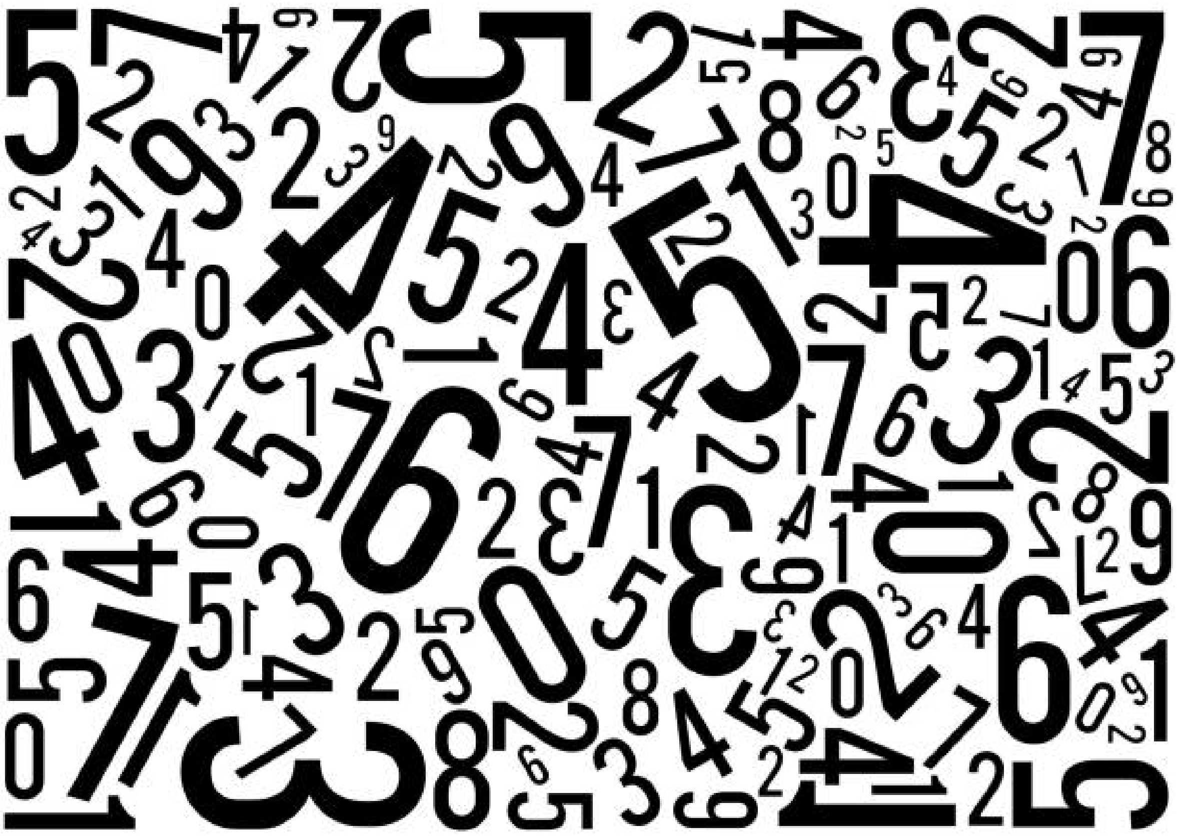
ROMGEOMETRI



Innhold

1 Definisjoner

2 Vektorer i rommet

Sum og differanse av vektorer

$$\vec{a}+\vec{b}=[x_a,y_a,z_a]+[x_b,y_b,z_b]=[x_a+x_b,y_a+y_b,z_a+z_b]$$

Vektor mellom 2 punkt :

$$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A]$$

Lengden av en vektor :

$$\vec{a}=[x,y,z]\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Produkt av skalar og vektor

$$k\cdot\vec{a}=k\cdot[x,y,z]=[k\cdot x,k\cdot y,k\cdot z]$$

Parallellevektorer

$$\vec{a}||\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\cdot\vec{b}$$

$$k\cdot\vec{a}=k\cdot[x_a,y_a,z_a]=[kx_a,ky_a,kz_a]$$

Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$$

Ortogonale vektorer :

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

```
import numpy as np

u = np.array([-2,1,2])
v = np.array([3,2,-1])

print('u = ', u)
print('v = ', v)
print('u + v = ',u+v)
print('u * v = ', u*v)
print('2 * u = ',2*u)

print('u dot v = ', u.dot(v))

print('u x v = ',np.cross(u,v))

ux = u[0]
uy = u[1]
uz = u[2]

sum = u[0]**2 + u[1]**2 + u[2]**2
lengde = np.sqrt(sum)
print('|u| = ',lengde)
```

2.1 Vektorer med koordinater

Vektor mellom 2 punkter A og B :

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]$$

Lengden til en vektor :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z^2}$$

Eksempel

Vi skal finne vektoren som går fra punktet $A(3, -2, 1)$ til punktet $B(0, 5, -2)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A] \\ &= [0 - 3, 5 - (-2), -2 - 1] \\ &= [-3, 7, -3] \end{aligned}$$

Eksempel

En vektor fra origo til et punkt kaller vi for punktets posisjonsvektor.
Vi skal finne vektoren som går fra origo og $A(3, -1, 2)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= [x_A - x_O, y_A - y_=, z_A - z_O] \\ &= [3 - 0, -1 - 0, 2 - 0] \\ &= [3, -1, 2] \end{aligned}$$

Vi ser at en vektor fra origo til et punkt har samme koordinater som punktet.

2.1.1 Definere punkt og vektor i Geogebra

Defineres på samme måte med stor bokstav gir punkter og liten bokstav gir vektor.

Dersom vi ønsker store bokstaver for en vektor : AB:=Vektor(1,3,-2)

2.2 Sum og differanse av vektorer

$$[x_a, y_a, z_a] + [x_b, y_b, z_b] = [x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b]$$

Eksempel

Vi har to vektorer $\vec{u} = [2, -3, 1]$
og $\vec{v} = [-1, 4, 2]$
Finn

1) $\vec{u} + \vec{v} =$
2) $\vec{u} - \vec{v} =$
3) $\vec{u} + \vec{u} =$
4) $\vec{v} + \vec{v} =$

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= [2, -3, 1] + [-1, 4, 2] \\
&= [2 - 1, -3 + 4, 1 + 2] \\
&= [1, 1, 3] \\
\vec{u} - \vec{v} &= [2, -3, 1] - [-1, 4, 2] \\
&= [2 - (-1), -3 - 4, 1 - 2] \\
&= [3, -7, -1] \\
\vec{u} + \vec{u} &= [2, -3, 1] + [2, -3, 1] \\
&= [2 + 2, -3 - 3, 1 + 1] \\
&= [4, -6, 2] \\
\vec{u} + \vec{u} &= 2 \cdot \vec{u} \\
&= 2 \cdot [2, -3, 1] \\
&= [4, -6, 2] \\
\vec{v} + \vec{v} &= [-1, 4, 2] + [-1, 4, 2] \\
&= [-1 - 1, 4 + 4, 2 + 2] \\
&= [-2, 8, 4]
\end{aligned}$$

Oppgave - Python

2.3 Produkt av en konstant og en vektorer

$$k[x, y, z] = [k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z]$$

Eksempel

Vi har en vektor $\vec{v} = [2, -3, 1]$

For å finne en vektor $\vec{u}$ som er like lang, men motsatt rettet multipliserer vi med (-1)

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (-1) \cdot \vec{v} \\ &= -[2, -3, 1] \\ &= [-2, 3, -1] \end{aligned}$$

For å finne en vektor $\vec{a}$ som er dobbelt så lang og har samme retning som $\vec{v}$, multiplisere vi med 2

$$\begin{aligned} \vec{u} &= 2 \cdot \vec{v} \\ &= 2[2, -3, 1] \\ &= [4, -6, 2] \end{aligned}$$

For å finne en vektor $\vec{a}$ som er halvparten så lang og har samme retning som $\vec{v}$, multiplisere vi med $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{1}{2} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{2}[2, -3, 1] \\ &= \left[1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

Eksempel

2.4 Skalarprodukt

$$[x_a, y_a, z_a] \cdot [x_b, y_b, z_b] = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b +$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Eksempel

$A(0, 0, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(\sqrt{3}, 1, 0)$
Finn vinkelen v mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [\sqrt{3}, 0.0] \\
|\overrightarrow{AB}| &= |[\sqrt{3}, 0, 0]| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{3} \\
\overrightarrow{AC} &= [\sqrt{3}, 1, 0] \\
|\overrightarrow{AC}| &= |[\sqrt{3}, 1, 0]| = \sqrt{4} = 2 \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos v \\
[\sqrt{3}, 0] \cdot [\sqrt{3}, 1] &= \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos v \\
3 &= 2\sqrt{3} \cdot \cos v \\
\cos v &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
v &= 30^\circ
\end{aligned}$$

2.5 Orthogonale vektorer

Orthogonale vektorer betyr vektorer som står vinkelrett på hverandre.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Eksempel

En trekant har hjørner i punktene $A(2,0)$, $B(4,1)$ og $C(3,5)$.
Undersøk om trekanten er rettvinklet.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [4-2, 1-0] = [2,1] \\
\overrightarrow{AC} &= [3-2, 5-0] = [1,5] \\
\overrightarrow{BC} &= [3-4, 5-1] = [-1,4] \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= [2,1] \cdot [1,5] = 2+5 \neq 0 \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= [2,1] \cdot [-1,4] = -2+4 \neq 0 \\
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= [1,5] \cdot [-1,4] = -1+20 \neq 0
\end{aligned}$$

Altså er ikke trekanten rettvinklet.

Eksempel

En trekant har hjørner i punktene $A(1,0)$, $B(3,4)$ og $C(2,t)$.
Bestem t slik at $AB \perp AC$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [3-1, 4-0] = [2,4] = 2[1,2] \\
\overrightarrow{AC} &= [2-1, t-0] = [1,t] \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\
[1,2] \cdot [1,t] &= 0 \\
1 + 2t &= 0 \\
t &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.6 Parallelle vektorer

To vektorer er parallelle hvis og bare hvis det finnes et reelt tall k slik at den ene vektorene kan skrives som k multiplisert med den andre vektoren :

$$\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

Eksempel

Vi har punktene $A(1,0)$, $B(3,4)$ og $C(2,t)$.
Bestem t slik at $AB||AC$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [3-1, 4-0] = [2,4] \\
\overrightarrow{AC} &= [2-1, t-0] = [1,t] \\
\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC} &\Rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \\
[2,4]||[1,t] &\Rightarrow [2,4] = k \cdot [1,t] \\
[2,4] &= k \cdot [1,t] \\
2 &= k \wedge 4 = k \cdot t \\
k &= 2 \wedge t = 2
\end{aligned}$$

Eksempel

$A(-1,-1), B(1,3), C(4,9)$.
A, B og C ligger på linje, forklar hvorfor.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [1-(-1), 3-(-1)] = [2,4] = 2[1,2] \\
\overrightarrow{AC} &= [4-(-1), 9-(-1)] = [5,10] = 5[1,2] \\
\overrightarrow{AB} = 2 \cdot [1,2] &\Rightarrow \overrightarrow{AB}||[1,2] \\
\overrightarrow{AC} = 5[1,2] &\Rightarrow \overrightarrow{AC}||[1,2] \\
\text{da vet vi at :} \overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC} & \\
\text{altså ligger punktene på linje} &
\end{aligned}$$

Eksempel

$A(3,1), B(1,5)$
Finn midtpunktet på $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [1-3, 5-1] \\
&= [-2,4] \\
\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}[-2,4] \\
&= [-1,2] \\
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\
&= [3,1] + [-1,2] \\
&= [2,3] \\
M &= (2,3)
\end{aligned}$$

3 Vektorproduktet

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{bmatrix} \right]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a} \quad \wedge \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

Enhetsvektorer

$\vec{e_x} = [1, 0, 0]$
$\vec{e_y} = [0, 1, 0]$
$\vec{e_z} = [0, 0, 1]$

Eksempel

Vi har 2 vektorer $\vec{u} = [2, -3, 1]$ og $\vec{v} = [-1, 0, 2]$
Finn $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \Big[-3 \cdot 2 - 0 \cdot 1, -(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1), 2 \cdot 0 - (-1) \cdot (-3) \Big] \\ &= [-6, -3, -3] \\ &= -3[2, 1, 1] \end{aligned}$$

3.1 Areal og volum

Areal av parallelleogram : A=$|\vec{a} \times \vec{b}|$
Areal av trekant : A=$\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$
Volum av parallellepiped : V=$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
Volum av firkantet pyramide : V=$\frac{1}{3}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
Volum av trekantet pyramide (tetraeder) : V=$\frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Eksempel

Vi har 2 vektorer $\vec{u} = [2, -3, 1]$ og $\vec{v} = [-1, 0, 2]$
Finn arealet av trekanten som spennes ut av vektorene.
$\vec{u} \times \vec{v} = -3[2, 1, 1]$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| \\ &= \frac{1}{2}|-3[2,1,1]| \\ &= \frac{1}{2}|-3\sqrt{4+1+1}| = \frac{1}{2}|-3\sqrt{6}| \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

4 Linjer i rommet

Parameterframstilling av linje

$$l = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Retningsvektor : $\vec{r} = [a, b, c]$
Punkt på linja : $P(x_0, y_0.z_0)$

Eksempel

En linje går gjennom punktet $P(3, 4, 2)$ og har retningsvektor $\vec{r} = [1, 2, 4]$
Da kan vi beskrive linja ved parameterframstillingen :

$$l = \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

5 Plan

Retningsvektor : $\vec{r} = [a, b, c]$
Punkt i planet : $P(x_0, y_0.z_0)$
Likningen for et plan

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ & ax + by + cz + d = 0 \end{aligned}$$

Eksempel

Et plan inneholder punktet $P(1, 2, 3)$ og har normalvektoren $\vec{n} = [2, 3, 4]$

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & 2(x - 1) + 3(y - 3) + 4(z - 3) = 0 \\ & 2x - 2 + 3y - 9 + 4z - 12 = 0 \\ & 2x + 3y + 4z - 23 = 0 \end{aligned}$$

Eksempel

Vi har 2 vektorer som ligger i et plan $\vec{u} = [2, -3, 1]$ og $\vec{v} = [-1, 0, 2]$
Planet krysser i origo.
$\vec{u} \times \vec{v} = [-6, -2, -2] = -3[2, 1, 1]$
Finn likningen til planet.

Vi har da normalvektor til planet : $\vec{n_\alpha} = [2, 1, 1]$

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & 2(x - 0) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \\ : \quad & 2x + y + z = 0 \end{aligned}$$

5.1 Skjæring mellom plan og linje

Eksempel

Finn skjæringspunktet P mellom planet $2x + 3y - z + 5 = 0$ og linja

$$l = \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

Setter koordinatene fra linja inn i likningen til planet :

$$\begin{aligned} 2x - 3y - z - 8 &= 0 \\ 2(3 + t) - 3(4 + 2t) - (2 + 4t) - 8 &= 0 \\ 6 + 2t - 12 - 6t - 2 - 4t - 8 &= 0 \\ -8t &= -16 \\ t &= 2 \text{finner koordinatene til punktet på linja som har denne t-verdien} \\ x &= 2 + 2 = 4 \\ y &= 2 + 2 \cdot 2 = 6 \\ z &= 2 + 4 \cdot 2 = 10 \\ P &= (4, 6, 10) \end{aligned}$$

6 Kuler

r = radien til kula
Senter i sirkelen : $P(x_0, y_0.z_0)$
Likningen for en kule

$$\alpha : \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Eksempel

En kule har senter i origo og radius $r = 1$. Finn likiningen til kula.

$$\begin{aligned} (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 &= 1^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Eksempel

En kule har senter i $S(2, 3, 1)$ og radius $r = 2$. Finn likiningen til kula.

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 2^2$$

6.1 Skjæring mellom kule og linje

Eksempel

Finn skjæringspunktet P mellom kula $x^2+y^2+z^2-16x+20y-14z=12$ og linja

$$l=\begin{cases} x=22+3t \\ y=-15+8t \\ z=9-t \end{cases}$$

Omformer likningen til kula først for å slippe så mye regning :

$$\begin{gathered} x^2-16x+y^2+20t+z^2-14z=12 \\ x^2-16x+8^2+y^2+20t+10^2+z^2-14z+7^2=12+8^2+10^2+7^2 \\ (x-8)^2+(y+10)^2+(z-7)^2=15^2 \end{gathered}$$

Setter koordinatene fra linja inn i likningen til kula :

$$\begin{aligned} (x-8)^2+(y+10)^2+(z-7)^2&=15^2 \\ (22+3t-8)^2+(-15+8t+10)^2+(9-t-7)^2&=15^2 \\ (14+3t)^2+(-5+8t)^2+(2-t)^2&=15^2 \\ 196+84t+9t^2-25+80t+64t^2+4-4t+t^2&=225 \\ 74t^2&=0 \\ t&=0 \end{aligned}$$

Da har vi kun ett skjæringspunkt (fordi vi kun får én verdi av t), og linja må da tangere kula.
Tangeringpunktet blir : $P(22,-15,9)$

7 Avstand fra punkt (P) til linje

$$q = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$$

r er linjens retningsvektor.

Eksempel

Vi har et punkt $P(1,2,3)$ og en linje gitt ved parameterframstillingen :

$$l = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Finn avstand fra P til linja.

$A(1,0,2)$, $\vec{r} = [1,1,-2]$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= [1-1, 2-0, 3-2] \\
\overrightarrow{AP} &= [0,2,1] \\
\overrightarrow{r} &= [1,1,-2] \\
\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{r} &= [0,2,1] \times [1,1,-2] \\
&= \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \\
&= [-4-1, -(0-1), 0.2] \\
&= [-5, 1, -2] \\
|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{r}| &= \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{30} \\
|\overrightarrow{r}| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \\
q &= \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|} \\
&= \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} \\
&= \sqrt{\frac{30}{6}} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

8 Avstand fra punkt (P) til plan

$$q = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

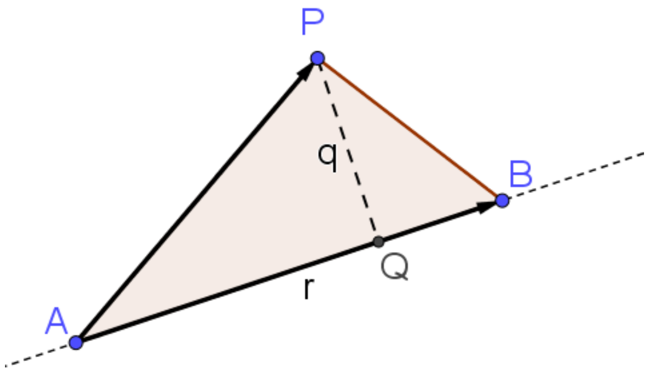
$\alpha : ax + by + cz + d = 0$
$P = (x_1, y_1, z_1)$

Eksempel

9 Utledning av formler

Avstand fra punkt til linje - 1

$$q = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$$



$l = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

$P(x_1, y_1, z_1)$

$A(x_0, y_0, z_0)$

$\overrightarrow{AP} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]$

$\vec{r} = [a, b, c]$

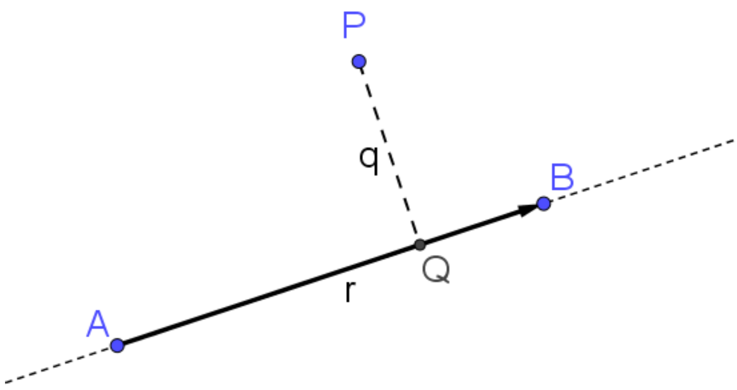
Arealet av trekanten :

$A_1 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|$

$A_2 = \frac{1}{2}|\vec{r}| \cdot q$

$A_1 = A_2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right| = |\vec{r}| \cdot q \;\Rightarrow\; q = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$

9.1 Avstand fra punkt til linje - 2



$$l = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$Q(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$

$P(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{r} = [a, b, c]$

$\overrightarrow{PQ} = [(x_0 + at) - x_1, (y_0 + bt) - y_1, (z_0 + ct) - z_1]$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = 0$

$q = |\overrightarrow{PQ}|$

9.2 Avstand fra punkt til plan

$$q = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Punkt utenfor planet : $P(x_1, y_1, z_1)$

Punkt i planet : $Q(x, y, z)$

$\overrightarrow{QP} = [(x - x_1), (y - y_1), (z - z_1)]$

Normalvektor : $\vec{n} = [a, b, c]$, $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Likning for planet : $ax + by + cz + d = 0$

Avstanden fra P til planet : $q = |\overrightarrow{QP}|$

Likningen for planet :

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d = 0 \\ d = -(ax + by + cz) \end{aligned}$$

Avstanden QP er parallell med $\vec{n}$altså har vi at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} &= |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0^o \\ &= |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}| \end{aligned}$$

Vi har også at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} &= [(x - x_1), (y - y_1), (z - z_1)] \\ \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n} &= [(x - x_1), (y - y_1), (z - z_1)] \cdot [a, b, c] \\ &= a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z) \\ |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}| &= a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z) \\ &= ax_1 - ax + by_1 - by + cz_1 - cz \\ &= ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax + by + cz) \\ &= ax_1 + by_1 + cz_1 + d \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{QP}| = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{|\vec{n}|}$$

$$q = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

10 Parameterframstilling av sirkel og kule

Et punkt $P(x, y)$ ligger på enhetssirkelen med senter i origo.
Da vil

$$\overrightarrow{OP} = [\cos t, \sin t]\ ,\ t \in [0, 2\pi]$$

$$|\overrightarrow{OP}| = 1$$

Et punkt $P(x, y)$ ligger på en sirkelen med senter i origo og radien R.
Da vil

$$\overrightarrow{OP} = [R \cdot \cos t, R \cdot \sin t]\ ,\ t \in [0, 2\pi]$$

$$|\overrightarrow{OP}| = R$$

Likning for sirkelen er :$x^2 + y^2 = R^2$

Et punkt $P(x, y)$ ligger på en sirkelen med senter i $S(x_0, y_0)$ og radien R.
Da vil

$$(x - x_0)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$