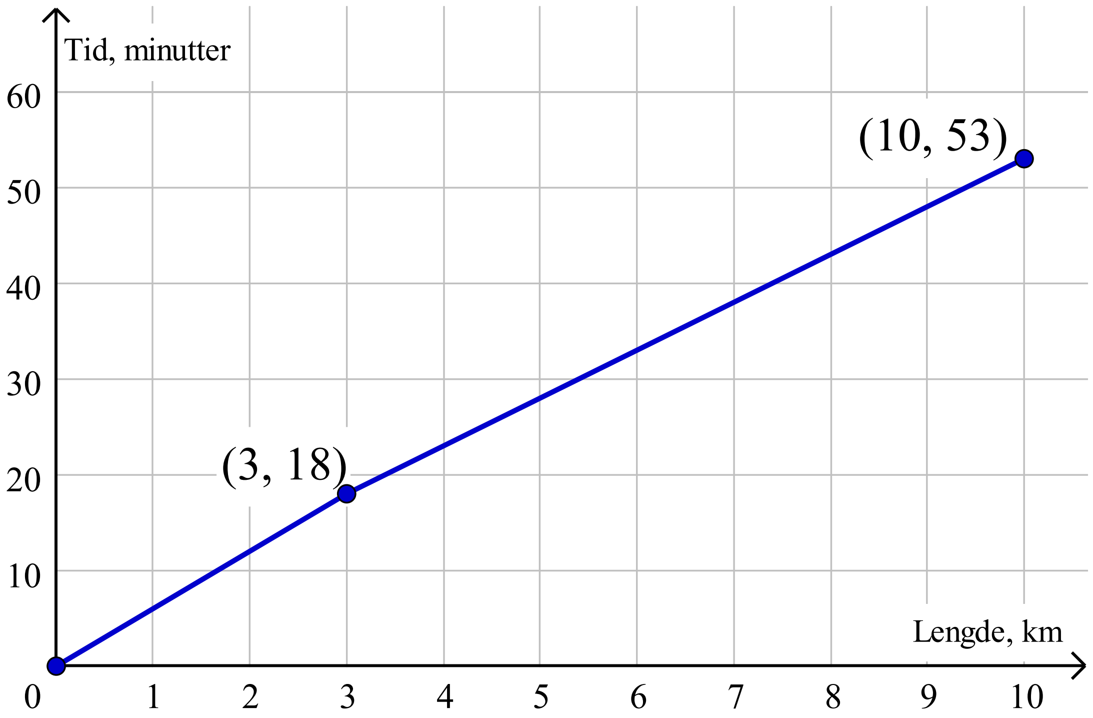
Når farten er 10 km/h, løper Anne 10 km på 60 minutter. 60 minutter/10 kilometer = 6 minutter per kilometer

b) Hvor mange minutter bruker Anne på hver kilometer når farten er 12 km/h?

Når farten er 12 km/h, løper Anne 12 km på 60 minutter. 60 minutter/12 kilometer = 5 minutter per kilometer

c) Lag et koordinatsystem med strekning i kilometer langs x-aksen og tid i minutter langs y-aksen. Lag en grafisk framstilling som illustrerer løpeturen til Anne i dette koordinatsystemet.

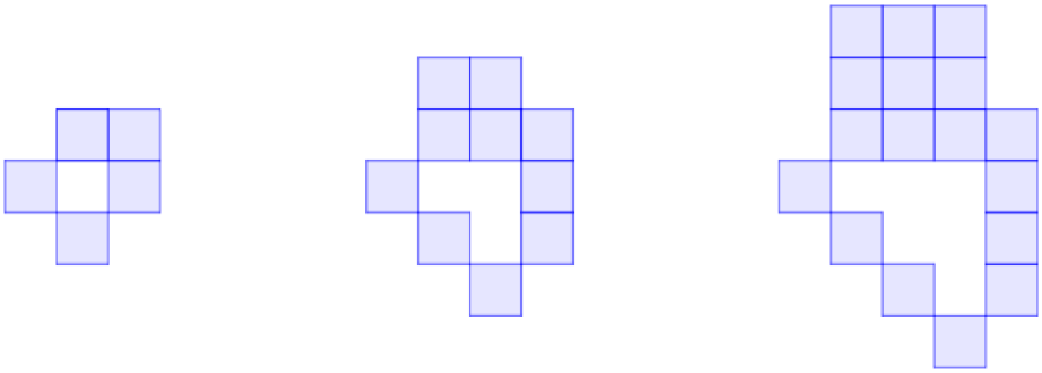
3 kilometer med farten 6 minutter/kilometer blir 18 minutter. Tegner punkt (3, 18). 7 kilometer med farten 5 minutter per kilometer blir 35 minutter. Tegner punktet (10, 53), siden 18 minutter + 35 minutter er 53.



d) Hvor mange minutter brukte Anne i gjennomsnitt på hver kilometer hun løp?

Anne løp 10 kilometer, og hun brukte til sammen 53 minutter. 53 minutter/10 kilometer = 5,3 minutter per kilometer.

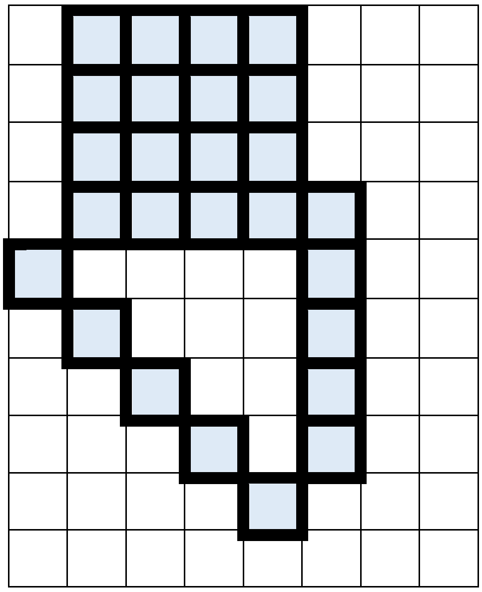
Oppgave 4 (5 poeng) (HØST 2018)



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Ovenfor ser du tre figurer. Figurene er satt sammen av små, blå kvadrater. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

a) Tegn figur 4.



b) Hvor mange små, blå kvadrater vil det være i figur 5?

Figur 5 vil ha 25 + 6 + 6 = 37 små, blå kvadrater.

c) Bestem et uttrykk for antall små, blå kvadrater i figur *n* uttrykt ved *n*.

Vi tenker oss at figuren består av et kvadrat og to rekker. Kvadratet har sidekant lik tallet *n* slik at antallet små kvadrater (ruter) blir n^2. De to rekkene har én mer rute enn tallet *n*. Antallet ruter F_n blir:

$$F_n = n^2 + 2\cdot(n+1) = \underline{\underline{n^2 + 2n + 2}}$$

d) Hvor mange små, blå kvadrater vil det være i figur 100?

$$F_{100} = 100^2 + 2\cdot 100 + 2 = 10000 + 202 = 10202$$

Oppgave 5 (6 poeng) **(VÅR 2018)**

En dyrebestand består i dag av 12 000 dyr. En gruppe forskere antar at bestanden vil avta lineært, og at det vil være 6000 dyr igjen om 10 år.

a) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom antakelsen er riktig.
Vi har at dyrebestanden avtar lineært med 6000 dyr i løpet av 10 år. Det vil si at dyrebestanden avtar med 600 dyr per år. I dag er det 12 000 dyr. Vi kan da sette opp en lineær modell
$f(x) = 12\,000 - 600x$, der f viser dyrebestanden etter x antall år.

En annen gruppe forskere antar at bestanden vil avta eksponentielt, og at det vil være 11 400 dyr igjen om ett år.

b) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom denne antakelsen er riktig.
Vi finner først ut hvor mange prosent dyrebestanden vil avta hvert år etter denne modellen.
Om ett år er det 11400 dyr igjen, setter opplysningene inn i:

$$ny\ verdi = gammel\ verdi \cdot vekstfaktor$$

$$11400 = 12000 \cdot x$$

$$x = \frac{11400}{12000} = \frac{114}{120} = 0.95$$

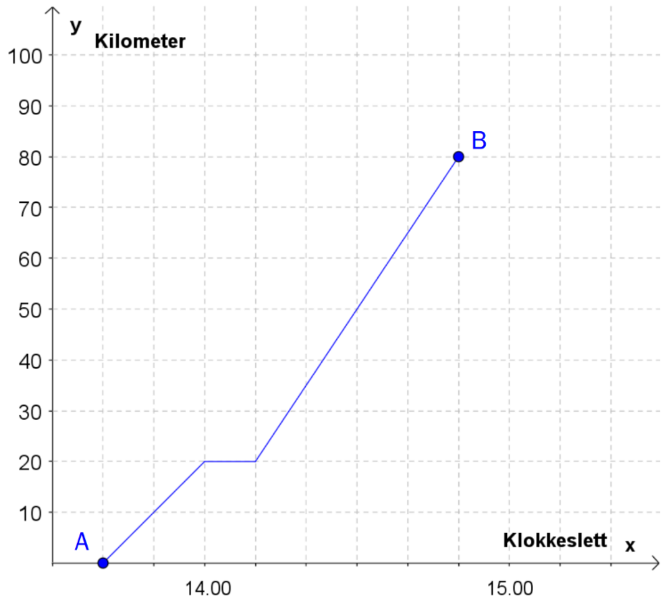
En nedgang på 5 % gir en vekstfaktor på 0,95. Vi kan da sette opp eksponentiell modell:

$$ny\ verdi = gammel\ verdi \cdot vekstfaktor\text{^}antall\ år$$

$g(x) = 12000 \cdot 0{,}95^x$, der g viser dyrebestanden etter x antall år

c) Ifølge hvilken av de to modellene ovenfor vil det være færrest dyr igjen i bestanden om 10 år?
Vi vet at den lineære modellen antar en nedgang på 600 dyr per år. Den eksponentielle avtar med 600 dyr første år. Det neste året vil dyrebestanden avta med 5 % av 11 400, som vil være lavere enn 600. Det betyr at dyrebestanden vil avta med færre og færre dyr for hvert år som går etter den eksponentielle modellen. Etter den lineære modellen synker dyrebestanden med det samme antallet hvert år. Etter 10 år vil det derfor være færrest dyr igjen med den lineære modellen.

Oppgave 6 (3 poeng) (HØST 2017)



Et tog kjørte fra by A til by B. Se diagrammet ovenfor.

a) Bestem reisetiden mellom de to byene.

I punkt A er tiden 13:40 og i punkt B er tiden 14:50, reisetiden mellom byene er altså 1 time og 10 minutter.

b) Beskriv hva som skjer 20 km fra by A.

20 km fra by A er toget i samme posisjon i 10 minutter, siden *y*-koordinaten ikke endres her (fra $x = 14.00$ til $x = 14.10$) . Det betyr at toget står i ro disse 10 minuttene.

c) Bestem farten til toget når det er 10 km fra by A, og når det er 10 km fra by B.
Du skal gi svarene i km/h.

Farten til toget er lik stigningstallet til de rette linjene. Ser på linja som starter i *A* at toget bruker 20 min på 20 km. Farten 10 km fra by A blir altså 20 km/20 min=1 km/min=60 km/h.
Ser på linja som ender i punkt B, at toget her går 60 km på 40 min. Farten 10 km fra by B blir da 60 km/40 min=1,5 km/min=60*1.5 km/h=90 km/h.

Oppgave 7 (5 poeng) **(HØST 2017)**

I en butikk kan kundene kjøpe armbånd og charms (små figurer) til å feste på armbåndene. Butikken selger alle charms til samme pris.

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall charms en kunde setter på et armbånd, og prisen kunden må betale for armbåndet med charms.

Antall charms	3	7
Pris for armbånd med charms (kroner)	1350	2450

a) Hvor mye koster armbåndet, og hvor mye koster hver charm?

Fra tabellen ser vi at prisen øker med $2450 - 1350 = 1100$ når vi legger til fire charms. Det vil si at det øker med: $\frac{1100}{4} = 275$ kroner per charm vi legger til.

Prisen for en charm er 275 kroner.

Prisen for armbåndet finner vi da ved å trekke fra 3 charm fra 1350 kroner: $1350 - 3 * 275 = 1350 - 825 = 525$.

Armbåndet koster 525 kroner.

b) Bestem en lineær modell som viser sammenhengen mellom antall charms på armbåndet og samlet pris for armbånd med charms.

Samlet pris y blir da prisen for armbåndet pluss prisen per charm multiplisert med antall charm x. Den lineære modellen blir:

$$\underline{\underline{y = 525 + 275x}}$$

Hanne betaler 3825 kroner for et armbånd med charms.

c) Hvor mange charms har hun på armbåndet?

Det betyr at $y = 3825$. Da må vi løse denne likningen:

$$525 + 275x = 3825$$
$$275x = 3825 - 525$$
$$\frac{275x}{275} = \frac{3300}{275}$$
$$\underline{x = 12}$$

$$\begin{array}{l} 3300 : 275 = \underline{\underline{12}} \\ \underline{-275} \\ 550 \\ \underline{-550} \\ 0 \end{array}$$

(Eller tenke at du trekker fra prisen på armbåndet og deler på prisen per charm for å finne antall).

Hun har 12 charms på armbåndet.

Oppgave 8 (3 poeng) **(VÅR 2017)**

I 2017 er verdien av en leilighet 1 200 000 kroner.

Per antar at verdien vil stige med 80 000 kroner hvert år.

a) Sett opp en modell som viser verdien $f(x)$ av leiligheten *x* år etter 2017 dersom det går slik Per antar.

Verdi etter *x* år = verdi i 2017 + 80 000 · antall år *x*

$$\underline{\underline{f(x) = 1\,200\,000 + 80\,000x}}$$

Kari antar at verdien vil stige med 8 % hvert år.

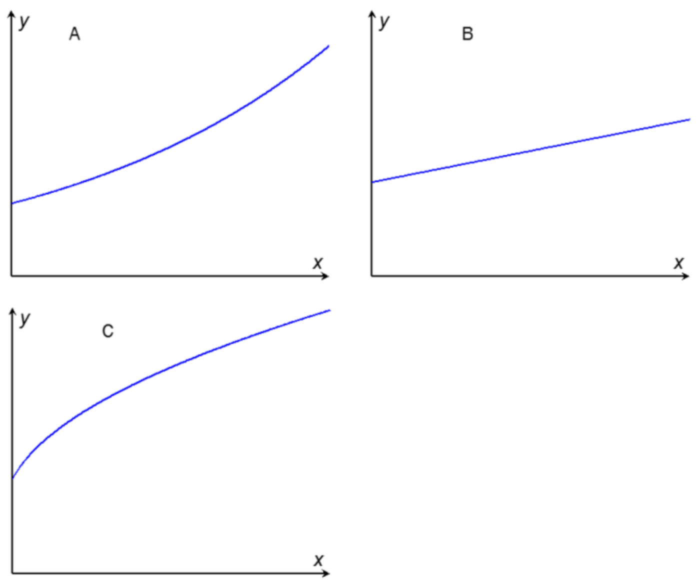
b) Sett opp en modell som viser verdien $g(x)$ av leiligheten *x* år etter 2017 dersom det går slik Kari antar.

Vekstfaktor: $1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$

$$Ny\ verdi = gammel\ verdi \cdot vekstfaktor\text{^}antall\ år$$

$$\underline{\underline{g(x) = 1\,200\,000 \cdot 1{,}08^x}}$$

c) Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til *f*?
Hvilken av grafene nedenfor kan være grafen til *g*?
Begrunn svarene dine.



f er en lineær funksjon, og grafen må være en rett linje. Da er B riktig alternativ.
g er en eksponentielt voksende funksjon. Da må A være riktig alternativ.

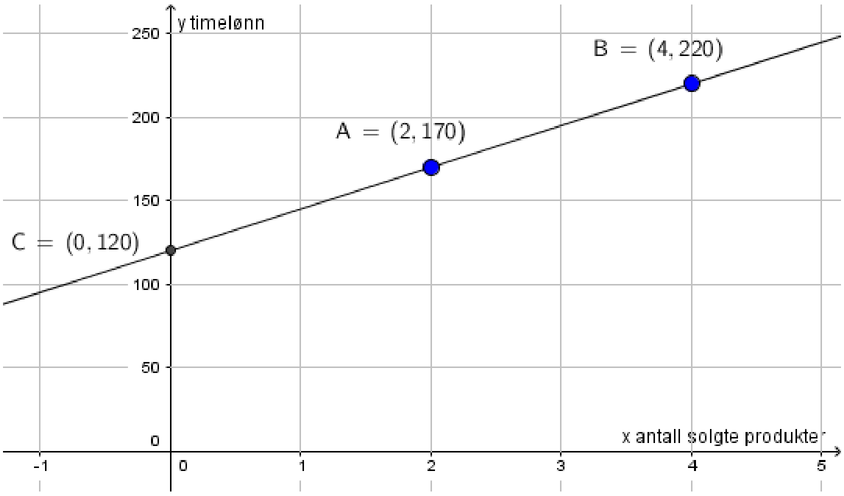
Oppgave 9 (4 poeng) **(VÅR 2016)**

Marte er telefornselger. Hun har fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner.
Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

a) Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.

Vi setter antall solgte produkter lik x og timelønnen som y. Så markerer vi de to punktene (2,170) og (4,220) i et koordinatsystem og trekker en linje gjennom punktene.



b) Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.

Vi finner skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen, se figur i a) for å finne fast timelønn.
Martes faste timelønn er 120 kr.

Stigningstallet til grafen er beløpet hun får per produkt hun selger $\frac{170-120}{2}\text{ kr} = 25\text{ kr}$

Marte tjener 25 kroner på hvert produkt hun selger.

c) Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?

Løser likningen

$$370 = 120 + 25x$$
$$25x = 250$$
$$x = 10$$

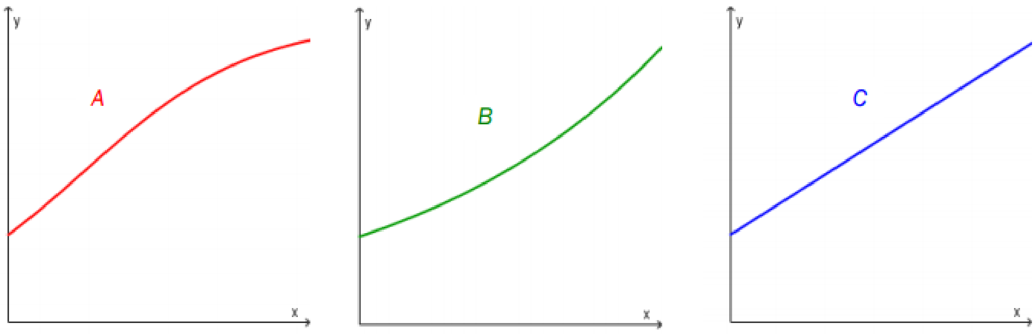
Marte må selge 10 produkter på en time for å oppnå en timelønn på 370 kr.

Oppgave 10 (2 poeng) **(VÅR 2016)**

a) Forklar hva det vil si at en størrelse øker eksponentielt.

Eksponentiell vekst betyr at vi har prosentvis endring over flere perioder av samme lengde, for eksempel over flere år.

b) Nedenfor ser du tre ulike grafer. Hvilken eller hvilke av disse grafene illustrerer eksponentiell vekst? Begrunn svaret ditt.



Graf A viser en vekst som avtar over tid, graf C viser en lineær vekst, mens graf B viser en graf som har jevn prosentvis vekst.

Oppgave 11 (2 poeng) **(HØST 2015)**

For 10 år siden vant Lea i Lotto. Hun opprettet en konto i banken og satte inn hele gevinsten. Beløpet har stått urørt på kontoen siden. Renten har hele tiden vært
3,2 % per år.

I dag har Lea 500 138 kroner på kontoen.

Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å regne ut hvor stor gevinsten til Lea var.

Vekstfaktoren er 1,032. Vi får uttrykket:

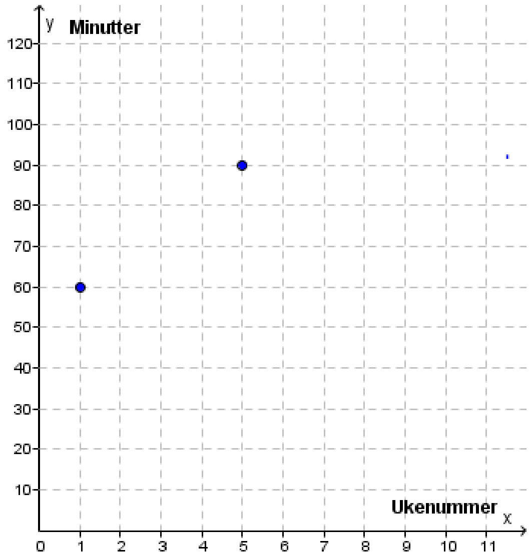
$$ny\ verdi = gammel\ verdi \cdot vekstfaktor\hat{}antall\ år$$

$$500138 = gevinst \cdot 1{,}032^{10}$$

$$gevinst = \frac{500138}{1{,}032^{10}}$$

Oppgave 12 (3 poeng) **(HØST 2015)**

I koordinatsystemet til høyre har Liv markert hvor mange minutter hun trente i uke 1 og i uke 5. Liv har som mål at antall minutter hun trener, skal øke lineært for hver uke.



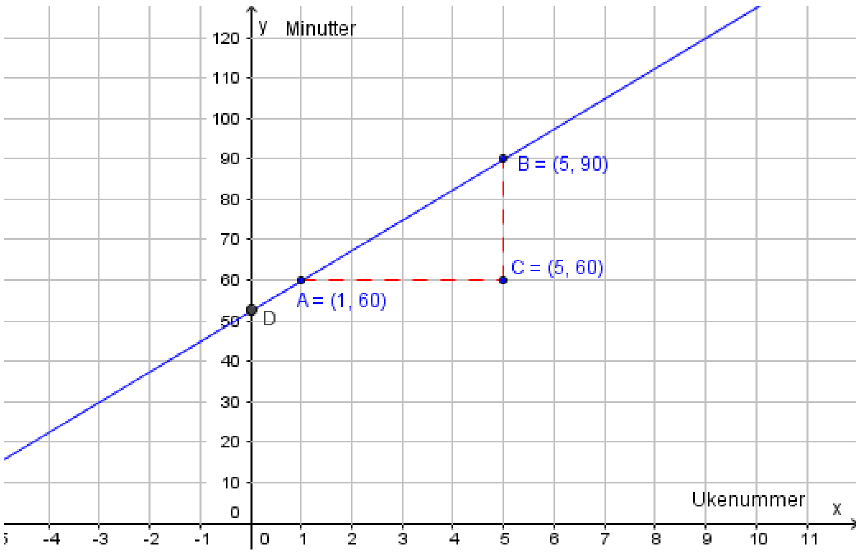
a) Bestem en modell som Liv kan bruke for å regne ut hvor mange minutter hun må trene hver uke framover for å nå dette målet.

Jeg tegner av figuren og drar en rett linje gjennom punktene.

Jeg finner stigningstallet ved å ta endring i y-retning delt på endring i x-retning:

$$a = \frac{90-60}{5-1} = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

Konstantleddet er der linja skjærer y-aksen. Siden stigningstallet er 7,5 kan jeg gå ett steg tilbake fra punkt Aog finner at b er $60 - 7{,}5 = 52{,}5$.



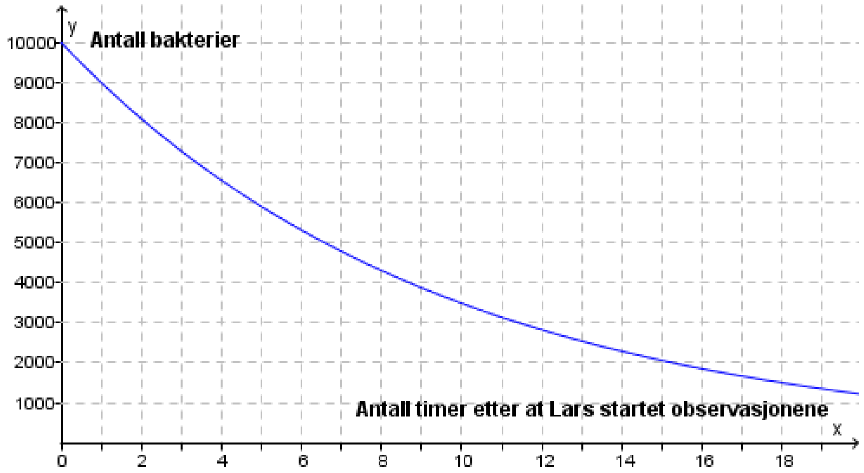
Modellen blir *f*(x) = 7,5x + 52,5, der *f* er antall minutter hun må trene, og *x* er uke nr.

b) Hvor mange minutter må hun trene i uke 40 ifølge denne modellen?

$f(40) = 7{,}5 \cdot 40 + 52{,}5 = 300 + 52{,}5 = 352{,}5$

Liv må trene i 352,5 minutter i uke 40 ifølge denne modellen.

Oppgave 13 (3 poeng) (HØST 2015)



Lars observerer en bakteriekultur. Fra han startet observasjonene, har antall bakterier avtatt eksponentielt. Se grafen til funksjonen *B* ovenfor.

Bestem vekstfaktoren og sett opp utrykket for *B*(*x*).

Vi ser at antall bakterier starter med 10 000. Den første timen avtar antallet fra 10 000 til 9 000 og jeg bruker dette til å finne vekstfaktor:

$$Ny\ verdi = gammel\ verdi \cdot vekstfaktor^{antall\ timer}$$

$$9000 = 10000 \cdot x^1$$

$$x = 9000/10000 = 0.90$$

Da blir uttrykket $B(x) = 10000 \cdot 0.90^x$.

Oppgave 14 (4 poeng) (VÅR 2015)

Antall elever ved en skole har avtatt lineært de siste 10 årene. For 10 år siden var det

1 400 elever ved skolen. Nå er det 1 340 elever ved skolen.

a) Bestem en modell som viser utviklingen disse 10 årene.

En lineær modell er på formen $y = ax + b$, der *a* er stigningstallet og *b* er konstantleddet.
I dette tilfellet er konstantleddet 1400, dersom vi lar *x* = 0 i dette tidspunktet.

$$a = \frac{1340 - 1400}{10} = -\frac{60}{10} = -6$$

En lineær modell som viser utviklingen disse 10 årene er *f(x)* = -6x + 1400.

De neste årene regner en med at antall elever vil avta med 0,5 % per år.

b) Bestem en modell som viser hvor mange elever det vil være ved skolen om x år.

Vi får en eksponentiell funksjon på formen $y = a \cdot b^x$, der a er antall elever ved $x = 0$, som i dette tilfellet er 1340. b er vekstfaktoren, som her er 0,995.

En modell som viser hvor mange elever det vil være ved skolen om x år er $f(x) = 1340 \cdot 0{,}995^x$.

Oppgave 15 (6 poeng) (VÅR 2015)

Karl står på balkongen og kaster en ball opp i lufta. Etter t sekunder er ballen tilnærmet h(t) meter over bakken, der

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 15$$

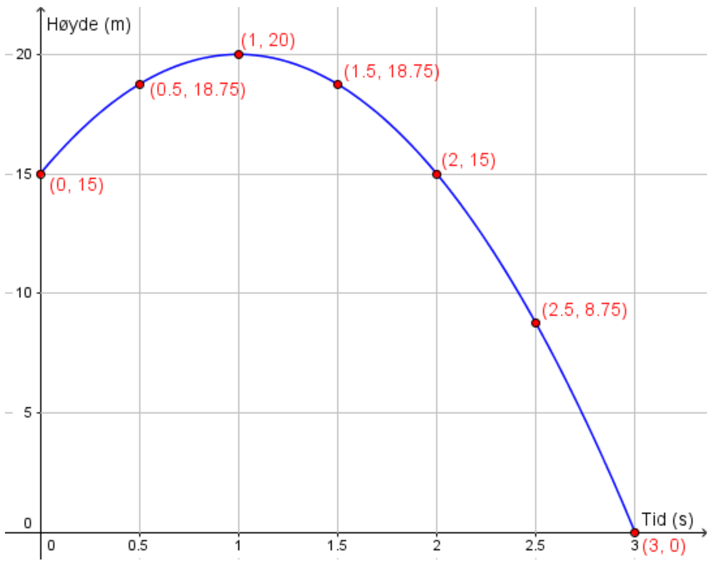
a) Fyll ut tabellen nedenfor

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$h(t)$	15	18,75	20	18,75	15	8,75	0

Beregninger:

$$h(0) = -5 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + 15 = 15$$
$$h(0{,}5) = -5 \cdot 0{,}5^2 + 10 \cdot 0{,}5 + 15 = -1{,}25 + 5 + 15 = 18{,}75$$
$$h(1) = -5 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 15 = -5 + 10 + 15 = 20$$
$$h(1{,}5) = -5 \cdot 1{,}5^2 + 10 \cdot 1{,}5 + 15 = -11{,}25 + 15 + 15 = 18{,}75$$
$$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 15 = -20 + 20 + 15 = 15$$
$$h(2{,}5) = -5 \cdot 2{,}5^2 + 10 \cdot 2{,}5 + 15 = -31{,}25 + 25 + 15 = 8{,}75$$
$$h(3) = -5 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 15 = -45 + 30 + 15 = 0$$

b) Tegn grafen til h.



c) Gi en praktisk tolkning av verdiene av $h(0)$ og $h(3)$.

$h(0) = 15$ forteller oss at steinen var 15 meter over bakken da den ble kastet.

$h(3) = 0$ forteller oss at steinen treffer bakken etter tre sekunder.

Oppgave 16 (3 poeng) **(VÅR 2015)**

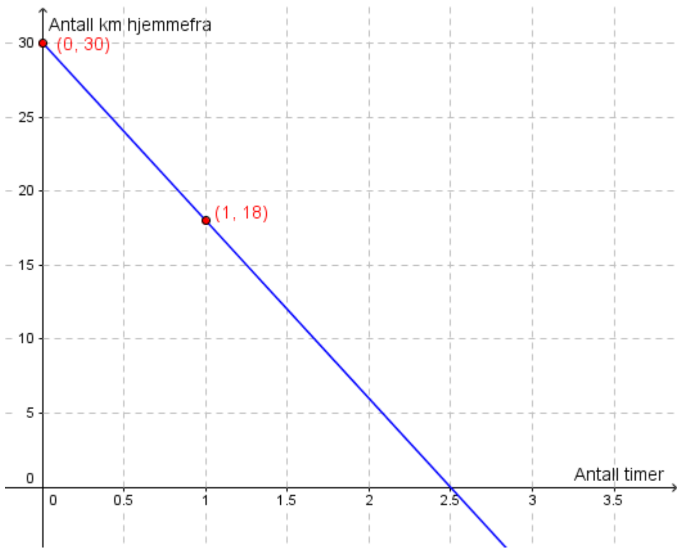
Sigurd er 30 km fra hjemmet sitt. Han sykler hjemover med en konstant fart på 12 km/h.

Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom antall timer og antall kilometer han er hjemmefra.

Hvor lang tid tar det før han kommer hjem?

Jeg plotter de to punktene (0, 30) og (1, 18) i et koordinatsystem, og tegner en stråle gjennom disse to punktene og ned på x-aksen.

Det tar to og en halv time før Sigurd er hjemme.



Oppgave 17 (6 poeng) **(HØST 2014)**

I 2014 er det 350 elever ved en skole. Anta at det vil være 275 elever ved skolen i 2029, og at antall elever avtar lineært i denne perioden.

a) Bestem en modell som viser hvor mange elever $A(x)$ det vil være ved skolen x år etter 2014.

En lineær modell vil være på formen $A(x) = ax + b$, *der a er stigningstallet og b er konstantleddet.* Konstantleddet b angir elevtallet når $x = 0$, altså i 2014. b er derfor lik 350.

I 2029 er $x = 15$.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{275 - 350}{15 - 0} = -\frac{75}{15} = -5$$

En lineær modell for antall elever ved skolen etter x antall år blir A(x) = -5x + 350.

b) Hvor mange elever vil det være ved skolen i 2024 ifølge modellen i oppgave a)?

I 2024 er x = 10.

$A(10) = -5 \cdot 10 + 350 = 300$

Ifølge denne modellen vil det være 300 elever ved skolen i 2024.

Ved en annen skole antar ledelsen at funksjonen B gitt ved

$$B(x) = 200 \cdot 1{,}03^x$$

kan brukes som modell for antall elever ved skolen x år etter 2014.

c) Hva kan du si, uten å gjøre beregninger, om antall elever ved denne skolen ut fra modellen?

I denne modellen øker antall elever med 3 % årlig, fra 200 elever i 2014.

Oppgave 18 (3 poeng) **(HØST 2014)**

I september 2014 ble en mobilapplikasjon lastet ned 1500 ganger. Antall nedlastinger har økt med 8 % per måned det siste året, og vi antar at denne utviklingen vil fortsette.

a) Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å bestemme hvor mange ganger mobilapplikasjonen vil bli lastet ned i desember 2014.

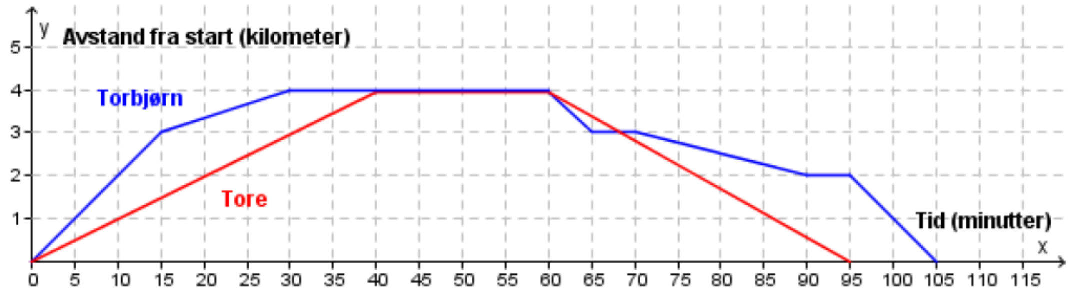
$\underline{\underline{1500 \cdot 1{,}08^3}}$

b) Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å bestemme hvor mange ganger mobilapplikasjonen til sammen ble lastet ned i juli, august, september og oktober 2014.

$$\frac{1500}{1{,}08^2} + \frac{1500}{1{,}08} + 1500 + 1500 \cdot 1{,}08$$

$$= \underline{\underline{1500 \cdot \left(\frac{1}{1{,}08^2} + \frac{1}{1{,}08} + 1 + 1{,}08 \right)}}$$

Oppgave 19 (3 poeng) **(HØST 2014)**



Torbjørn og Tore padler fra Flekkefjord til Torsøy. Der går de i land og tar en pause før de padler tilbake. Ovenfor ser du en forenklet grafisk framstilling av padleturen til Torbjørn (blå graf) og padleturen til Tore (rød graf).

a) Hvem kommer først til Torsøy?
Hvor lenge er hver av de to guttene på Torsøy?

Vi ser av den grafiske framstillingen over at Torbjørn kom først fram til Torsøy, 10 minutter før Tore. Begge drar samtidig fra øya, Torbjørn etter 30 minutter og Tore etter 20 minutter.

b) Hvor fort padler Tore på vei ut til Torsøy?

$$v = \frac{s}{t} = \frac{4\text{ km}}{40\text{ min}} = \frac{4000\text{ m}}{40\text{ min}} = 100\text{ m/min}$$

Tore padler med en fart på 100 m/min på vei ut til Torsøy.

c) Hva kan du si om hjemturen ut fra grafene ovenfor?
Tore padlet med en konstant fart, mens Torbjørn sin fart varierer. Torbjørn padler fortere enn Tore til å begynne med, men tar det så rolige, før han så legger inn en innspurt de siste 10 minuttene. Han legger også inn to pauser på fem minutter underveis. Tore er tilbake i Flekkefjord 10 minutter før Torbjørn.

DEL 2

Oppgave 1 (8 poeng) **(VÅR 2019)**

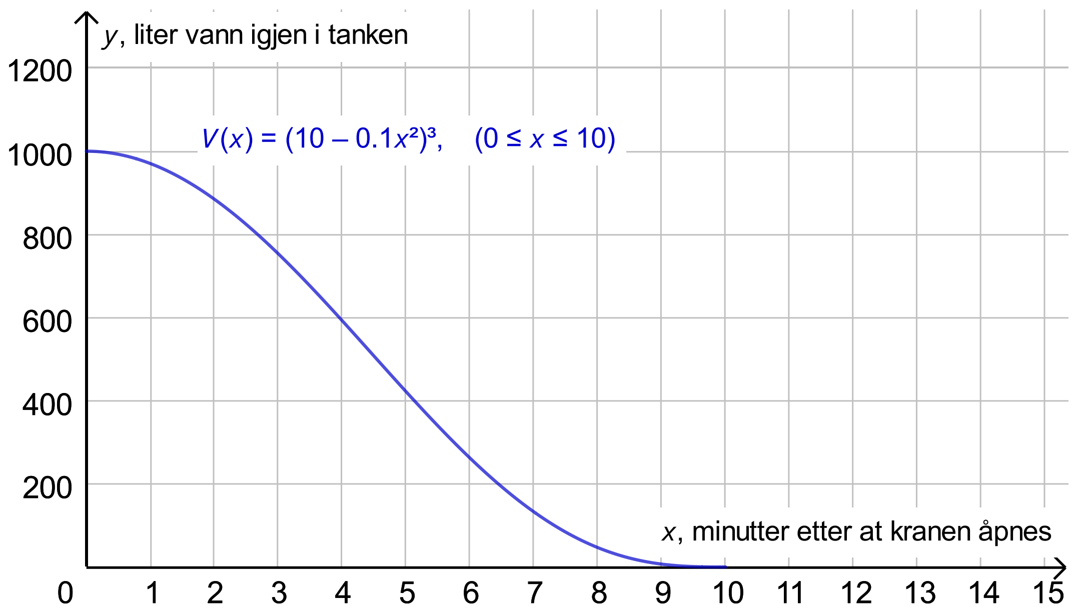
Et firma produserer vanntanker. Carl har undersøkt en av tankene og funnet ut at dersom tanken er full og kranen åpnes, vil det etter x minutter være $V(x)$ liter vann igjen i tanken, der

$$V(x) = (10 - 0{,}1x^2)^3 \quad , \quad 0 \le x \le 10$$

a) Bestem $V(0)$ og gi en praktisk tolkning av svaret du får.
Vi bruker CAS og finner

$V(0) = 1000$, betyr at vannmengden i tanken før kranen åpnes er 1000 Liter.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til V.
Vi bruker GeoGebra med kommandoen «Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)» og tegner grafen til V.



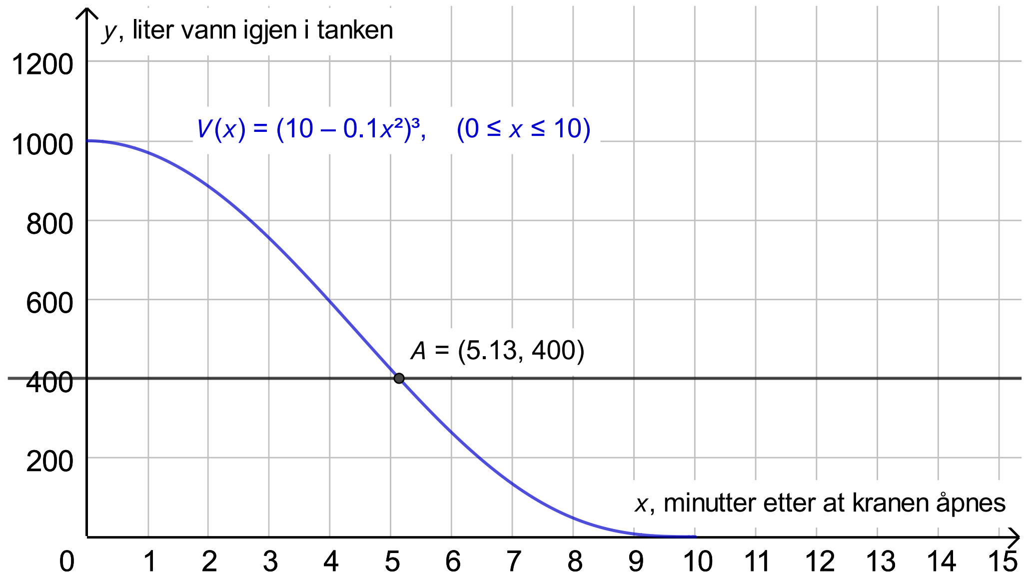
c) Hvor lang tid går det fra kranen åpnes til det er igjen 400 L igjen i tanken?

Vi kan for eksempel bruke CAS og løse likningen $V(x) = 400$.

1	$V(x) = 400$
	NLøs: $\{x = 5.13\}$
2	$0.13 \cdot 60$
	$\approx$ **7.8**

Det betyr at tiden det tar før det er 400 L igjen i tanken, er 5 minutter og 8 sekunder.

Vi kan også løse oppgaven grafisk ved å tegne linjen $x = 400$ og bruke verktøyet «skjæring mellom to objekt».



d) Hvor mye vann renner i gjennomsnitt ut av tankene per minutt mens den tømmes?

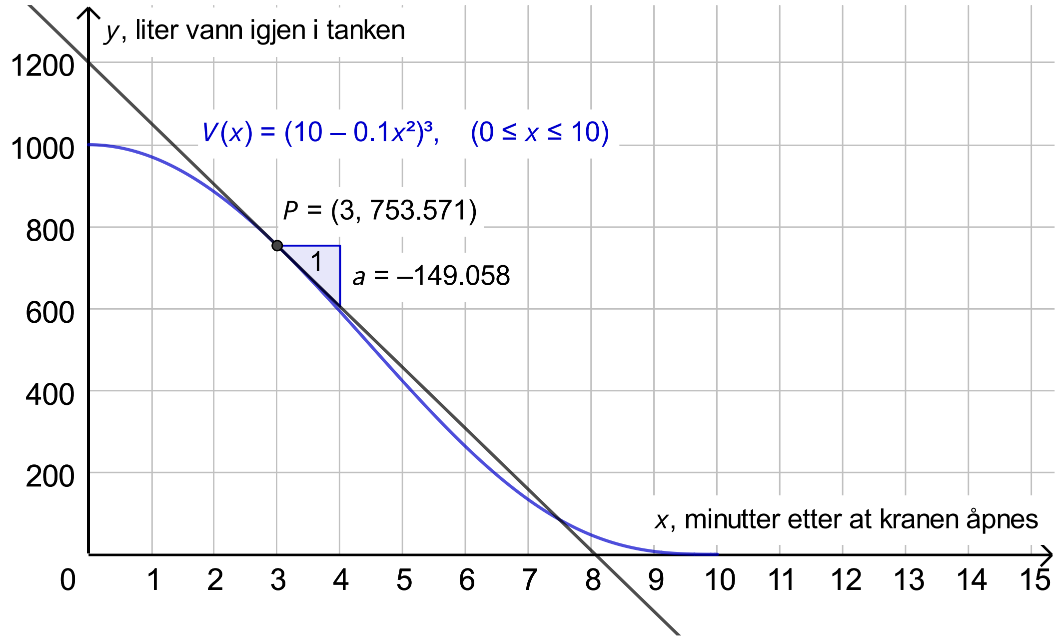
Tanken rommer 1000 L og tømmes på 10 minutter. Vi finner gjennomsnittet.

3	$\frac{1000L}{10min}$
	$\rightarrow$ $\mathbf{100 \cdot \frac{L}{min}}$

Vi finner at det i gjennomsnitt renner 100 L vann per minutt fra tanken mens den tømmes.

e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen V når $x = 3$.
Gi en praktisk tolkning av svaret du får.

Den momentane vekstfarten i et punkt er stigningen til tangenten i punktet. Vi legger inn punktet og tegner tangenten til grafen til V i punktet P ved å bruke verktøyet «tangenter». Vi finner stigningen til tangenten med verktøyet «stigning».



Den momentane vekstfarten til V er –149 liter per minutt når $x = 3$.

Det betyr at akkurat 3 minutter etter at kranen er åpnet, minker vannet i tanken med 149 liter per minutt.

Oppgave 2 (4 poeng) **(VÅR 2019)**

Forskere har målt og veid laks i et område. Tabellen nedenfor viser sammenhengende verdier av lengde og vekst.

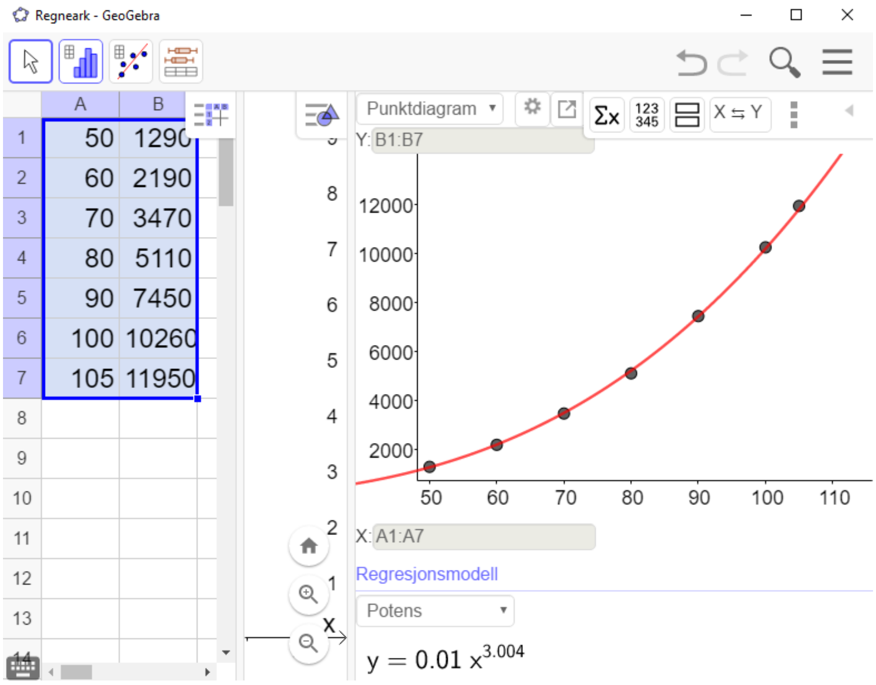
Laksens lengde (cm)	50	60	70	80	90	100	105
Laksens vekt (gram)	1290	2190	3470	5110	7450	10 260	11 950

Anta at sammenhengen mellom laksens lengde x cm og laksens vekt V gram kan beskrives med en modell av typen

$$V(x) = a \cdot x^b$$

a) Bruk datamaterialet i tabellen til å bestemme tallene a og b.

Vi legger verdiene fra tabellen inn i regneark i GeoGebra og bruker verktøyet "regresjonsanalyse" og potens som regresjonsmodell.



Jeg finner at funksjonen $V(x)=0{,}01x^3$ passer som modell til situasjonen.

$a=0{,}01$

$b=3$

b) Bruk modellen du nå har funnet til å bestemme hvor mange prosent vekten på laksen øker med når lengden har økt med 25 %,

Når lengden på laksen øker med 25 %, øker *x*-verdien til 1,25. Jeg lager et uttrykk for vekten lik $V(1{,}25x)=0{,}01\cdot(1.25x)^3=0{,}01\cdot 1.25^3\cdot x^3$.

En vekstfaktor på 1,953 tilsvarer en vekst på 95,3 %.

Vekten vil øke med 95,3 % når lengden øker med 25 %.

Oppgave 3 (4 poeng) **(VÅR 2019)**

Nedenfor er fire ulike situasjoner beskrevet. Det er også tegnet åtte grafer.

Situasjon 1
Jeg fant en butikk hvor de solgte ulike små sjokoladebiter. Jeg betalte 9 kroner for en kurv jeg kunne ha sjokoladebitene i og 15 kroner per hektogram sjokolade jeg puttet i kurven.

Situasjon 2
Jeg har arvet penger etter bestemor. Pengene har jeg satt på en sparekonto der jeg får en fast rente på 3,5 % per år.

Situasjon 3

Jeg leste en gang om en dyrebestand som levde på en øy. Dyrene formerte seg raskt, og bestanden ble større og større helt til det ble så mange dyr på øya at det ble vanskelig for alle å finne nok mat. Da ble det ikke født så mange dyr lenger, og antall fødte dyr per år var tilnærmet lik antall dyr som døde per år.

Situasjon 4

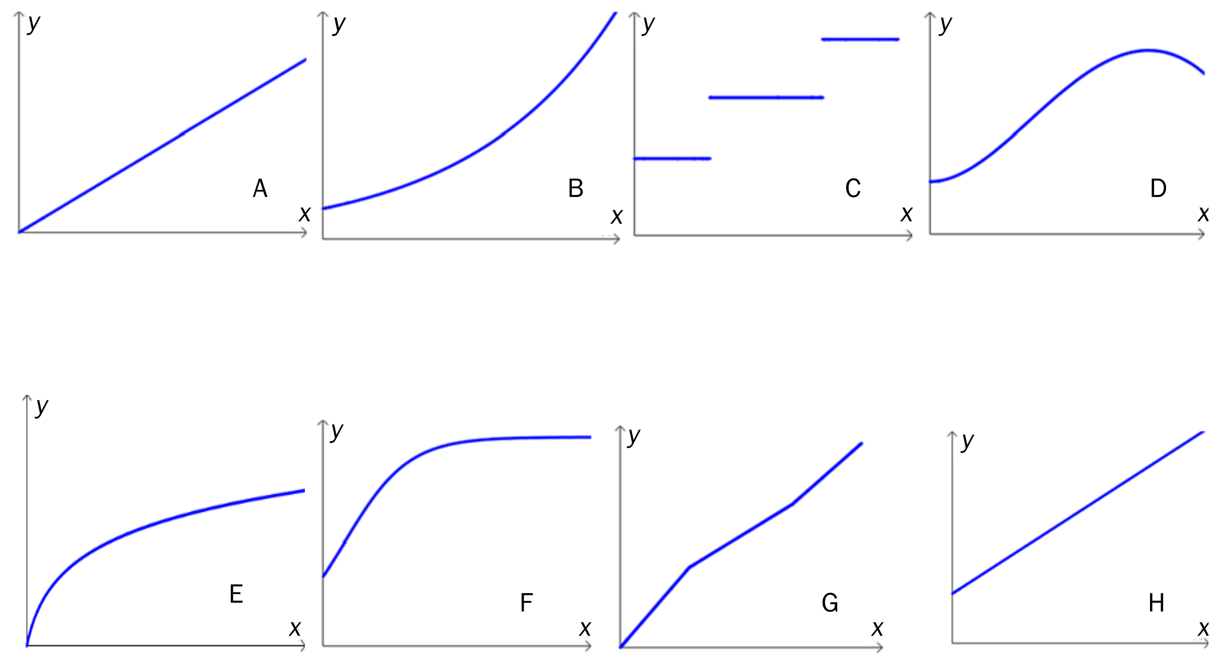
Jeg skulle sende en pakke med Posten i går og lurte på hvor mye jeg måtte betale i porto.

Jeg fant denne oversikten på posten.no:

Vekt:	Betal på posten.no:
0-10 kg	145,–
10-25 kg	260,–
25-35 kg	370,–

Hvilken graf beskriver situasjon 1?
Hvilken graf beskriver situasjon 2?
Hvilken graf beskriver situasjon 3?
Hvilken graf beskriver situasjon 4?

Husk å begrunne svarene dine.



Situasjon 1 vil være en lineær graf som starter på 9 kroner på y-aksen, og ha en rett linje som stiger med 15 for hver x-verdi. Dette kan beskrives av graf H.

Situasjon 2 vil være en eksponentialfunksjon. Grafen til denne funksjonen starter på et visst beløp på y-aksen og stiger eksponentielt med 1.035. Dette kan beskrives av graf B.

Situasjon 3 vil være en graf som starter på et visst antall på y-aksen, deretter stige inntil en viss verdi hvor grafen vil stagnere og veksten stopper. Dette kan beskrives av graf F.

Situasjon 4 er en sitasjon som viser prisen for hver av vektklassene på pakkene. Siden det er samme pris for pakker innen en vektklasse, vil dette vises som en rett linje, og hver av vektklassene har ulik pris, så det blir en vannrett linje på hver av klassene. Dette kan beskrives av graf C.

Oppgave 4 (8 poeng) **(VÅR 2019)**

Etter et arveoppgjør fikk Petter utbetalt 850 000 kroner. Den 1. januar 2008 opprettet han en sparekonto og satte inn hele beløpet på denne kontoen. Han bestemte seg for at pengene skulle stå urørt i banken i ti år.

Han fikk da to ulike tilbud fra banken.

Tilbud 1: En fast årlig rentesats på 4 % per år disse ti årene.

Tilbud 2: En rentesats som ville endres én gang per år i tråd med svingninger i pengemarkedet. Det første året ville rentesatsen bli satt til 5,4 %.

a) Hvor mye hadde Petter til sammen fått i renter i løpet av de ti årene om han hadde valgt tilbud 1?

Vi regner ut hvor mye pengene hadde blitt med renter i 10 år og trekker fra beløpet som settes inn.

1 $850000 \cdot 1.04^{10} - 850000$

$\approx$ **408207.642**

Petter vil få 408 208 kroner i renter på 10 år.

Petter valgte tilbud 2. I regnearket nedenfor ser du hvilken rentesats han fikk hvert år de ti årene.

b) Lag et regneark som vist nedenfor. Legg inn opplysningene i de hvite cellene. I de blå cellene (fra og med C4 til og med E13) skal du sette inn formler.

	A	B	C	D	E
1	Sparebeløp	kr 850 000,00			
2					
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til
4	2008	5,4 %			
5	2009	3,5 %			
6	2010	2,3 %			
7	2011	2,4 %			
8	2012	2,2 %			
9	2013	2,2 %			
10	2014	2,1 %			
11	2015	1,6 %			
12	2016	1,2 %			
13	2017	1,1 %			
14					
15			Sum renter		

Vi setter inn og beregner rentene i Excel.

	A	B	C	D	E
1	Sparebeløp	kr 850 000,00			
2					
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til
4	2008	5,4 %	kr 850 000,00	kr 45 900,00	kr 895 900,00
5	2009	3,5 %	kr 895 900,00	kr 31 356,50	kr 927 256,50
6	2010	2,3 %	kr 927 256,50	kr 21 326,90	kr 948 583,40
7	2011	2,4 %	kr 948 583,40	kr 22 766,00	kr 971 349,40
8	2012	2,2 %	kr 971 349,40	kr 21 369,69	kr 992 719,09
9	2013	2,2 %	kr 992 719,09	kr 21 839,82	kr 1 014 558,91
10	2014	2,1 %	kr 1 014 558,91	kr 21 305,74	kr 1 035 864,64
11	2015	1,6 %	kr 1 035 864,64	kr 16 573,83	kr 1 052 438,48
12	2016	1,2 %	kr 1 052 438,48	kr 12 629,26	kr 1 065 067,74
13	2017	1,1 %	kr 1 065 067,74	kr 11 715,75	kr 1 076 783,49
14					
15			Sum renter	kr 226 783,49	

Med formler:

	A	B	C	D	E
1	Sparebeløp	850 000			
2					
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til
4	2008	0,054	=B1	=B4*C4	=D4+C4
5	2009	0,035	=E4	=B5*C5	=D5+C5
6	2010	0,023	=E5	=B6*C6	=D6+C6
7	2011	0,024	=E6	=B7*C7	=D7+C7
8	2012	0,022	=E7	=B8*C8	=D8+C8
9	2013	0,022	=E8	=B9*C9	=D9+C9
10	2014	0,021	=E9	=B10*C10	=D10+C10
11	2015	0,016	=E10	=B11*C11	=D11+C11
12	2016	0,012	=E11	=B12*C12	=D12+C12
13	2017	0,011	=E12	=B13*C13	=D13+C13
14					
15			Sum renter	=SUMMER(D4:D13)	

c) Lag en ny tabell i regnearket fra oppgave b). Den nye tabellen skal vise hvor mye Peter hadde fått i renter hvert år om han hadde valgt tilbud 1.

Løsning:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Sparebeløp	kr 850 000,00				Rente	
2						4 %	
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til	På konto ved tilbud 1 etter at renter er lagt til	Renter ved tilbud 1
4	2008	5,4 %	kr 850 000,00	kr 45 900,00	kr 895 900,00	kr 884 000,00	kr 34 000,00
5	2009	3,5 %	kr 895 900,00	kr 31 356,50	kr 927 256,50	kr 919 360,00	kr 35 360,00
6	2010	2,3 %	kr 927 256,50	kr 21 326,90	kr 948 583,40	kr 956 134,40	kr 36 774,40
7	2011	2,4 %	kr 948 583,40	kr 22 766,00	kr 971 349,40	kr 994 379,78	kr 38 245,38
8	2012	2,2 %	kr 971 349,40	kr 21 369,69	kr 992 719,09	kr 1 034 154,97	kr 39 775,19
9	2013	2,2 %	kr 992 719,09	kr 21 839,82	kr 1 014 558,91	kr 1 075 521,17	kr 41 366,20
10	2014	2,1 %	kr 1 014 558,91	kr 21 305,74	kr 1 035 864,64	kr 1 118 542,01	kr 43 020,85
11	2015	1,6 %	kr 1 035 864,64	kr 16 573,83	kr 1 052 438,48	kr 1 163 283,69	kr 44 741,68
12	2016	1,2 %	kr 1 052 438,48	kr 12 629,26	kr 1 065 067,74	kr 1 209 815,04	kr 46 531,35
13	2017	1,1 %	kr 1 065 067,74	kr 11 715,75	kr 1 076 783,49	kr 1 258 207,64	kr 48 392,60
14							
15			Sum renter	kr 226 783,49		Sum renter	kr 408 207,64

Med formler:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Sparebeløp	850 000				Rente	
2						0,04	
3	År	Rentesats	På kontoen før renter er lagt til	Renter	På kontoen etter at renter er lagt til	På konto ved tilbud 1 etter at renter er lagt til	Renter ved tilbud 1
4	2008	0,054	=B1	=B4*C4	=D4+C4	=B1*(1+F$2)	=F4-B1
5	2009	0,035	=E4	=B5*C5	=D5+C5	=F4*(1+F$2)	=F5-F4
6	2010	0,023	=E5	=B6*C6	=D6+C6	=F5*(1+F$2)	=F6-F5
7	2011	0,024	=E6	=B7*C7	=D7+C7	=F6*(1+F$2)	=F7-F6
8	2012	0,022	=E7	=B8*C8	=D8+C8	=F7*(1+F$2)	=F8-F7
9	2013	0,022	=E8	=B9*C9	=D9+C9	=F8*(1+F$2)	=F9-F8
10	2014	0,021	=E9	=B10*C10	=D10+C10	=F9*(1+F$2)	=F10-F9
11	2015	0,016	=E10	=B11*C11	=D11+C11	=F10*(1+F$2)	=F11-F10
12	2016	0,012	=E11	=B12*C12	=D12+C12	=F11*(1+F$2)	=F12-F11
13	2017	0,011	=E12	=B13*C13	=D13+C13	=F12*(1+F$2)	=F13-F12
14							
15			Sum renter	=SUMMER(D4:D13)		Sum renter	=SUMMER(G4:G13)

Oppgave 5 (9 poeng) **(HØST 2018)**

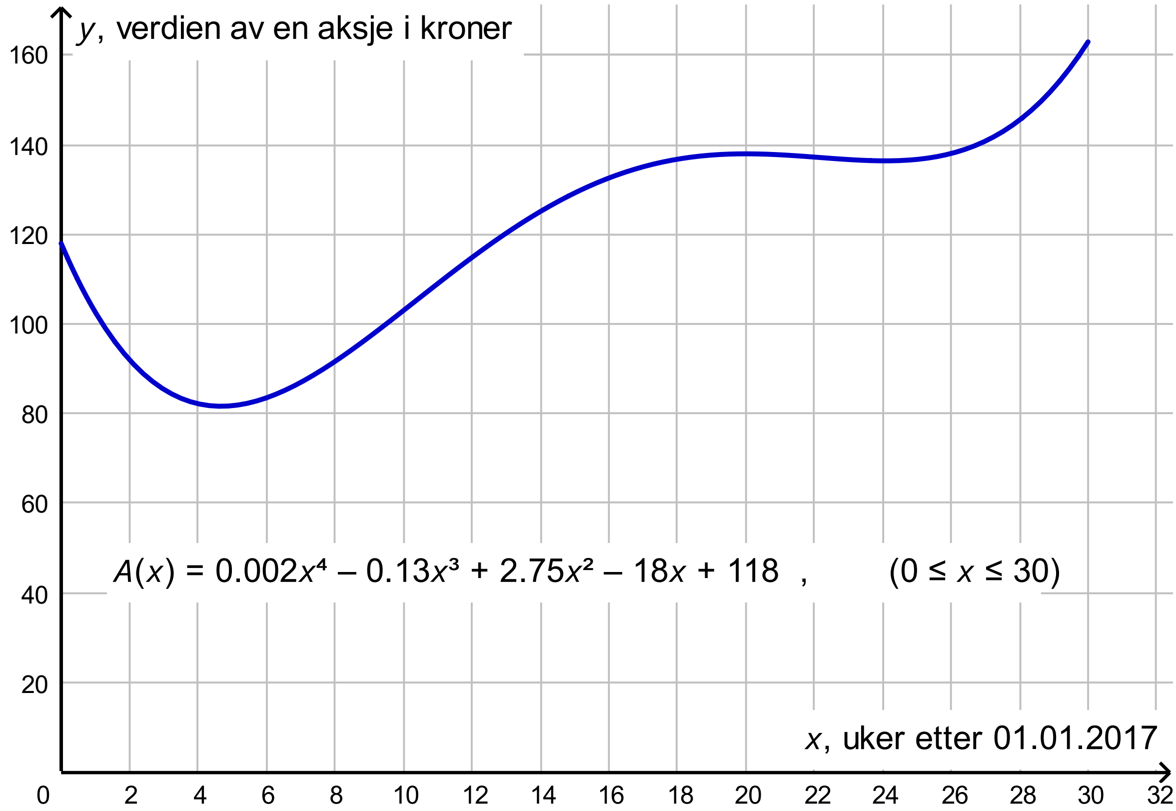
Anta at funksjonene *A* gitt ved

$$A(x) = 0{,}002x^4 - 0{,}13x^3 + 2{,}75x^2 - 18x + 118 \quad , \qquad 0 \le x \le 30$$

kan brukes som en modell som viser verdien *A*(*x*) kroner av en aksje *x* uker etter 01.01.2017.

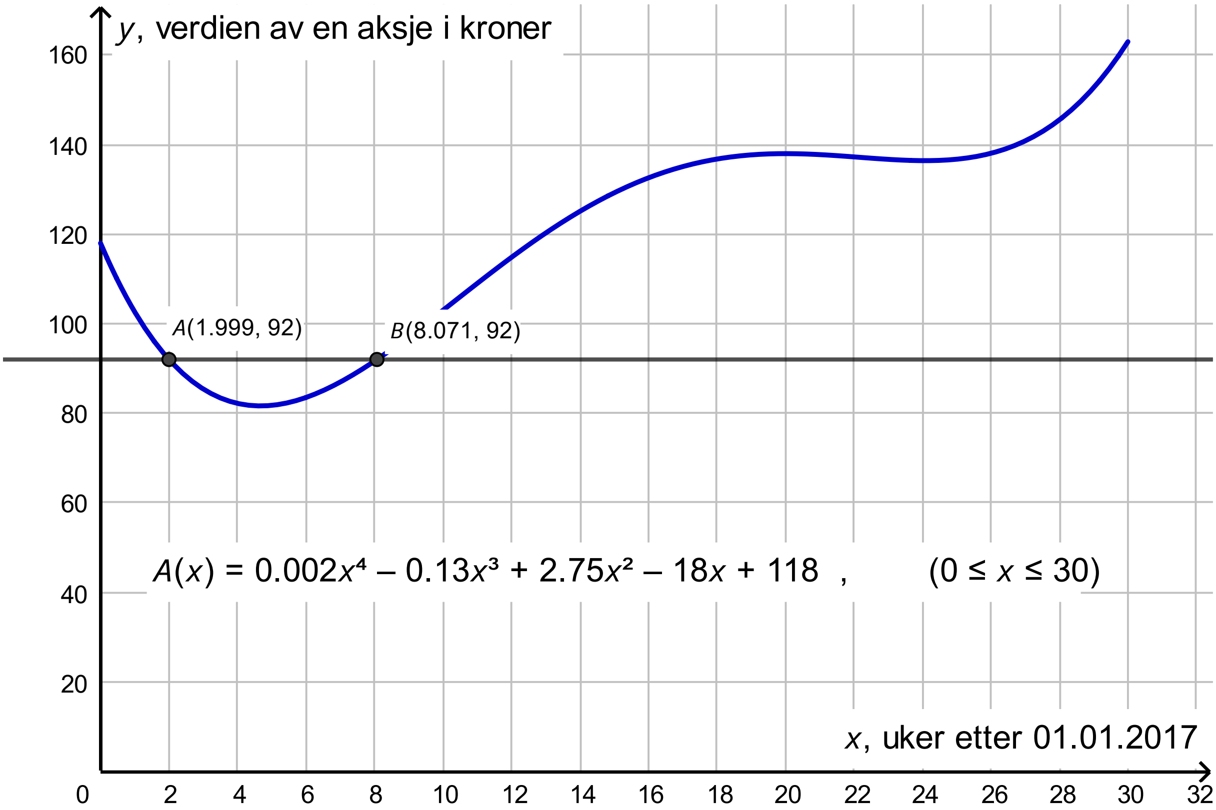
a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.

Bruker kommandoen «*Funksjon (Funksjon, start, slutt)*» med funksjonen *A*, 0 som start og 30 som slutt.



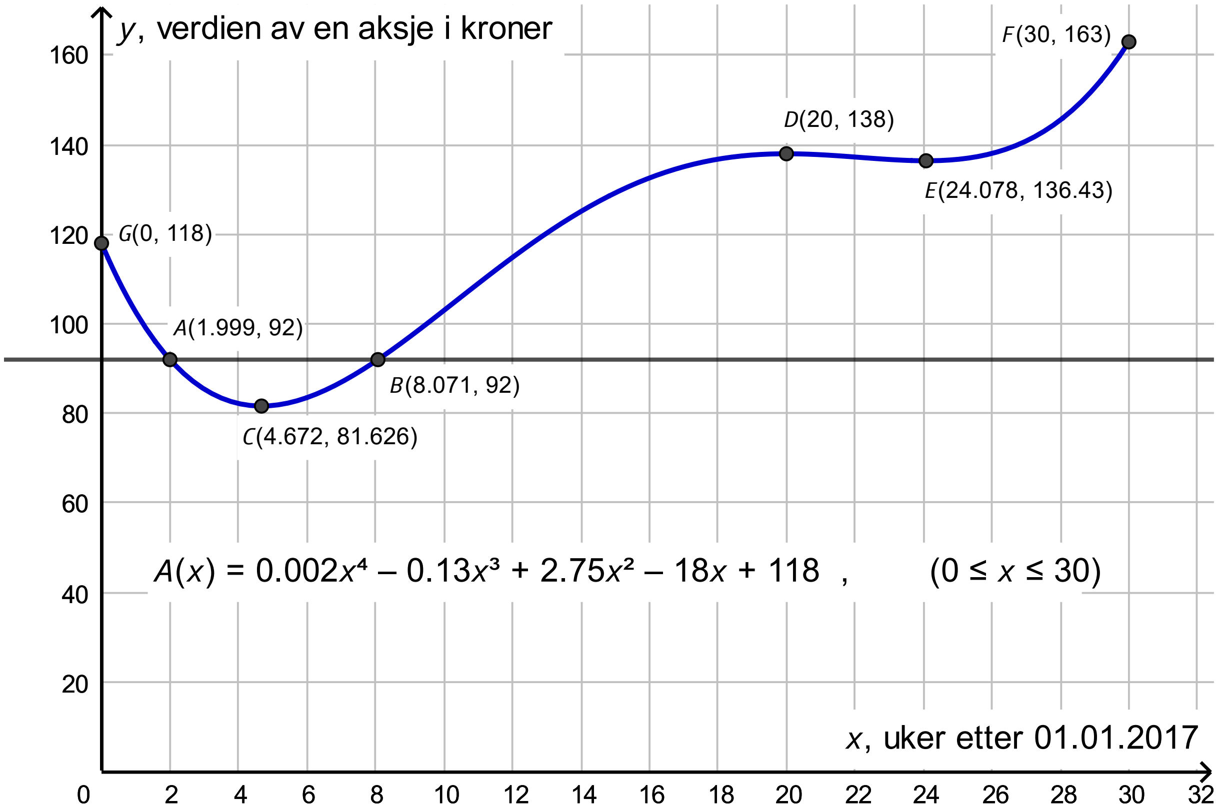
b) I hvor mange uker var verdien av aksjen lavere enn 92 kr?

Skriver $y = 92$ i inntastingsfeltet og bruker verktøyet *Skjæring mellom to objekt* og leser av x-verdiene til de to skjæringspunktene, se punktene A og B på figuren.
Ser på grafen til A at aksjekursen er under 92 kr fra 2 uker etter 1. januar til 8,1 uker etter 1. januar, det vil si i litt over 6 uker.



c) Bestem forskjellen mellom laveste og høyeste verdi av aksjen de 30 første ukene av 2017.

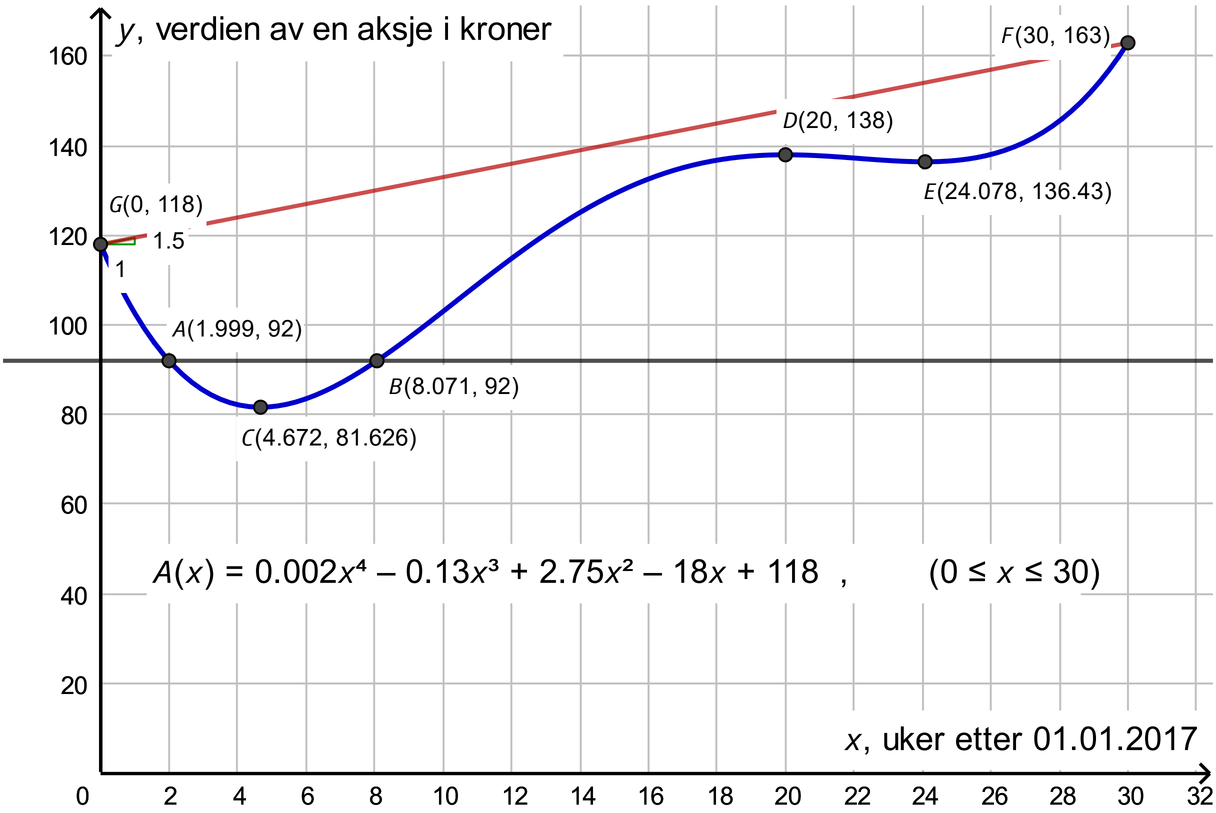
Bruker verktøyet/kommandoen Ekstremalpunkt og klikker på grafen til *A* (se punktene *C, D* og *E*. Markerer også grafens endepunkter ved å skrive inn (0, *A* (0)) og (30, *A* (30)), se punktene *G* og *F*.



Ser at endepunktet (30,163) viser funksjonens høyeste *y*-verdi og punktet (4.7, 81.6) viser funksjonens laveste *y*-verdi. Forskjellen mellom aksjens høyeste verdi og laveste verdi er 163 kroner – 81,6 kroner = 81,4 kroner.

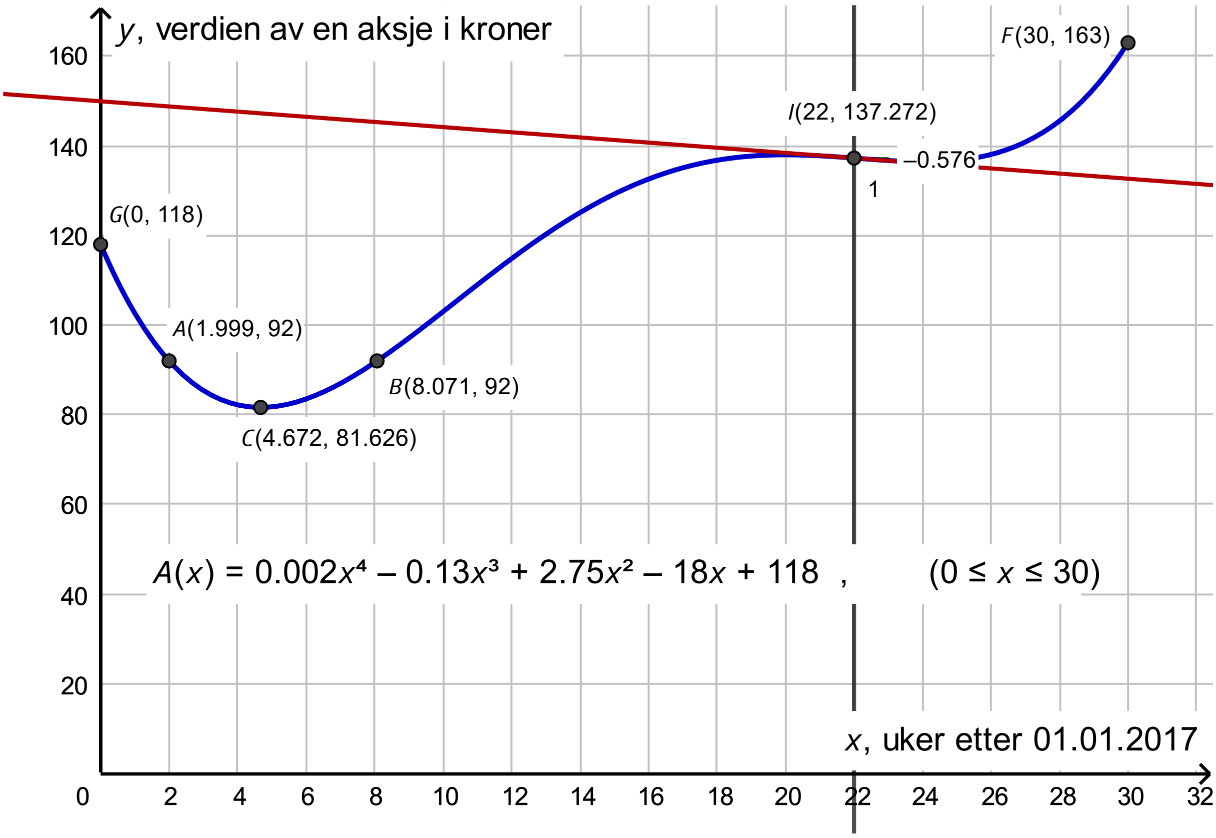
d) Hvor mye steg aksjen i verdi i gjennomsnitt per uke de 30 første ukene i 2017?

Trekker et linjestykke fra x=0 til x=30 (se rød linje) og bruker kommandoen stigning. Finner at stigningen er 1,5, se ved punktet G. Aksjekursen økte med 1,5 kr. per uke i gjennomsnitt de 30 første ukene i 2017.



e) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen *A* når $x = 22$. Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

Skriver $x = 22$ i inntastingsfeltet og bruker «*Skjæring mellom to objekt*» til å markere punktet hvor linjen skjærer grafen, se punktet *I*. Velger kommandoen «*Tangenter*» og punktet *I* og grafen til *A* og får tangenten i punktet *I*, se den røde linjen på figuren nedenfor. Brukte deretter verktøyet «*Stigning*» på denne tangenten (vises nesten ikke på figuren, se ved punktet *I*). Finner at tangentlinjen har stigningstall $a = -0{,}576$.
I 22. uke av 2017 (overgangen mai/juni) sank verdien av aksjen med 0,58 kr. per uke.



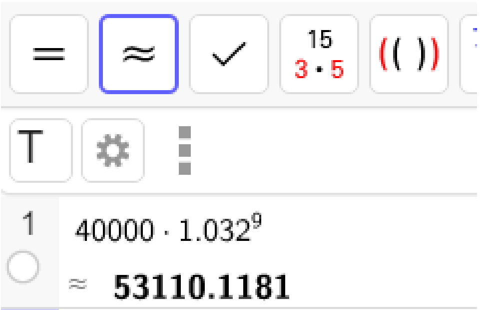
Oppgave 6 (6 poeng) **(HØST 2018)**

I begynnelsen av år 2010 satte Truls inn 40 000 kroner på en ny sparekonto. Pengene har siden stått urørt. Kontoen har en fast årlig rente på 3,2 %.

Truls vil fortsatt la pengene stå urørt på kontoen.

a) Hvor mye vil han ha på kontoen i begynnelsen av 2019?

Vekstfaktoren er 1,032.



Truls vil ha 53110,12 kroner på kontoen i begynnelsen av 2019.

b) Lag et regneark som viser hvor mange år det vil gå fra han satte inn pengene til han har 60 000 kroner på kontoen.

Setter inn regneark.

	A	B	C	D
1	År	År etter 2010	Saldo 1. januar	Saldo 31. desember
13	2021	11	kr 56 563,55	kr 58 373,58
14	2022	12	kr 58 373,58	kr 60 241,54

Viser formler fra regneark.

	A	B	C	D
1	År	År etter 2010	Saldo 1. januar	Saldo 31. desember
13	11	11	=D12	=D12*1,032
14	12	12	=D13	=D12*1,032

I slutten av 2022, omtrent 13 år senere, vil Truls ha 60 000 kr på kontoen.

Når beløpet på kontoen har passert 100 000 kroner, vil Truls begynne å ta ut penger. Han vil ta ut 8000 kroner i begynnelsen av hvert år.

c) Utvid regnearket fra oppgave b) slik at det viser hvor mange uttak han kan gjøre før kontoen er tom.

Utvider regnearket og ser at beløpet på kontoen har passert 100 000 kroner i begynnelsen av år 2040. I 2040 gjør han første uttak.

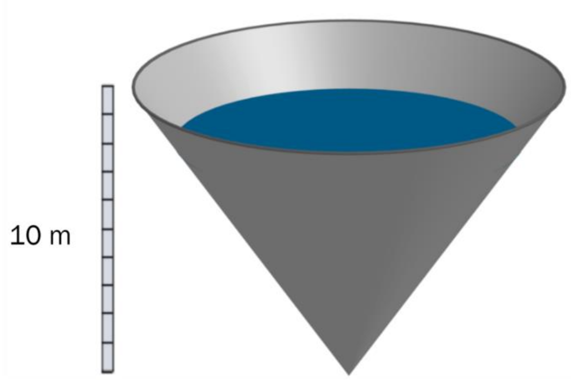
	A	B	C	D
1	År	År etter 2010	Saldo 1.januar	Saldo 31. desember
29	2037	27	kr 93 629,31	kr 96 625,45
30	2038	28	kr 96 625,45	kr 99 717,46
31	2039	29	kr 99 717,46	kr 102 908,42
32	2040	30	kr 102 908,42	kr 106 201,49

	A	B	C	D	E	F	G
1	År	År etter 2010	Saldo 1. januar	Saldo 31. desember	Antall uttak	Saldo 1. januar etter uttak	Saldo 31. desember etter uttak
32	2040	30	102908,42	106201,49	1	94908,42	97945,49
45	2053	43	154984,04	159943,53	14	16426,11	16951,75
46	2054	44	159943,53	165061,72	15	8951,75	9238,21
47	2055	45	165061,72	170343,70	16	1238,21	1277,83

	A	B	C	D	E	F	G
1	År	År etter 2010	Saldo 1. januar	Saldo 31. desember	Antall uttak	Saldo 1. januar etter uttak	Saldo 31. desember etter uttak
32	2040	30	=D31	=D31*1,032	1	=C32-8000	=F32*1,032
45	2053	43	=D44	=D44*1,032	14	=G44-8000	=F45*1,032
46	2054	44	=D45	=D45*1,032	15	=G45-8000	=F46*1,032
47	2055	45	=D46	=D46*1,032	16	=G46-8000	=F47*1,032

Truls kan gjøre 16 uttak på 8000 kroner og et siste uttak på 1278 kroner.

Oppgave 7 (4 poeng) **(HØST 2018)**



En vanntank har form som en rett kjegle. Tanken er 10 m høy. Se skissen ovenfor. En pumpe fyller 18 m^3 vann på tanken hver time. Det tappes ikke noe vann ut av tanken. Tabellen nedenfor viser vannivået i tanken ved ulike tidspunkt. Når vannivået er 10 m, er tanken full.

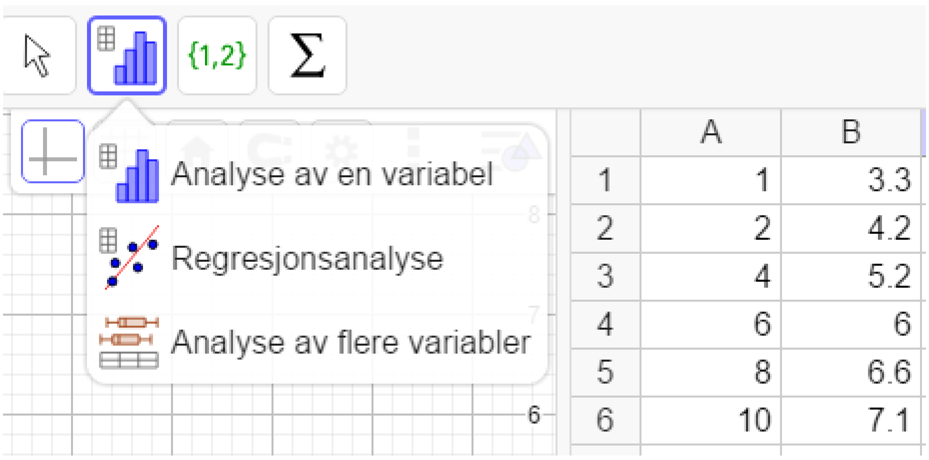
Antall timer etter at fyllingen startet	1	2	4	6	8	10
Vannivå (meter)	3,3	4,2	5,2	6,0	6,6	7,1

a) La x være antall timer etter at fyllingen startet og bruk regresjon til å vise at funksjonen H er gitt ved

$$H(x) = 3{,}31 \cdot x^{0{,}33}$$

er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

Setter verdiene inn i regneark i GeoGebra, markerer og bruker regresjonsanalyse. Finner at potensfunksjonen passer godt som regresjonsmodell.

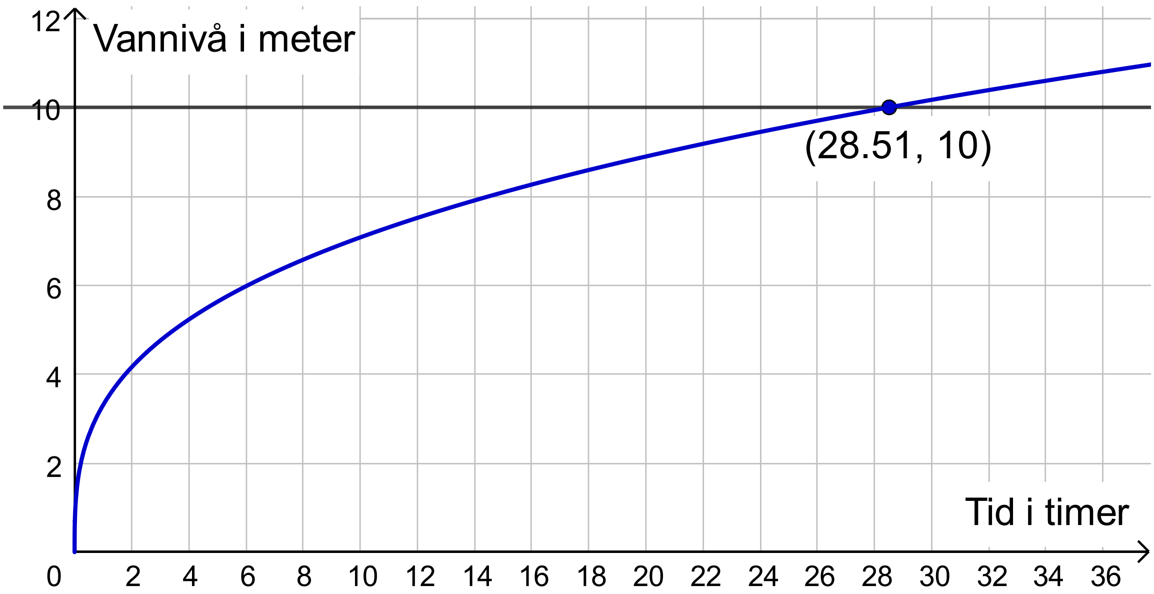


Regresjonsmodell

Potens $y = 3.31\,x^{0.33}$

b) Hvor mange timer tar det før tanken er full?

Tanken er full når vannivået er 10 meter, siden tanken er 10 meter høy. Setter *y* = 10, velger «*Skjæring mellom to objekt*» og finner punktet (28.51, 10). Det tar 28,51 timer å fylle tanken.



Hvor mange liter vann er det i tanken da?

18 m^3 vann er 18 000 liter. Det fylles 18 000 liter i timen i 28,51 timer:

1	$18000 \cdot 28.51$
	$\rightarrow$ **513180**

Når tanken er full, inneholder den 513 180 liter vann.

Oppgave 8 (4 poeng) **(HØST 2018)**

Situasjon 1: Prosentvis økning blir eksponentiell vekst med vekstfaktor større enn 1. Det betyr at grafen stiger mer og mer. Graf A beskriver situasjon 1.

Situasjon 2: Når noe minker med et fast tall per år, tilsvarer det lineær vekst med negativt stigningstall. Graf D beskriver situasjon 2.

Situasjon 3: Noe øker, men veksten avtar med tiden. Potensfunksjon med positiv eksponent mellom 0 og 1. Graf B beskriver situasjonen 3.

Situasjon 4: Prosentvis nedgang blir eksponentiell vekst med vekstfaktor mindre enn 1. Det betyr at grafen synker mindre og mindre. Graf F beskriver situasjon 4.

Oppgave 9 (8 poeng) **(VÅR 2018)**

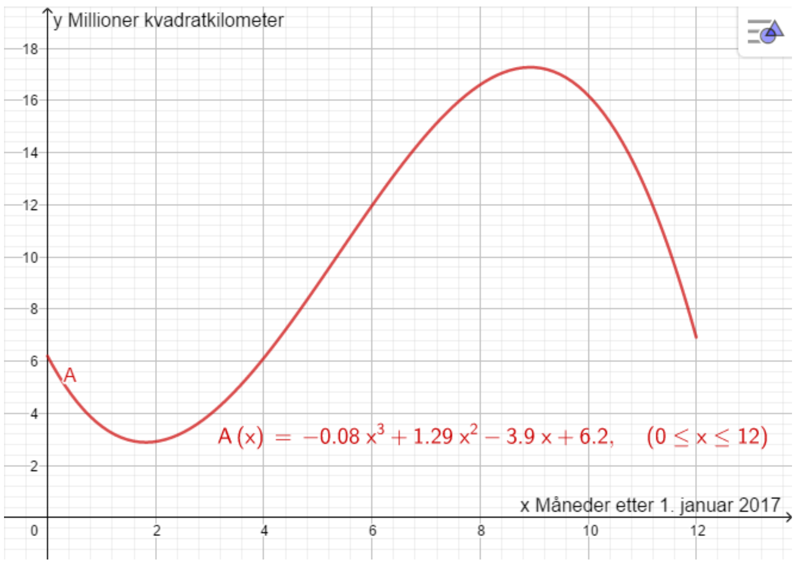
Funksjonen A gitt ved

$$A(x) = -0{,}08x^3 + 1{,}29x^2 - 3{,}9x + 6{,}2 \quad , \quad 0 \le x \le 12$$

viser hvor mange millioner kvadratkilometer $A(x)$ rundt Antarktis som var dekket av havis x måneder etter 1. januar 2017.

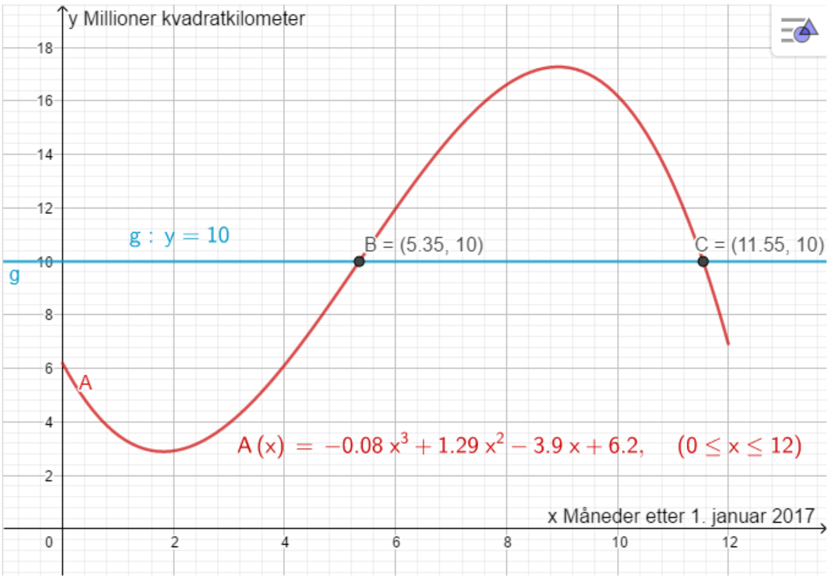
a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.

Vi setter funksjonen inn i GeoGebra med kommandoen «Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)».



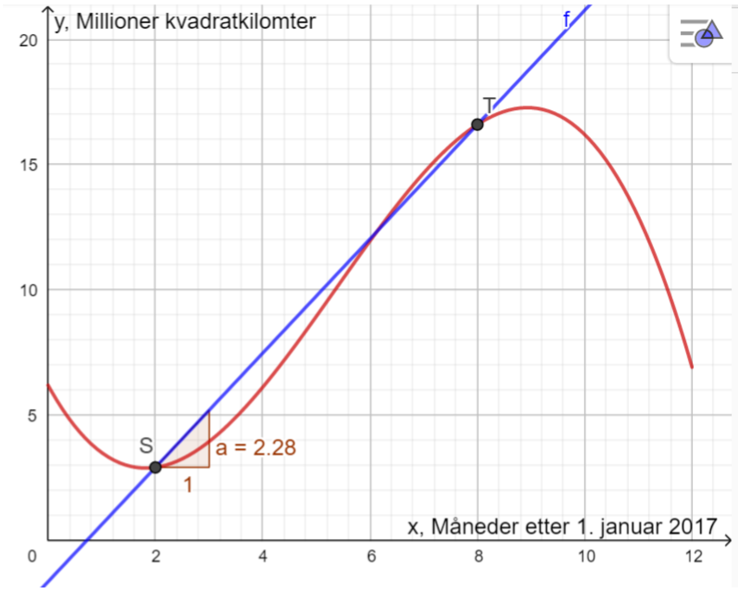
b) Hvor lenge var mer enn 10 millioner kvadratkilometer dekket av havis?

Vi legger inn linjen $y = 10$, og bruker kommandoen «Skjæring mellom to objekt». Vi ser at mellom punktene $B = (5{,}35\ ,10)$ og $C = (11{,}55\ ,10)$ er grafen til A over 10. Det betyr at det var mer enn 10 millioner kvadratkilometer havis fra begynnelsen av juni (x = 5,35) til midten av desember (x = 11,55) det vil si omtrent 6,2 måneder.



c) Hvor mange kvadratkilometer økte området som var dekket av havis, i gjennomsnitt med per måned fra 1. mars til 1. september?

1. mars er gitt ved x = 2 og 1. september er gitt ved x = 8. Vi legger inn punktene

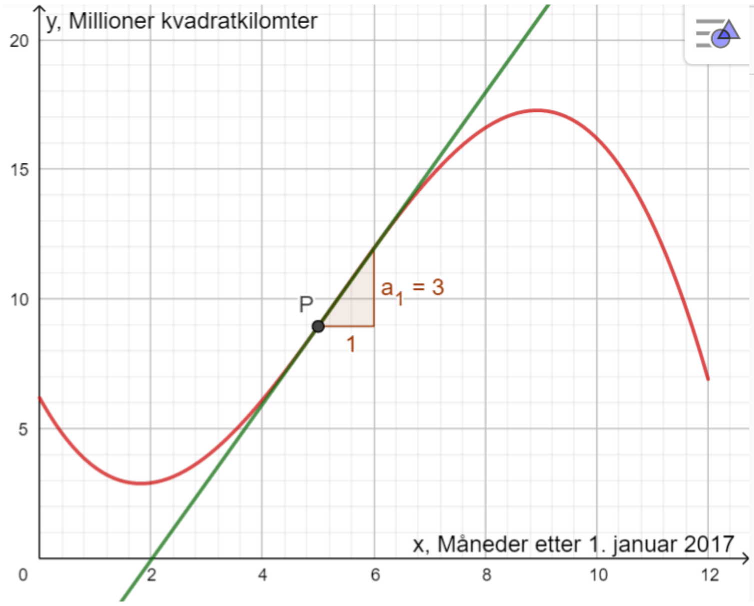


$S = (2,\ A(2))$ og $T = (8,\ A(8))$ og trekker en linje gjennom disse punktene ved å bruke verktøyet «linje». Videre bruker vi verktøyet «stigning» på den linjen og finner at stigningstallet er $a = 2{,}28$

Vi finner at i gjennomsnitt økte antall millioner kvadratkilometer havis med 2,28 kvadratkilometer per måned.

d) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen A når $x = 5$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

Den momentane vekstfarten i et punkt er stigningen til tangenten i punktet. Vi legger inn punktet $P = \left(5,\ A(5)\right)$ og tegner tangenten til grafen til A i punktet P ved å bruke verktøyet «tangenter. Vi finner stigningen til tangenten med verktøyet «stigning».



Vi har $x = 5$ angir 5 måneder etter 1. januar, altså 1. juni 2017. Vi finner at den momentane vekstfart på dette tidspunktet er på 3 millioner kvadratkilometer. Det vi si at antall millioner kvadratkilometer havis øker med 3 millioner kvadratkilometer per måned i begynnelsen av juni i dette området.

Oppgave 10 (7 poeng) **(VÅR 2018)**

Årstall	1920	1940	1960	1980	2000	2010	2017
Folketall i millioner	1902	2285	2991	4401	6088	6889	7474

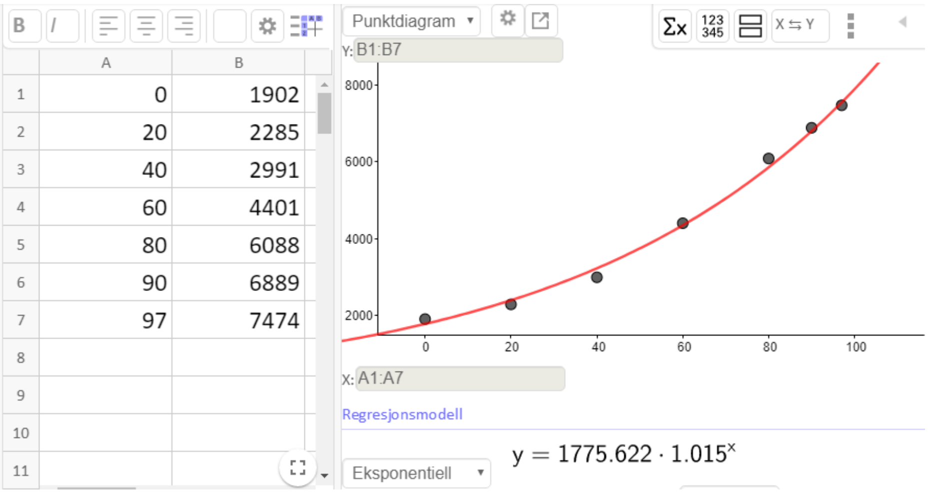
Tabellen ovenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år i perioden fra 1920 til 2017.

a) La x være antall år etter 1. januar 1920, og bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 1775{,}6 \cdot 1{,}015^x$$

er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

Vi legger inn verdiene i et regneark i GeoGebra. Vi velger så verktøyet regresjonsanalyse og eksponentiell modell.



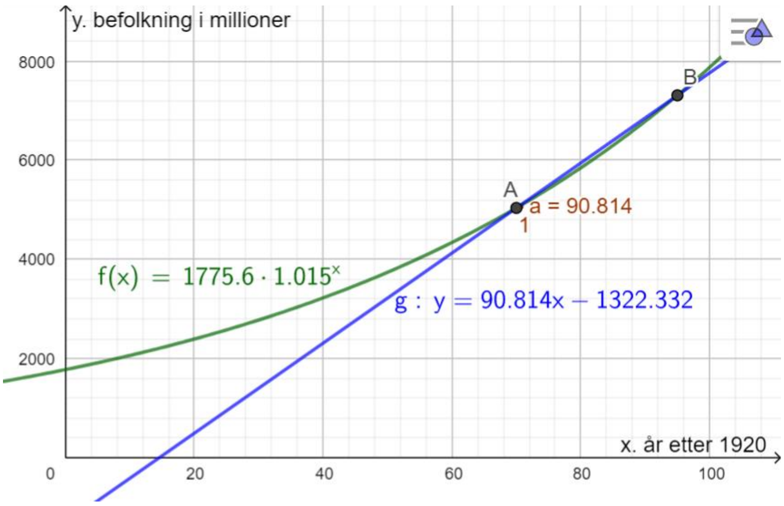
Vi finner at $f(x) = 1775{,}6 \cdot 1{,}015^x$ er en god modell for endringen i folketall i verden, som skulle vises.

b) Hvor mange prosent har folketallet økt med per år ifølge modellen i oppgave a)?

Fra funksjonsuttrykket ser vi at vekstfaktoren er 1,015. Det betyr at den prosentvise økning per år er på $1{,}015 - 1 = 0{,}015 = 1{,}5\,\%$.

c) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til f fra $x = 70$ til $x = 95$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

Vi tegner grafen til f i GeoGebra, og tegner en rett linje med verktøyet «linje» gjennom punktene $A(70, f(70))$ og $B(95, f(95))$. Vi finner at stigningstallet til denne linjen er 90,8. Det betyr at den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet x = 70 til x = 95 er 90,8.



Folketallet har i gjennomsnitt økt med 90,8 millioner per år i perioden 1990 til 2015.

Det er ingen krav til grafisk løsning i denne oppgaven, så vi kunne også ha funnet svaret ved regning, for eksempel slik

1	$\dfrac{f(95) - f(70)}{95 - 70}$
	$\approx$ **90.81**

FN har utarbeidet prognoser som viser at folketallet i verden vil være 9,8 milliarder i år 2050 og 11,2 milliarder i år 2100.

d) Vurder om modellen i oppgave a) samsvarer med disse prognosene.

Vi regner ut $f(130)$ som svarer til folketallet i 2015 og $f(180)$ som svarer til folketallet i 2100.

2	$f(130)$
	$\approx$ **12300.72**
3	$f(180)$
	$\approx$ **25896**

I følge modellen vil folketallet være 12,3 milliarder i 2015, og 25,9 milliarder i 2100. Modellen gir et høyere folketall enn FNs prognoser for begge årstallene, spesielt for år 2100. Modellen samsvarer ikke godt med prognosene til FN.

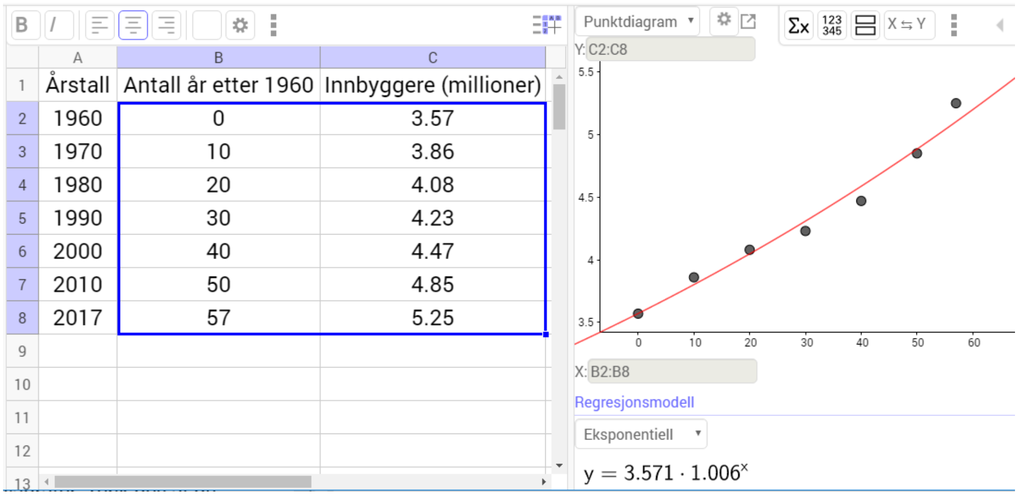
Oppgave 11 (5 poeng) **(HØST 2017)**

Tabellen nedenfor viser antall innbyggere i Norge 1. januar noen utvalgte år.

År	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Innbyggere (millioner)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

La x være antall år etter 1960. (La $x = 0$ svare til år 1960, $x = 10$ til 1970 osv.)

a) Vis at $f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x$ er en modell som passer godt med tallene i tabellen.



Skrev tallene fra tabellen over i regnearket i GeoGebra. Regnet ut antall år etter 1960 i kolonne B, se figurene, og brukte regresjonsanalyseverktøyet med eksponentiell modell. En eksponentialfunksjon som passer godt med tallene er

$$\underline{\underline{f(x) = 3{,}57 \cdot 1{,}006^x}}$$

	A	B	C
1	Årstall	Antall år etter 1960	Innbyggere (millioner)
2	1960	A2 - A$2	3.57
3	1970	A3 - A$2	3.86
4	1980	A4 - A$2	4.08
5	1990	A5 - A$2	4.23
6	2000	A6 - A$2	4.47
7	2010	A7 - A$2	4.85
8	2017	A8 - A$2	5.25

b) Hva forteller tallet 1,006 i denne modellen?

Tallet 1,006 er vekstfaktoren. Dette svarer til en økning på 0,6 %, som betyr at folketallet øker med 0,6 % per år.

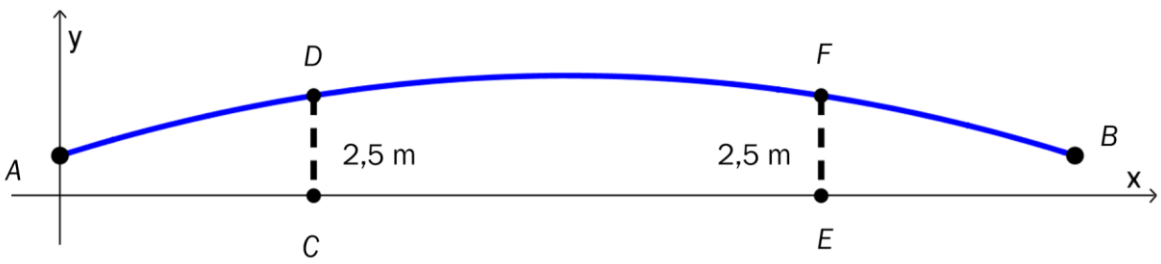
Anta at modellen fra oppgave a) vil gjelde i årene framover.

c) I hvilket år vil innbyggertallet i Norge passere 10 millioner ifølge denne modellen?

Prøver meg frem med x-verdier i regresjonsverktøyet og finner at innbyggertallet passerer 10 millioner etter 164. Dette tilsvarer år 2124 (1960+164=2124).

Oppgave 12 (6 poeng) **(HØST 2017)**

En gangbro går over en elv. I koordinatsystemet nedenfor har vi tegnet en skisse av broen. På skissen går broen fra punktet A til punktet B.

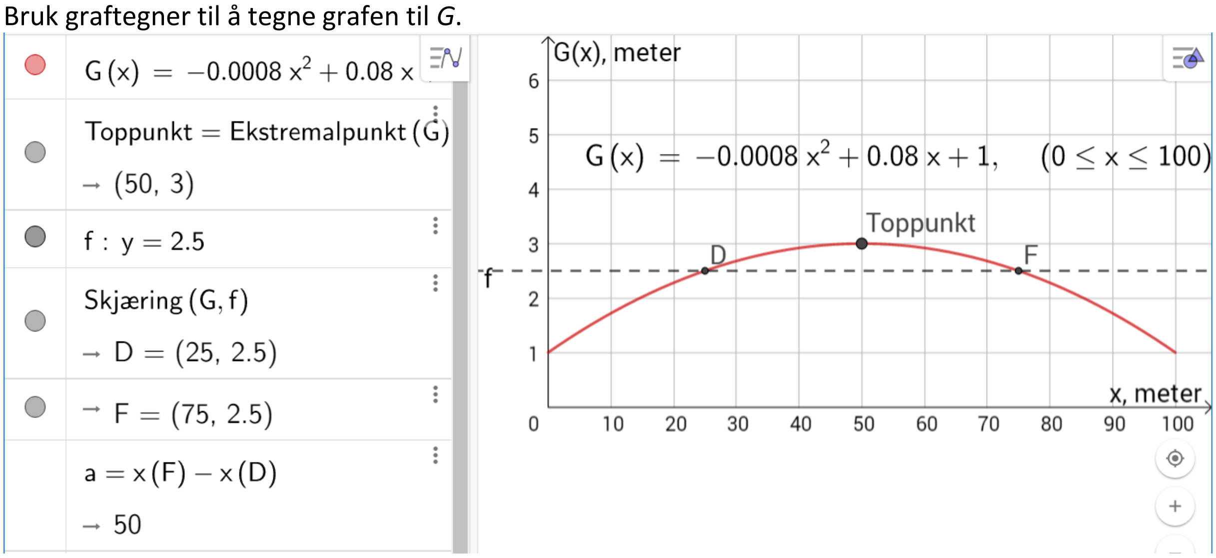


Funksjonen *G* gitt ved

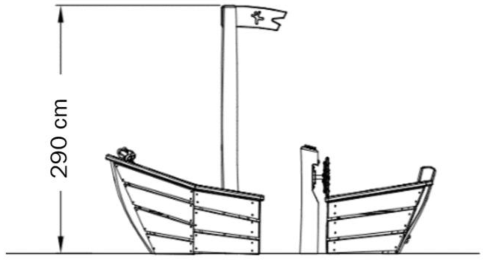
$$G(x) = -0{,}0008x^2 + 0{,}08x + 1 \qquad , \qquad 0 \le x \le 100$$

viser broens høyde $G(x)$ meter over elva ved normal vannstand der den horisontale avstanden fra punktet A er x meter.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *G*.



Brukte kommandoen Funksjon til å skrive inn funksjonen *G*(*x*), se figuren over.



En båt har en mast som når 290 cm over vannflaten. Se ovenfor.

b) Vil båten kunne passere under broen ved normal vannstand?

Toppunktet på grafen har koordinatene (50, 3), se punktet Toppunkt på utklippsbildet i A. Det betyr at det er tre meter ned til vannet på det høyeste, så da skal en båt på 2,90 m høyde så vidt kunne passere under. Kommando: Ekstremalpunkt(G).

Broen hviler på to bropilarer i punktene D og F. Ved normal vannstand er høydene CD og EF fra vannflaten opp til broen lik 2,5 m.

c) Bestem avstanden fra C til E.

Skrev inn linja $y = 2,5$, se linja f i utklippsbildet i a). Fant skjæringspunktene mellom f og grafen til $G(x)$ med kommandoen Skjæring(f, G), se punktene D og F. Regnet så ut forskjellen mellom y-koordinatene, se tallet a.
Avstanden fra C til E er den samme som avstanden fra D til F, som er 50 m.

Oppgave 13 (4 poeng) **(VÅR 2017)**

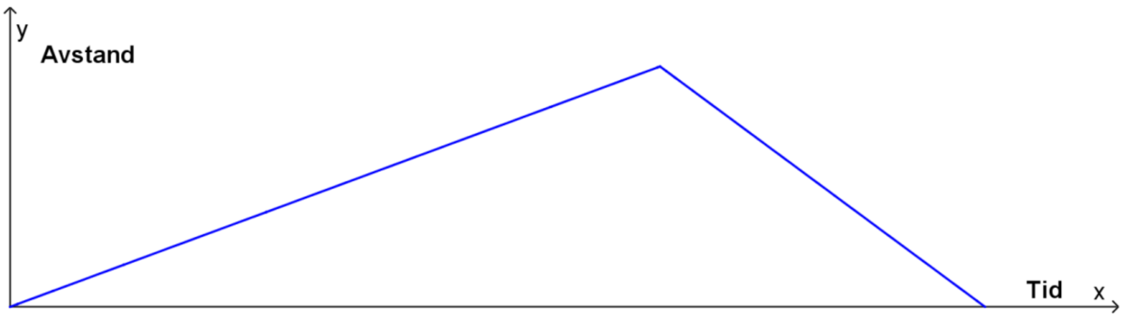
For 20 år siden arvet Ida penger. Hun satte alle pengene inn på en ny bankkonto. Hun har fått en fast rente på 4,25 % per år. I dag har hun 1 724 180 kroner på kontoen.

Hvor mye penger arvet Ida?

CAS	
1	1724180=x*1.0425^20
	NLøs: $\{x = 750000.12\}$

Bruker formelen «ny verdi=gammel verdi*vekstfaktor^antall år» og løser likningen i CAS. Ida arvet 750 000 kroner.

Oppgave 14 (2 poeng) **(VÅR 2017)**



Beskriv en praktisk situasjon som passer med grafen ovenfor.

Dette kan passe med en person som går med konstant fart bortover fra et startsted og på et visst tidspunkt snur brått og går tilbake litt raskere siden grafen er brattere etter knekkpunktet.

Oppgave 15 (4 poeng) **(VÅR 2017)**

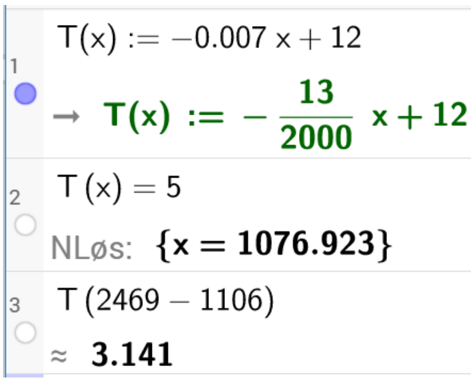
Temperaturen blir lavere jo høyere over havet vi kommer. Spiterstulen ligger 1 106 m over havet. Toppen av Galdhøpiggen ligger 2 469 m over havet. En dag er temperaturen på Spiterstulen 12,0 °C .

Vi antar at temperaturen $T(x)$ °C , *x* meter over Spiterstulen denne dagen er gitt ved.

$$T(x) = -0{,}0065x + 12 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1400$$

a) Hvor høyt over Spiterstulen vil du være når temperaturen er 5 °C denne dagen?
Du vil være 1077 meter over Spiterstulen når temperaturen er 5°C. Se linje 2 på CAS-utklippet.

b) Bestem temperaturen på toppen av Galdhøpiggen denne dagen.
Temperaturen på Galdhøpiggen vil være 3.1 °C. Se linje 3 i CAS-utklippet.



c) Hvor mange grader synker temperaturen med per 100 m stigning denne dagen?
Stigningstallet til T(x) sier at temperaturen synker med 0,0065°C per meter stigning. Per 100 meter stigning synker temperaturen

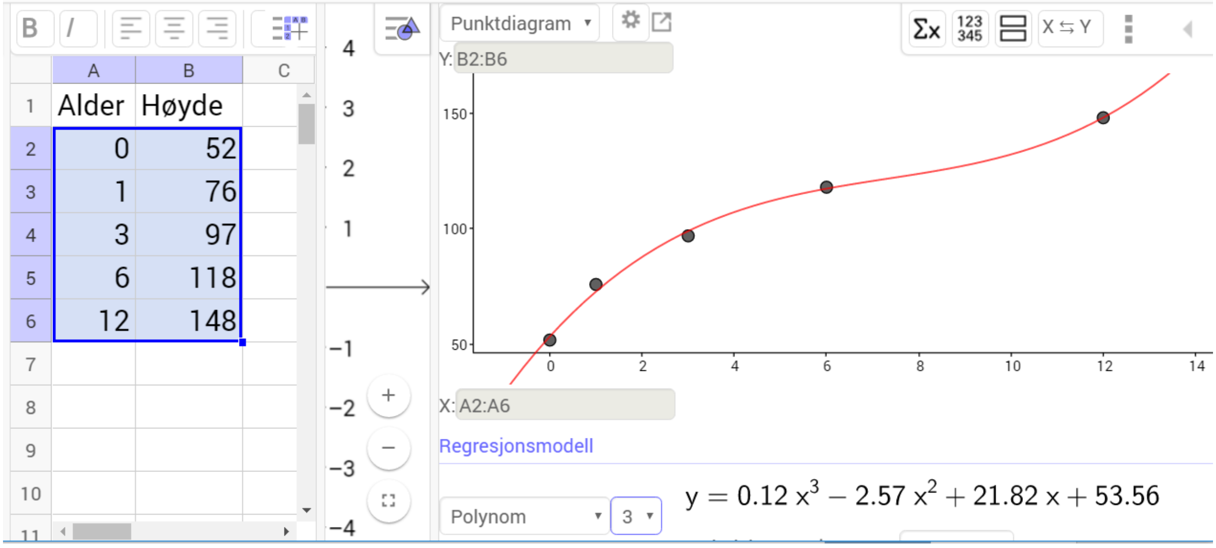
$$0{,}0065 \cdot 100°\text{C per 100 m} = \underline{\underline{0{,}65°\text{C per 100 m}}}$$

Oppgave 16 (5 poeng) **(VÅR 2017)**

Tabellen nedenfor viser hvor høy Per var 0, 1, 3, 6 og 12 år etter fødselen.

Alder (år)	0	1	3	6	12
Høyde (cm)	52	76	97	118	148

a) Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en tredjegradsfunksjon f som tilnærmet viser høyden til Per de første 12 leveårene.



Brukte regresjonsanalyse i GeoGebra på tallene i tabellen og valgte tredjegradspolynom. Den tredjegradsfunksjonen som passer best, er

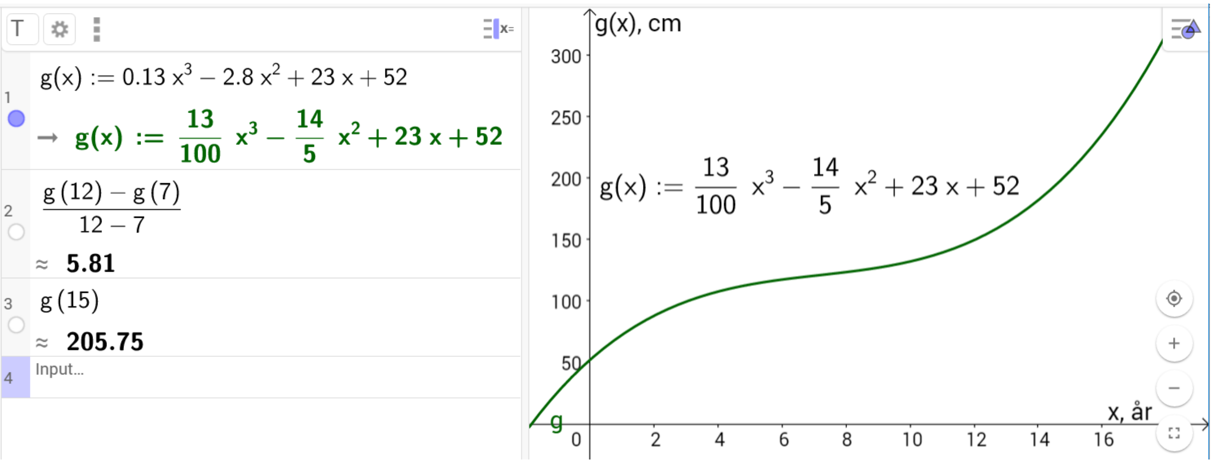
$$\underline{\underline{f(x)=0{,}12x^3-2{,}57x^2+21{,}82x+53{,}56}}$$

Espen er 12 år. Funksjonen *g* gitt ved

$$g(x)=0{,}13x^3-2{,}8x^2+23x+52$$

viser høyden hans $g(x)$ cm, *x* år etter fødselen.

b) Bestem Espens gjennomsnittlige vekstfart fra han var 7 år til han ble 12 år.



Espens gjennomsnittlige vekstfart er <u>5,81 cm per år</u>, se linje 2 i CAS-bildet.

Sitatet nedenfor er hentet fra nettsidene til Norsk Helseinformatikk AS.

> «Gutter har en maksimal høydevekst på ca. 10 cm per år midt i puberteten. Etter vekstspurten i puberteten avtar veksthastigheten ned mot null.»

Anta at Espen kommer i puberteten når han er 12 år.

Puberteten varer vanligvis i to–tre år.

c) Ta utgangspunkt i sitatet ovenfor, og vurder om funksjonen g kan brukes til å bestemme høyden til Espen etter at han har fylt 12 år.
Funksjonen kan ikke brukes etter at Espen har fylt 12 år, fordi grafen stiger til himmels ganske fort, noe også utregningen i linje 3 på CAS-utklippet viser. Det er svært få 15-åringer som er over 2 meter.

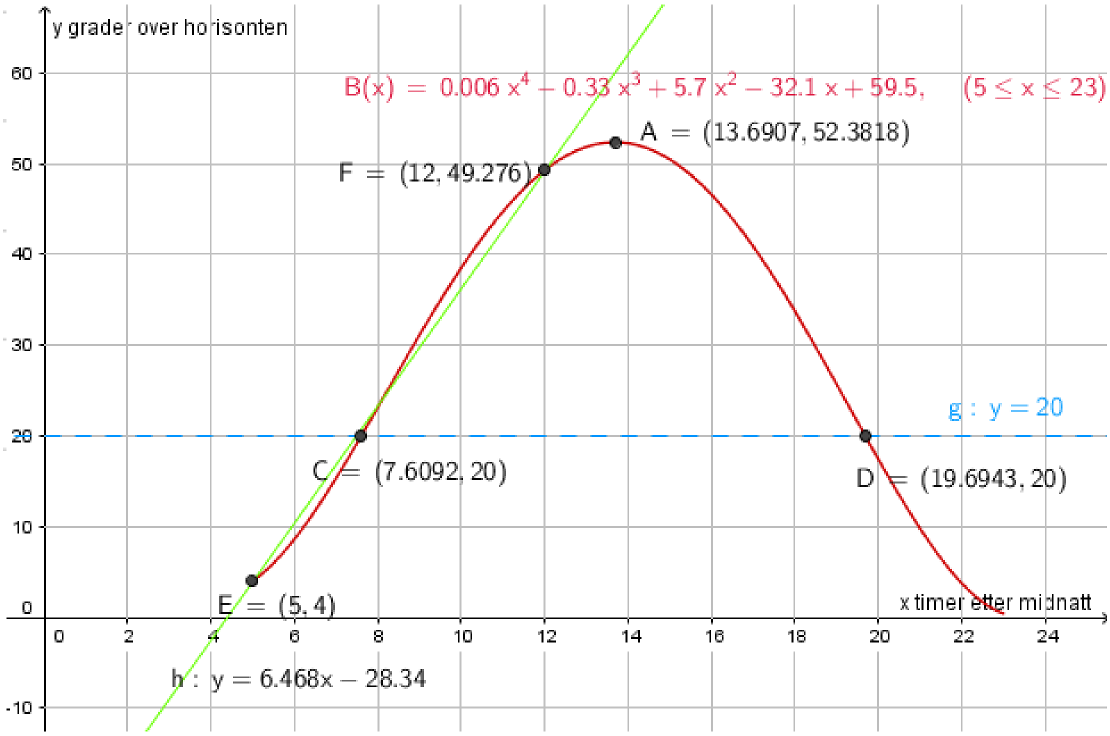
Oppgave 17 (6 poeng) (VÅR 2016)

Funksjonen *B* gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}5 \qquad 5 \le x \le 23$$

viser hvor mange grader $B(x)$ sola står over horisonten *x* timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *B*.
Tegner grafen i GeoGebra ved å bruke kommandoen «Funksjon[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]»



b) Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?
Vi bruker kommandoen «Ekstremalpunkt» og finner toppunktet A = (13,7 , 52,4). Se figur i a. Sola var på sitt høyeste 13,7 timer etter midnatt, da var den 52,4 grader over horisonten.

c) Når stod sola 20 grader over horisonten?
Vi legger inn linja y=20, og bruker kommandoen «Skjæring mellom to objekt», og finner skjæringspunktene C = (7,6 , 20) og D = (19,7 , 20). Se figur i a.
Sola stod 20 grader over horisonten 7,6 timer og 19,7 timer etter midnatt.

d) Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokken 05.00 til klokka 12.00?
Vi setter inn punktene E = (5,B(5) og F = (12,B(12)) i GeoGebra, og bruker kommandoen «Linje» mellom de to punktene. Vi finner gjennomsnittet ved å se på stigningstallet til linja. Se figur i a.
Gjennomsnittsøkningen er 6,5 grader per time fra klokken 05.00 til klokken 12.00.

Oppgave 18 (4 poeng) **(VÅR 2015)**

Per, Pål og Espen skal låne 3 000 kroner hver. Lånene skal betales tilbake etter seks måneder. De får følgende betingelser:

- Per får tilbud om å betale tilbake 3 450 kroner etter seks måneder.
- Pål får tilbud om en månedlig rente på 2,2 %.
- Espen får tilbud om en månedlig rente på 1,8 % og et etableringsgebyr på 100 kroner.

Gjør beregninger, og avgjør hvem som får det beste tilbudet.

Pål må betale $3000 \text{ kr} \cdot 1{,}022^6 = 3418{,}43 \text{ kr}$

Espen må betale $100 \text{ kr} + 3000 \text{ kr} \cdot 1{,}018^6 = 3438{,}93 \text{ kr}$

Pål får det beste tilbudet.

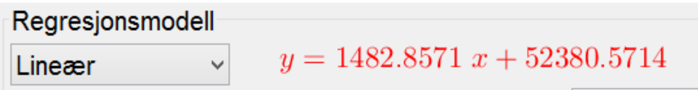
Oppgave 19 (4 poeng) **(VÅR 2015)**

Tabellen nedenfor viser antall kvinnelige studenter i Norge noen utvalgte år.

År	2001	2003	2005	2007	2009	2011	2013
Antall kvinnelige stundenter	53553	58237	59562	63292	62957	68391	73332

La $x = 0$ svare til år 2000, $x = 1$ til år 2001, og så videre.

a) Bruk opplysningene i tabellen til å bestemme en lineær modell som viser hvordan antall kvinnelige studenter har utviklet seg i denne perioden.



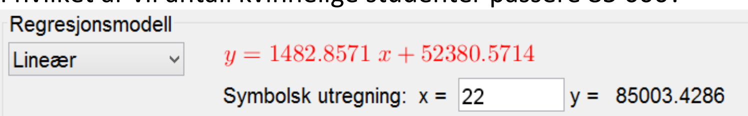
Setter tabellen inn i regneark i Geogebra med x-verdier for årstall og bruker regresjonsanalyse til å finne modellen. Modellen er vist i utklipp ovenfor.

b) Hvor stor har økningen i antall kvinnelige studenter vært i gjennomsnitt per år i denne perioden?

Stigningstallet i modellen er 1482,86.
Den årlige økningen i antall kvinnelige studenter har i snitt vært på ca. 1483 kvinner per år.

Anta at denne utviklingen fortsetter i årene som kommer.

c) I hvilket år vil antall kvinnelige studenter passere 85 000?



Bruker regresjonsverktøyet og prøver meg fram med x-verdier til y passerer 85000. Antall kvinnelige studenter vil passere 85 000 i år 2022.

Oppgave 20 (7 poeng) **(VÅR 2015)**

Ovenfor ser du tre figurer F_1, F_2 og F_1. Tenk deg at du skal fortsette å lage figurer etter samme mønster.

a) Hvor mange linjestykker vil det være i F_4?

I F_1 er det 3 linjestykker.
I F_2 er det 9 linjestykker.
I F_3 er det 18 linjestykker.

I F_4 vil det være $4 \cdot 3 = 12$ linjestykker mer enn i F_3.

<u>Det vil være 30 linjestykker i F_4.</u>

b) Forklar hvordan antall linjestykker endrer seg fra figur til figur, og lag et regneark som gir en oversikt over antall linjestykker i de 20 første figurene $F_1, F_2, \ldots, F_{20}$

I F_4 vil det være $4 \cdot 3 = 12$ linjestykker mer enn i F_3, i F_5 vil det være $5 \cdot 3 = 15$ linjestykker mer enn i F_4, i F_6 vil det være $6 \cdot 3 = 18$ linjestykker mer enn i F_5 osv.

Regneark:

	A	B
1	Figur *F*	Antall linjestykker
2	1	3
3	2	9
4	3	18
5	4	30
6	5	45
7	6	63
8	7	84
9	8	108
10	9	135
11	10	165
12	11	198
13	12	234
14	13	273
15	14	315
16	15	360
17	16	408
18	17	459
19	18	513
20	19	570
21	20	630

Med formler:

	A	B
1	Figur *F*	Antall linjestykker
2	1	3
3	2	=B2+A3*3
4	3	=B3+A4*3
5	4	=B4+A5*3
6	5	=B5+A6*3
7	6	=B6+A7*3
8	7	=B7+A8*3
9	8	=B8+A9*3
10	9	=B9+A10*3
11	10	=B10+A11*3
12	11	=B11+A12*3
13	12	=B12+A13*3
14	13	=B13+A14*3
15	14	=B14+A15*3
16	15	=B15+A16*3
17	16	=B16+A17*3
18	17	=B17+A18*3
19	18	=B18+A19*3
20	19	=B19+A20*3
21	20	=B20+A21*3

Antall linjestykker i figur F_n kan skrives som et andregradsuttrykk.

c) Bruk regresjon til å bestemme dette andregradsuttrykket.

Jeg legger inn tallene i b) i et regneark i GeoGebra, markerer området og velger så kommandoen *Lag liste med punkt*. Listen får da navnet *Liste1*, og jeg skriver så inn kommandoen *RegPoly[Liste1, 2]* I CAS for å finne andregradsuttrykket.

1	RegPoly[Liste1, 2]
	$\rightarrow \; 1.5\, x^2 + 1.5\, x$

Andregradsuttrykket blir $F(n) = 1{,}5n^2 + 1{,}5n$

d) Bruk andregradsuttrykket du fant i oppgave c) til å bestemme hvor mange linjestykker det vil være i F_{20}

$F(20) = 1{,}5 \cdot 20^2 + 1{,}5 \cdot 20 = 630$

Det vil være 630 linjestykker i F_{20}.

Oppgave 21 (6 poeng) **(VÅR 2015)**

Du skal kjøpe ny sykkel, og du vil forsikre den. Dersom sykkelen blir stjålet, må du betale 2000 kroner i egenandel på forsikringen.

Anta at sykkelen koster *P* kroner som ny. Dersom sykkelen blir stjålet før det har gått et år, vil du få utbetalt (*P* - 2000) kroner i erstatning fra forsikringsselskapet. Erstatningen avtar med 10 % per år.

a) Forklar at $F(x) = (P - 2000)\cdot 0{,}9^x$ *er en modell for hvor mye du får utbetalt dersom sykkelen blir stjålet etter x år.*

Sykkelen avtar i verdi med 10 % hver år. Vekstfaktoren blir 0,9. Dersom sykkelen blir stjålet etter ett år må du betale (P – 2000) kroner multiplisert med 0,9. Dersom sykkelen blir stjålet etter x antall år må en opphøye vekstfaktoren i x.

Du velger å kjøpe en sykkel som koster 10 000 kroner.

b) *Hvor mye får du utbetalt dersom sykkelen blir stjålet etter 7 år?*

$$(10000 - 2000)\cdot 0{,}9^7 = 3826{,}38$$

Dersom sykkelen blir stjålet etter 7 år får du utbetalt 3826 kroner.

For å forsikre sykkelen må du betale 150 kroner i forsikringspremie per år.
Anta at sykkelen blir stjålet etter x år.

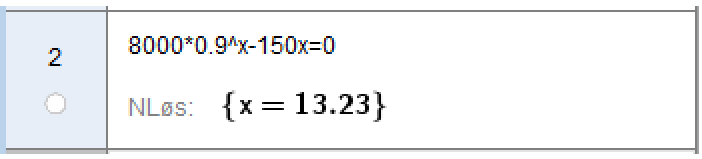
c) *Sett opp en modell som viser hvor mye du totalt sitter igjen med når du tar hensyn til det du har betalt i forsikringspremie i løpet av disse x årene.*

$$\underline{\underline{8000\cdot 0{,}9^x - 150x}}$$

Din venn Ronny mener at du bør si opp forsikringsavtalen etter 13 år.

d) *Ta utgangspunkt i modellen du fant i oppgave c) og kommenter Ronnys utsagn.*

Ved å sette funksjonsuttrykket i c) lik 0, finner jeg tidspunktet der det jeg får utbetalt dersom sykkelen blir stjålet, utgjør like mye som det jeg til sammen har betalt inn i årlig forsikringspremie de årene jeg har hatt sykkelen. Jeg regner i CAS i GeoGebra:



Etter 13,23 år har jeg betalt like mye i forsikringspremie som det jeg kommer til å få igjen dersom sykkelen blir stjålet. Det er nok dette Ronny tenker på, men jeg vil jo fortsatt få igjen mer på forsikringen i de påfølgende årene enn det jeg betaler i årlig forsikringspremie, dersom sykkelen *skulle blir stjålet da. Ved å sette uttrykket* $8000 \cdot 0{,}9^x$ *lik 150 kan jeg finne ut når det jeg vil få igjen på forsikringen er lavere enn det jeg betaler i årlig forsikringspremie. Jeg regner i CAS i GeoGebra:*

3	8000*0.9^x=150
	NLøs: $\{x = 37.74\}$

Etter 37 år bør jeg uansett si opp avtalen, fordi jeg da får igjen mindre enn de 150 kroner jeg må betale i forsikringspremie, men akkurat når det er lurest å si den opp, er ikke så lett å svare på. Etter 13 år vil jeg fortsatt få igjen $8000\text{ kr} \cdot 0{,}9^{13} \approx 2030\text{ kr}$, *som jo er betraktelig mer enn de 150 kronene jeg betaler i forsikringspremie det året. Dersom sykkelen ikke blir stjålet ville jeg ventet noen år til, til beløpet jeg ville fått utbetalt hadde blitt så lavt at jeg jeg ikke lenger følte at det var noe særlig poeng i å betale forsikring. For eksempel etter 25 år, når jeg ikke ville fått igjen mer enn* $8000\text{ kr} \cdot 0{,}9^{25} \approx 570\text{ kr}$.

Oppgave 22 (6 poeng) **(VÅR 2015)**

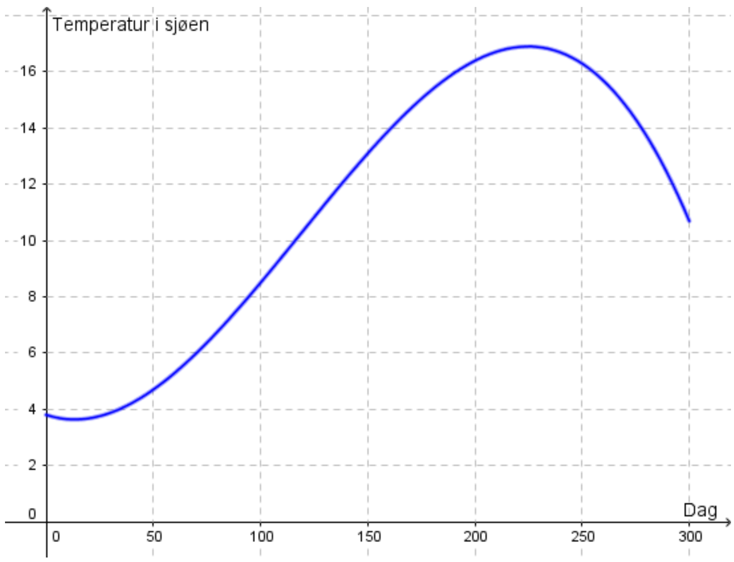
Funksjonen *f* gitt ved

$$f(x) = -0{,}0000028x^3 + 0{,}001x^2 - 0{,}025x + 3{,}8 \qquad 0 \le x \le 300$$

viser temperaturen f (x) grader celsius i sjøen et sted på Sørlandet *x* dager etter 31. desember 2013.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *f*.

Jeg tegner grafen i GeoGebra:

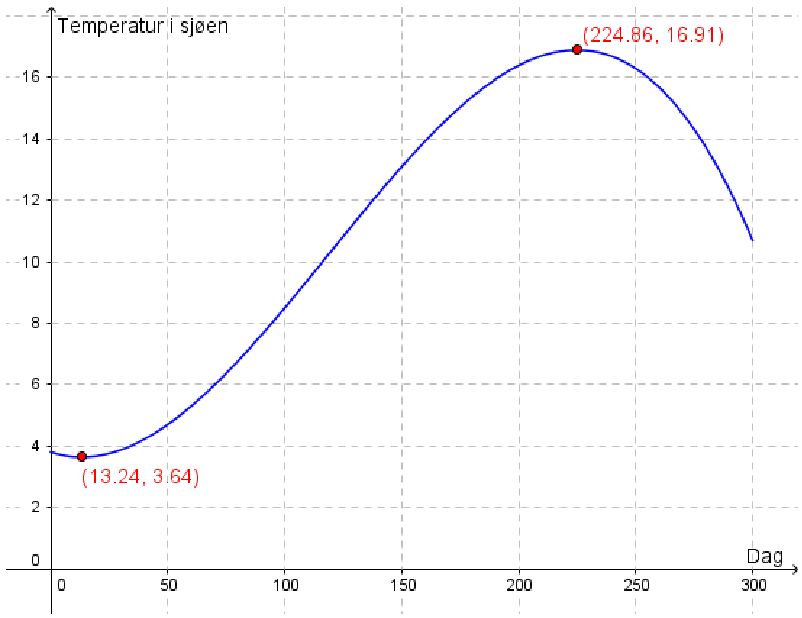


Bestem forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur.

Jeg finner topp- og bunnpunkt ved å bruke kommandoen *Ekstremalpunkt[f]*.

$16{,}91-3{,}64=13{,}27$

Forskjellen mellom høyeste og laveste temperatur er 13,3 °C.

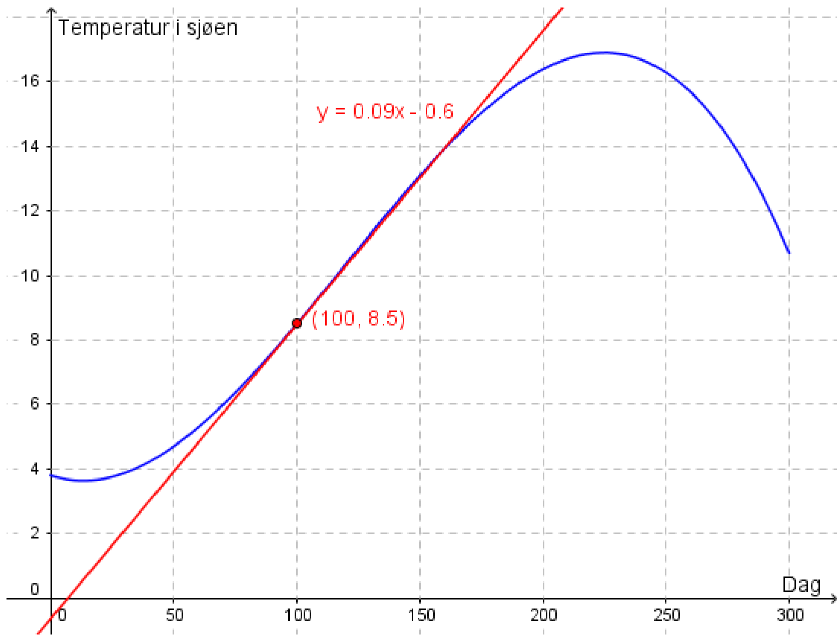


b) Bestem *f*(100) og den momentane vekstfarten til *f* når *x* = 100.
Hva forteller disse svarene?

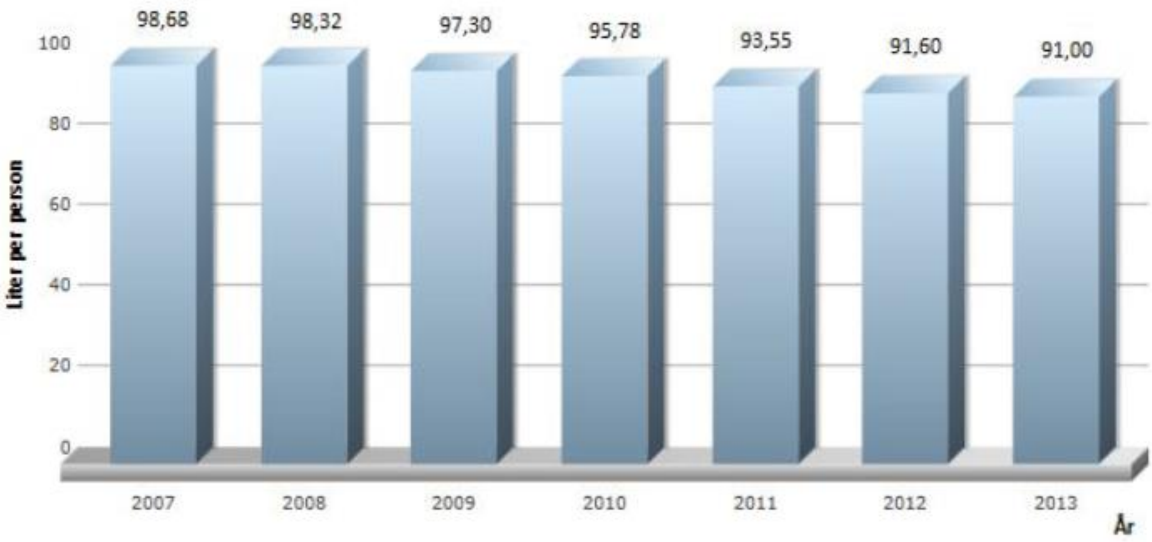
Jeg skriver inn koordinatene (100, *f*(100)) i innskrivingsfeltet og får dette punktet markert på grafen. Deretter bruker jeg kommandoen *Tangenter* for å finne den momentane vekstfarten til *f* i dette punktet. Den momentane vekstfarten er stigningstallet til tangenten.

f(100) = 8,5 og den momentane vekstfarten er 0,09.

Dette betyr at temperaturen 100 dager etter 31. desember 2013 er 8,5, og at temperaturen denne dagen øker med en fart på 0,09 °C per dag.



Oppgave 23 (8 poeng) **(HØST 2014)**



Diagrammet ovenfor viser hvor mange liter melk hver person i Norge drakk i gjennomsnitt hvert år i perioden 2007 – 2013.

Sett x = 0 i 2007, x = 1 i 2008 og så videre.

a) Bruk opplysningene i diagrammet til å bestemme

- en lineær funksjon som viser hvordan forbruket av melk har endret seg i denne perioden
- en andregradsfunksjon som viser hvordan forbruket av melk har endret seg i denne perioden

b) Tegn grafene til funksjonene du fant i oppgave a) i et koordinatsystem for $0 \leq x \leq 25$.

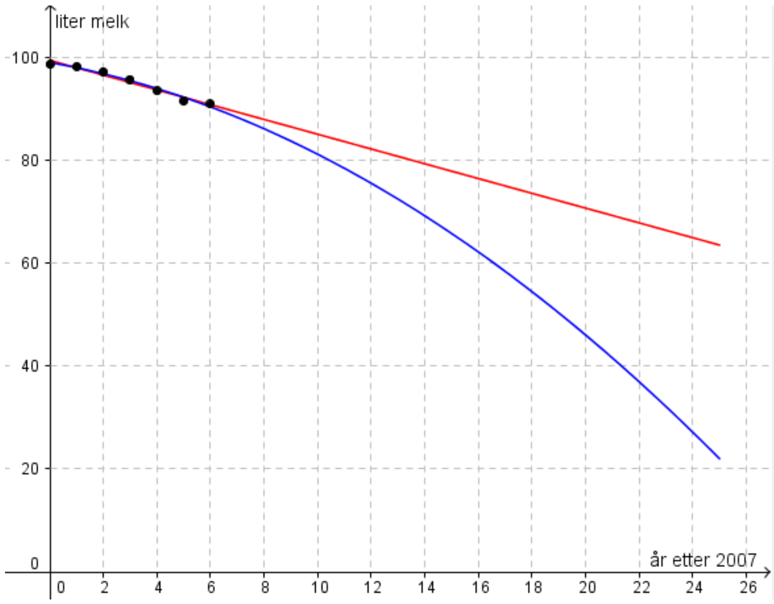
a) og b): Jeg lager en tabell i regnearket i GeoGebra, markerer tallene og velger Lag liste med punkt. Listen får navnet liste 1.

Jeg skriver så kommandoene RegLin[Liste1] og RegPoly[Liste1, 2] i innskrivingsfeltet, og får de to modellene:

$$\underline{\underline{f(x) = -1{,}44x + 99{,}49}}$$

$$\underline{\underline{g(x) = -0{,}09x^2 - 0{,}92x + 99{,}05}}$$

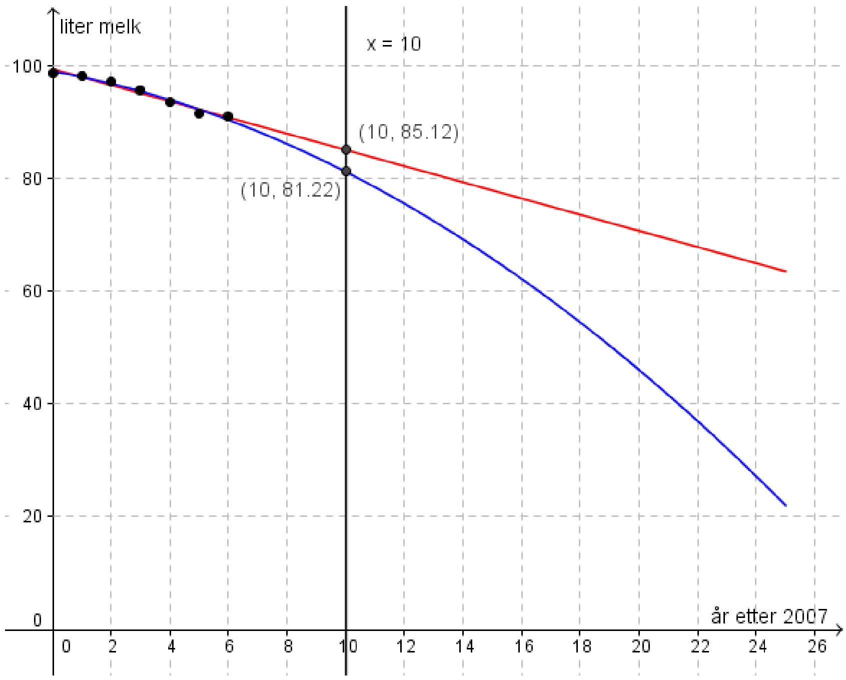
Grafer:



	A	B
1	0	98.68
2	1	98.32
3	2	97.3
4	3	95.78
5	4	93.55
6	5	91.6
7	6	91
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

c) Hvor mange liter melk vil hver person i Norge i gjennomsnitt drikke hvert år om ti år ifølge hver av de to funksjonene?

Jeg skriver x = 10 i innskrivingsfeltet, og finner skjæringspunktet mellom denne linjen og de to grafene ved å bruke kommandoen «*Skjæring mellom to objekt*»:

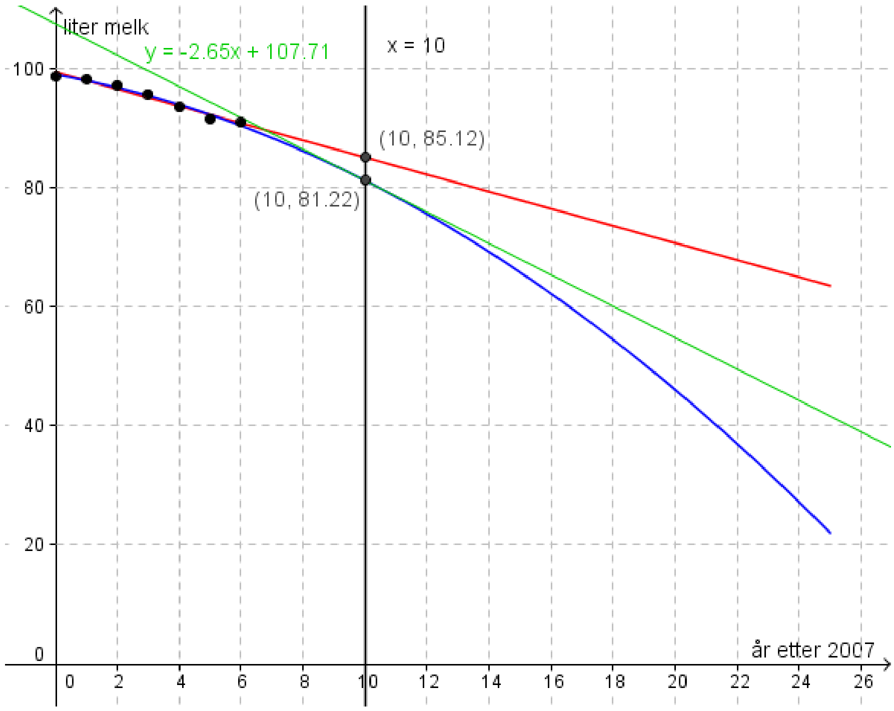


I følge den lineære modellen, vil hver person drikke 85,12 liter melk i 2017.
<u>I følge andregradsmodellen, vil hver person drikke 81,22 liter melk i 2017.</u>

d) Hvor mange liter vil forbruket per person avta med per år om ti år ifølge hver av de to funksjonene?

I den lineære modellen avtar forbruket per person konstant med 1,44 liter per år hele perioden.

For å finne hvor mye forbruket avtar per år i andregradsmodellen, bruker vi kommandoen «*Tangenter*», og lager en tangent (grønn linje) i punktet (10, 81.22). Stigningstallet til denne tangenten forteller oss hvor mye forbruket avtar med per år dette året.



Ifølge den lineære modellen avtar forbruket per person med 1,44 liter per år i 2017.
<u>Ifølge andregradsmodellen avtar forbruker per person med 2,65 liter per år i 2017.</u>

Oppgave 24 (5 poeng) **(HØST 2014)**

En tankbil med gift har vært innblandet i en ulykke. Noe av giften har havnet i en innsjø. Innsjøen brukes som drikkevannskilde.

Giftkonsentrasjonen $f(x)$ mg/L i drikkevannet x døgn etter ulykken er gitt ved

$$f(x) = 1{,}42 \cdot 0{,}87^x$$

a) Bestem giftkonsentrasjonen i drikkevannet rett etter ulykken.
Hvor mange prosent avtar giftkonsentrasjonen i drikkevannet per døgn?

$f(0) = 1{,}42 \cdot 0{,}87^0 = 1{,}42$

Vekstfaktoren er 0,87. Da avtar konsentrasjonen med 1 – 0,87 = 0,13 per døgn.

Giftkonsentrasjonen er på 1,42 mg/L rett etter ulykken, og av tar så med 13 % per døgn.

b) Hvor mye avtok giftkonsentrasjonen i drikkevannet i gjennomsnitt per døgn den første uken etter ulykken?

Regner i CAS i GeoGebra:

1	f(x):=1.42*0.87^x ✓ $f(x) := 1.42 \cdot 0.87^x$
2	(f(7)-f(0))/7 ✓ $\frac{f(7) - f(0)}{7}$
3	(f(7)-f(0))/7 ≈ -0.13

Giftkonsentrasjonen avtok i gjennomsnitt med 0,13 mg/L per døgn den første uken etter ulykken.

Når giftkonsentrasjonen kommer under 0,40 mg/L, er det ikke lenger farlig å drikke vannet.

c) Hvor mange døgn tar det før vannet igjen kan drikkes?

Regner i CAS i GeoGebra:

4	f(x)=0.4 NLøs: $\{x = 9.1\}$

Det tar litt over 9 døgn før vannet igjen kan drikkes.

Oppgave 25 (4 poeng) **(HØST 2014)**

Da Mads og Malin ble konfirmert, opprettet de hver sin konto i banken. Begge satte inn 25 000 kroner. Renten er 2,25 % per år.

a) Hvor mye vil Mads ha på kontoen 10 år etter konfirmasjonen dersom han lar pengene stå urørt?
Hvor mange prosent har beløpet på kontoen hans til sammen økt i denne perioden?

Regner i CAS i GeoGebra:

1	25000*1.0225^10 ≈ **31230.09**
2	(31230.09-25000)/25000 ≈ **0.25**

Mads vil ha 31 230 kroner på kontoen etter 10 år. Beløpet har da vokst med til sammen 25 %.

Malin lar pengene stå urørt i 5 år. Så setter hun inn 25 000 kroner til på kontoen sin.

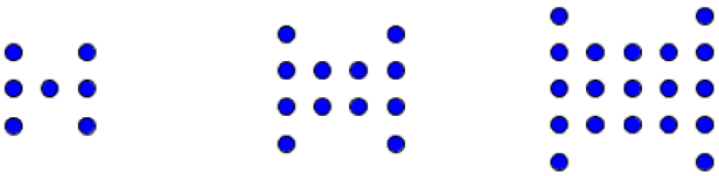
b) Hvor mye vil Malin ha på kontoen 10 år etter konfirmasjonen?

Regner i CAS i GeoGebra:

3	25000*1.0225^5 ≈ **27941.94**
4	(27941.94+25000)*1.0225^5 ≈ **59172.03**

Malin vil ha 59 172 kroner på kontoen etter 10 år.

Oppgave 26 (4 poeng) **(HØST 2014)**



F_1 $\quad$ F_2 $\quad$ F_3

Ole lager figurer av runde perler. Ovenfor ser du tre figurer, F_1, F_2 og F_3.

a) Følg samme mønster, og tegn figuren F_4.

b) Sett opp en modell som viser hvor mange perler det vil være i figur F_n uttrykt ved *n*.

$$F_1 = 2 \cdot 3 + 1$$
$$F_2 = 2 \cdot 4 + 4$$
$$F_3 = 2 \cdot 5 + 9$$
$$F_4 = 2 \cdot 6 + 16$$

$$\underline{\underline{F_n = 2(n+2) + n^2}}$$

c) Bruk modellen til å bestemme hvor mange perler det vil være i figuren F_{50}.

$$F_{50} = 2 \cdot (50+2) + 50^2 = 104 + 2500 = 2604$$

Det vil være 2604 perler i figuren F_{50}.