

Løsningsforslag oppgaver u/hjelpemidler

Oppgave 1

a)

ANTALL MÅL	FREKVENNS	TOTALT ANT. MÅL
0	2	$0 \cdot 2 = 0$
1	6	$1 \cdot 6 = 6$
2	3	$2 \cdot 3 = 6$
3	4	$3 \cdot 4 = 12$
4	1	$4 \cdot 1 = 4$
	$N=16$	$S=28$

$$\bar{G} = \frac{S}{N} = \frac{28:4}{16:4} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Oda skåret i gjennomsnitt 1,75 mål per kamp.

Median:

0 0 1 1 1 1 1 (1 2) 2 2 3 3 3 3 4

$$\text{Median: } \frac{1+2}{2} = 1,5$$

Medianen var 1,5 mål per kamp

b) Utvider med kumulativ og relativ frekvens (c):

ANTALL MÅL	FREKVENNS	KUMULATIV FREKVENNS	RELATIV FREKVENNS
0	2	2	$\frac{2:4}{16:4} = \frac{0,5 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$
1	6	$2+6=8$	$\frac{8:4}{16:4} = \frac{2 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{50}{100} = 50\%$
2	3	$8+3=11$	$\frac{11:4}{16:4} = \frac{97,5 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{18,75}{100} = 18,75\%$
3	4	$11+4=15$	$\frac{15:4}{16:4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 25\%$
4	1	$15+1=16$	$\frac{1:4}{16:4} = \frac{0,25 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{6,25}{100} = 6,25\%$
	$N=16$		$= 100\%$

Den kumulative frekvensen for 2 mål er 11.

c) Den relative frekvensen for 3 mål er 25%.

d) Kumulativ frekvens: Forteller at Oda skåret 2 mål eller færre i 11 av kampene hun spilte.

Relativ frekvens: Forteller at Oda skåret 3 mål i 25% av kampene hun spilte.

Oppgave 2

2, 5, 8, 10, 10, 15, 22, 28, 40, 50

Skriver tallene opp i stigende rekkefølge med tanke på median. Tall nummer fem er 10 og tall nummer seks er 15. Median bli gjennomsnittet av disse:

$$\frac{10+15}{2} = 12,5$$

Median er 12,5

$$\text{Gjennomsnitt: } \frac{2+5+8+10+10+15+22+28+40+50}{10} = 19$$

Gjennomsnittet er 19.

Variasjonsbredden er $50 - 2 = 48$.

Oppgave 3

Man antar at resultatenes fordeler seg jevnt utover intervallet i den enkelte klasse.

Poeng	Antall spillere, f	Klassemidtpunkt x	$x \cdot f$
[0, 40>	60	20	1200
[40, 80>	20	60	1200
[80, 120>	16	100	1600
[120, 180>	4	150	600
Total	100		4600

$$\text{Gjennomsnitt: } \frac{4600}{100} = 46$$

Gjennomsnittet er 46 poeng.

Rangerer verdiene i stigende rekkefølge:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 7, 11, 28, 32

a)

Median: Det er 20 verdier. Median blir da gjennomsnittet av verdi nr. 10 og nr. 11. Begge disse verdiene er 2, så median er 2.

$$\text{Gjennomsnitt} = \frac{0+0+0+0+0+0+1+1+1+2+2+2+3+3+3+4+7+11+28+32}{20} = \frac{100}{20} = 5$$

Typetall: Det er fles elever (6) med null dagers fravær. 0 er derfor typetallet.

b)

Vi ser at 4 av 20 elever bidrar betydelig til å trekke opp gjennomsnittet. 12 elever har et fravær på median eller lavere. Det er derfor naturlig å bruke median som sentralmål.

Oppgave 5

Lommepenger (kroner)	Antall elever f	Klassemidpunkt x_m	Klassesum $f \cdot x_m$
[0, 300)	30	150	4500
[300, 600)	15	450	6750
[600, 900)	5	750	3750
	$N = 50$		$S = 15000$

For å regne ut gjennomsnittet i klassesdelt materiale må vi anta at gjennomsnittet i hvert av de tre intervallene ligger på klassemidpunktet. Slik trenger det ikke å være, men det er det beste vi har, fordi vi vet bare at 30 elever ligger mellom ingen lommepenger og opp til 299,99 kroner. Dersom disse 30 fordeler seg jevnt i intervallet blir gjennomsnittet for intervallet tilnærmet riktig, men vi har jo ingen garanti for at det er slik. Men, på grunnlag av antagelsen:

$$\text{Gjennomsnitt} \frac{S}{N} = \frac{15000}{50} = 300 \text{ Kr.}$$

Oppgave 6

a)

Finn median:

Sorterer observasjonene: $1_{(1)} \ 1_{(2)} \ 1_{(3)} \ 2_{(4)} \ 2_{(5)} \ 3_{(6)} \ 3_{(7)} \ 4_{(8)} \ 5_{(9)} \ 5_{(10)}$

Finner antall observasjoner: $N = 10$

Finner midtpunktet: $\frac{N+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5.5$

Fordi det er et partall antall observasjoner er medianen lik gjennomsnittet av de to verdiene som ligger på hver sin side av midtpunktet

Medianen er gjennomsnittet av verdiene nummer 5 og 6. $\frac{2+3}{2} = 2.5$

Finner gjennomsnitt:

Finner summen av observasjonsverdiene: $S = 1 + 5 + 3 + 3 + 5 + 2 + 1 + 4 + 1 + 2 = 27$

Finner antall observasjoner: $N = 10$

Gjennomsnittet er da: $\frac{S}{N} = \frac{27}{10} = 2.7$

Finn typetall:

Teller opp verdiene og lager en frekvenstabell:

Verdi x	Frekvens f
1	3
2	2
3	2
4	1
5	2

Ser i tabellen og finner de hyppigst forekommende verdiene

Typetall(ene) er: 1

b)

Verdi x	Frekvens f	Kumulativ frekvens
1	3	3
2	2	$3+2 = 5$
3	2	$5+2 = 7$
4	1	$7+1 = 8$
5	2	$8 + 2 = 10$

Inntekt (i 1000 kroner)	Klassemidtpunkt x_m	Antall personer f	Klassesum $f \cdot x_m$
[300, 400)	350	20	7000
[400, 500)	450	20	9000
[500, 700)	600	10	6000
		$N = 50$	$S = 22000$

Gjennomsnittet er omtrent: $g = \frac{S}{N} = \frac{22000}{50} = 440$ tusen kroner

Oppgave 8

4, 5, 6, 8, 10, 10, 12, 12, 12, 15, 18, 20

Median: Gjennomsnitt av tall nr. 6 og 7 : 11

Typetall: den størrelsen som opptrer flest ganger 12

Gjennomsnitt: $\frac{4+5+6+8+10+10+12+12+12+15+18+20}{12} = 11$

Variasjonsbredde: $20 - 4 = 16$

Oppgave 9

Median. Vi sier at medianeleven er elev nr 5, altså den nest siste i interval nr. to. Får da $50 + \frac{4}{5} \cdot 50 \approx 90$ kr

Gjennomsnitte: antar at elevene fordeler seg jevnt i intervallene: $\frac{1 \cdot 25 + 5 \cdot 75 + 1 \cdot 125 + 3 \cdot 175}{10} \approx 105$ kr

Oppgave 10

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6

Variasjonsbredde : $6 - 1 = 5$

Typetall : 4

Median: $\frac{3+4}{2} = 3,5$

Gjennomsnitt: $\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{20} = \frac{66}{20} = 3,3$

Oppgave 11

Intervall	Frekvens
[0,20>	3
[20,40>	6
[40,60>	3
[60,80>	4
[80,100>	4

Medianen ligger i klassen [40, 60>

Gjennomsnitt = $\frac{3 \cdot 10 + 6 \cdot 30 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 70 + 4 \cdot 90}{20} = 50$ Gjennomsnittet ligger i området rundt 50 tekstmeldinger.

Oppgave 12

2, 1, 3, 4, 5, 5, 3, 6, 4, 3

Vi ordner i stigende rekkefølge:

1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6

Median er de to tallene i midten, delt på to. $3 + 4 = 7$. Så deler man på to: $7:2 = 3,5$

Variasjonsbredden er $6 - 1 = 5$, forteller oss bare at hele skalaen er i bruk.

Gjennomsnitt: $\frac{1+2+3+3+3+4+4+5+5+6}{10} = 3,6$

Oppgave 13

Fart (km/t)	Antall biler	klassemidtpunkt	klassemidtpunkt · frekvens
[20,30>	20	25	500
[30,40>	20	35	700
[40,50>	10	45	450
			1650

Gjennomsnitt: $1650:50 = 33$ kilometer i timen.

Oppgave 14

0, 0, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5

1)

$$\text{Median} = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

$$\text{Gjennomsnitt} = \frac{2+2+2+3+4+5+5+5}{10} = 2,8$$

Antall Mål	Frekvens	Kumulativ Frekvens
0	2	2
1	0	2
2	3	5
3	1	6
4	1	7
5	3	10

5

3) Den kumulative frekvensen for to mål er fem. Det betyr at i fem av kampene ble det skåret to mål eller mindre.

Oppgave 15

Antall minutter	Midtpunkt, x_m	Antall elever, f	$x_m \cdot f$
[0,30>	15	1	15
[30,60>	45	3	135
[60,120>	90	5	450
[120, 240>	180	1	180
SUM		10	780

Vi forutsetter at elevene i de forskjellige intervallene fordeler seg jevnt rundt midtpunktet i intervallet. Dette er derfor en for tilnærming.

$$\text{Gjennomsnitt} \frac{780}{10} = 78 \text{ minutter.}$$

Oppgave 16

-6, -4, 0, 2, 2, 6.

Variasjonsbredde: $6 - (-6) = 12$

Variasjonsbredden er 12 grader.

Median: $\frac{0+2}{2} = 1$

Median er 1 grad.

Gjennomsnitt: $\frac{-6+(-4)+0+2+2+6}{6} = \frac{0}{6} = 0$

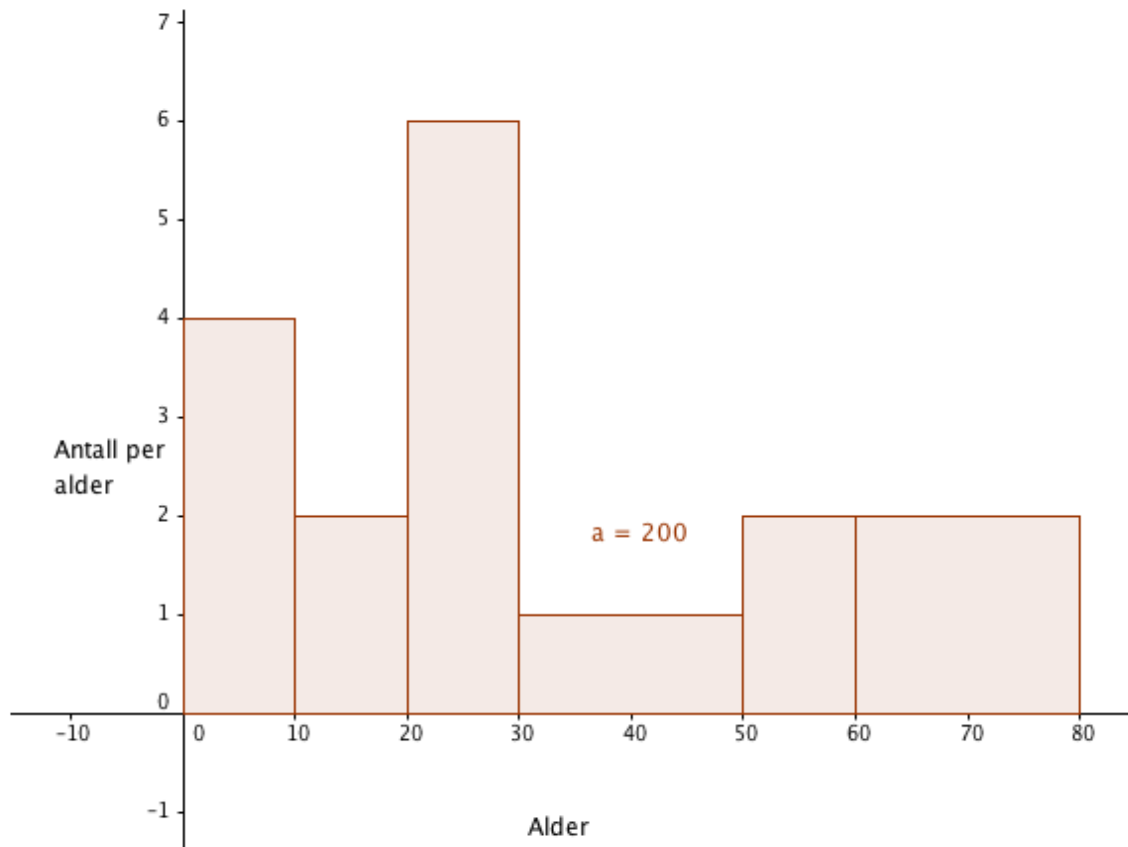
Gjennomsnittstemperaturen denne perioden er null grader celsius.

Oppgave 17

a)

For å finn histogramhøyden tar man frekvens delt på klassebredde, for hver enkelt klasse.

	A	B	C	
1	Klassegrenser	Frekvens	Hist. høyde	
2	0	40	4	
3	10	20	2	
4	20	60	6	
5	30	20	1	
6	50	20	2	
7	60	40	2	
8	80			
9	Sum	200		



b)

Gjennomsnitt i klassesdelt materiale: vi antar at elementene i klassen (personer) fordeler seg jevnt utover i klassen. Kan da bruke klassemiddpunkt (alder) og multiplisere med frekvens.

Klasse	klassebredde - m	frekvens - f	m * f
[0, 10>	5	40	200
[10, 20>	15	20	300
[20, 30>	25	60	1500
[30, 50>	40	20	800
[50, 60>	55	20	1100
[60, 80>	70	40	2800

For å finne gjennomsnittet tar man summen av alle produktene m*f og deler på antall personer som er 200.

$$\frac{\sum(m \cdot f)}{200} = \frac{200+300+1500+800+1100+2800}{200} = 33,5$$

Gjennomsnittsalderen på beboerne i blokka er ca 33,5 år.

c)

Medianalderen er gjennomsnittet av person nr. 100 og 101, når det er arrangert i stigende rekkefølge. Disse personene befinner seg i klassen 20 - 30 år. I denne klassen er det 6 personer på hvert årstrinn hvilket betyr at medianalderen er ca. 27 år. Aurora er ca. fem år eldre enn medianalderen, men kan jo trøste seg med at hun er yngre enn gjennomsnittet.

Oppgave 18

a)

Når man jobber med klassedelt materiale må man forutsette at observasjonene fordeler seg jevnt utover i klassens intervall. Dette er trolig ikke tilfelle, men det beste vi kan forutsette siden vi ikke har detaljkunnskap inne hver klasse. Feilen fra denne forutsetningen blir ofte liten. Median av hundre verdier er gjennomsnittet av verdi 50 og 51. Vi ser at i bedrift A er begge disse i klassen 20 - 40 år. Dvs medianalderen er under 40 år i bedrift A. I bedrift B ligger den i klassen 40 - 60 år, altså høyere.

b)

Gjennomsnittet i klassedelt materiale finnes ved å finne klassemidtpunktene i hver av klassene og gange disse med respektive frekvenser. Summer alt og del på antall observasjoner.

Gjennomsnitt bedrift B:

$$\frac{30 \cdot 35 + 50 \cdot 45 + 65 \cdot 20}{100} = \frac{1050 + 2250 + 1300}{100} = \frac{4600}{100} = 46$$

Gjennomsnittsalderen er ca 46 år i bedrift B.

Oppgave 19

a)

Det er 20 elever i hver klasse!!! (Altså et sted uten stykkprisfinansiering).

$$1A: \text{Gjennomsnitt: } \frac{5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{20}$$

$$\frac{68}{20} = 3,4$$

$$1B: \text{Gjennomsnitt: } \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{20}$$

$$\frac{68}{20} = 3,4$$

Gjennomsnittet i 1A er 3,4 , og i 1B er det 3,4.

b)

Standardavvik er et mål på spredningen i datamaterialet. Vi er ikke bedt om å regne ut standardavviket, bare begrunne i hvilken klasse det er størst. Dersom mange observasjoner ligger langt fra gjennomsnittet er standardavviket stort. I klasse 1A ser vi at det er mange som har karakter 1 og 2, og 5 og 6. Det er karakterer som ligger langt fra gjennomsnittet på 3,4. Det er faktisk bare tre elever som ligger i det området. I klasse 1B er det 11 elever som ligger rundt gjennomsnittet.

Standardavviket er derfor størst i 1A.

c)

Karakter	Antall (frekvens) A	Kumulativ A	Antall(frekvens) B	Kumulativ B
1	5	5	1	1
2	4	9	3	4
3	2	11	5	9
4	1	12	6	15
5	3	15	4	19
6	5	20	1	20

Den kumulative frekvens for 3 i 1A er 11. Det betyr at 11 personer i klassen har 3 eller dårligere. Den kumulative frekvensen i 1B er 9.

d)

Den relative frekvensen for 6 i 1A er $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Den relative frekvensen for 6 i 1B er $\frac{1}{20}$

Oppgave 20

Median av seks målinger er gjennomsnittet av måling 3 og 4.

Tre tall er allerede under 7, det betyr at tall nr 3 er 6 (fredag). Det betyr at det må være 8 grader på lørdag, dersom median skal bli 7, fordi $8 + 6 = 14$, som delt på to er 7.

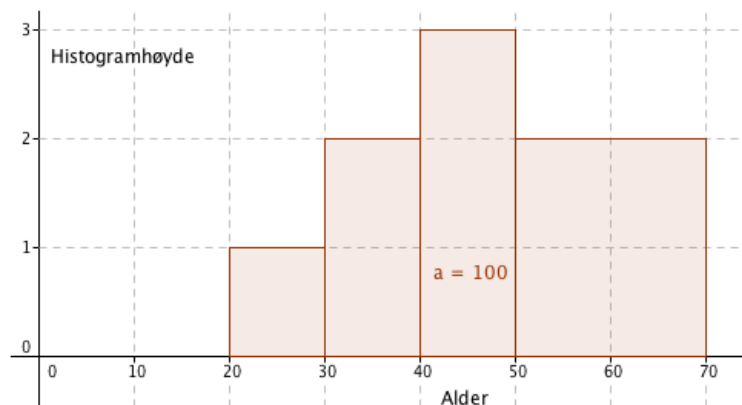
Oppgave 21

a)

Gjennomsnitt i klassedelt materiale finner man ved å anta at verdiene i hver klasse fordeler seg jevnt rundt klassemidtpunktet. Vi får da:

$$Gj = \frac{25 \cdot 10 + 35 \cdot 20 + 45 \cdot 30 + 60 \cdot 40}{100} = \frac{4700}{100} = 47 \text{ år.}$$

b)



c)

Alder	frekvens	relativ frekvens	kumulativ frekvens
[20,30>	10	$\frac{1}{10}$	10
[30, 40>	20	$\frac{2}{10}$	30
[40,50>	30	$\frac{3}{10}$	60
[50,70>	40	$\frac{4}{10}$	100

Oppgave 22

Vi sorterer tallene fra minst til størst

0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 4 5 5 6 8 9

Medianen er den midterste verdien, som vil si midt mellom tall nummer 10 og 11:

$$\frac{2+2}{2} = \underline{\underline{2}}$$

Variasjonsbredden er høyeste antall ganger - minst antall ganger = $9 - 0 = \underline{\underline{9}}$

Vi finner gjennomsnittet

$$\begin{aligned} & \frac{(2 \cdot 0) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 2) + (3 \cdot 3) + 4 + (2 \cdot 5) + 6 + 8 + 9}{20} \\ &= \frac{4 + 10 + 9 + 4 + 10 + 6 + 8 + 9}{20} \\ &= \frac{60}{20} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

Oppgave 23 (6 poeng) (V19)

- a) Bestem gjennomsnittet for datamaterialet.

Vi finner midten av hver inndeling av reisetid og beregner gjennomsnittet:

$$\frac{(60 \cdot 5) + (80 \cdot 15) + (50 \cdot 30) + (10 \cdot 60)}{200} = \frac{300 + 1200 + 1500 + 600}{200} = \frac{3600}{200} = 18$$

Gjennomsnittet for reisetiden fra bosted til skole er 18 minutt.

Stine påstår at medianen for datamaterialet er ca. 15 minutter.

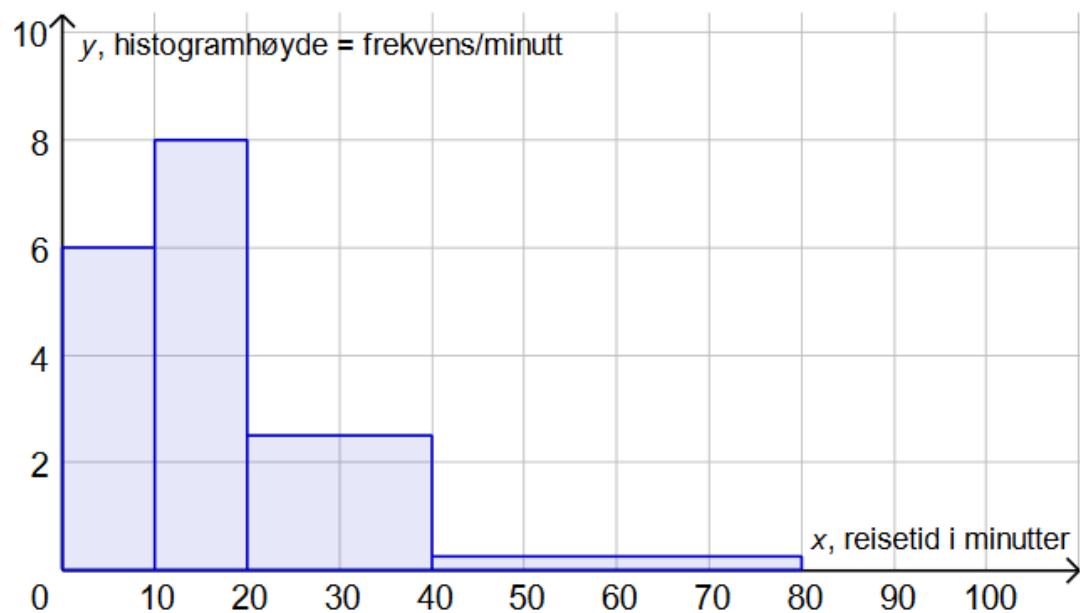
- b) Hvordan kan hun argumentere for denne påstanden, og hvilke antagelser har hun gjort?

Jeg tror at Stine har funnet medianen ved å finne kumulativ frekvens. Hun har summert antall målinger og funnet ut hvilken klasse elev nummer 100 befinner seg i. Hun kan argumentere for at den midterste eleven ligger i klassen fra og med 10 minutter til 20 minutter. Deretter har hun antatt at målingene er jevnt fordelt i denne klassen. Hun påstår dermed at medianen er omtrent midt i denne klassen, altså ca. 15 minutter.

c) Lag et histogram som viser fordelingen av reisetider.

Vi regner histogramhøydene for de ulike klassene.

Reisetid i minutter	Frekvens	Histogramhøyde $\frac{\text{Frekvens}}{\text{Klassebredde}}$
$[0,10)$	60	$\frac{60}{10} = 6$
$[10,20)$	80	$\frac{80}{10} = 8$
$[20,40)$	50	$\frac{50}{20} = 2,5$
$[40,80)$	10	$\frac{10}{40} = 0,25$
Totalt	200	



Oppgave 24 (3 poeng) (H18)

Lotte har spurt 10 medelever om hvor mange ganger de handler i kantina i løpet av en uke. Resultatene ser du nedenfor.

1 5 1 3 3 1 4 2 4 0

Bestem medianen, gjennomsnittet, typetallet og variasjonsbredden for dette datamaterialet.

Medianen: Sorterer tallene i stigende rekkefølge.

0 1 1 1 2 3 3 4 4 5

Finner gjennomsnittet av de to midterste tallene. $\frac{2+3}{2} = \underline{\underline{2,5}}$

Gjennomsnittet: $\frac{0+1+1+1+2+3+3+4+4+5}{10} = \frac{24}{10} = \underline{\underline{2,4}}$

Typetallet: Det er flest som har vært 1 gang i kantina, og da er typetallet 1.

Variasjonsbredden: Flest antall ganger i kantina – Færrest antall ganger i kantina

$$5 - 0 = \underline{5}$$

Oppgave 25 (2 poeng) (H18)

Tone spiller håndball. Tabellen nedenfor viser den kumulative frekvensen for antall mål hun skåret i de seks første kampene hun spilte.

Kamp nummer	Kumulativ frekvens for antall mål Tone skåret
1	4
2	12
3	15
4	21
5	25
6	30

- a) Hvor mange mål skåret Tone i kamp nummer 4?
Finner frekvensen for kamp nummer 4:

Kamp nummer	Kumulativ frekvens for antall mål Tone skåret	Frekvens = antall mål
1	4	4
2	12	$12 - 4 = 8$
3	15	$15 - 12 = 3$
4	21	$21 - 15 = 6$
5	25	$25 - 21 = 4$
6	30	$30 - 25 = 5$

Etter kamp nummer 4 hadde Tone skåret 21 mål. Etter kamp nummer 3 hadde Tone skåret 15 mål. Differansen mellom kamp nummer 4 og kamp nummer 3 er $21 - 15 = 6$. Tone skåret 6 mål i kamp nummer 4.

- b) Hvor mange mål skåret Tone i gjennomsnitt per kamp?

Finner gjennomsnitt ved å legge sammen antall mål i hver kamp og dele på antall kamper.

$$\frac{4 + 8 + 3 + 6 + 4 + 5}{6} = \frac{30}{6} = 5 \quad \text{Tone skåret i gjennomsnitt 5 mål per kamp.}$$

Oppgave 26 (4 poeng) (H18)

Grethe har en klokke som registrerer hvor mange tusen skritt hun går hver dag. Ut fra målingene de 14 siste dagene har hun satt opp tabellen nedenfor.

Antall tusen skritt	Antall dager
$[0, 10)$	4
$[10, 15)$	3
$[15, 20)$	3
$[20, 30)$	4

- a) Bestem gjennomsnittet for det klassesdelte datamaterialet.
Finner klassemidtpunkt for hver klasse – se tabell under.

Antall tusen skritt	Antall dager = frekvens	Klassemidtpunkt	Klassemidtpunkt multiplisert med frekvens
$[0, 10)$	4	5	$4 \cdot 5 = 20$
$[10, 15)$	3	12,5	$3 \cdot 12,5 = 37,5$
$[15, 20)$	3	17,5	$3 \cdot 17,5 = 52,5$
$[20, 30)$	4	25	$4 \cdot 25 = 100$
Sum	14		210

$$210 : 14 = 15$$

Grethe gikk i gjennomsnitt 15 000 skritt per dag i de siste dagene.

b) Lag et histogram som illustrerer fordelingen i tabellen.

Antall tusen skritt	Klassebredde	Frekvens	Histogramhøyde = Frekvens/klassebredde
$[0, 10)$	10	4	$4/10 = 0,4$
$[10, 15)$	5	3	$3/5 = 0,6$
$[15, 20)$	5	3	$3/5 = 0,6$
$[20, 30)$	10	4	$4/10 = 0,4$

Lager histogrammet med antall tusen skritt på førsteaksen og histogramhøyden på andreaksen.

