# VEKTORER

# Innhold

# 1 Definisjoner

# 2 Vektorer - oppsummering

$$k[x, y] = [k \cdot x, k \cdot y]$$
$$[x_a, y_a] + [x_b, y_b] = [x_a + x_b, y_a + y_b]$$
$$|\vec{a}| = |[x_a, y_a]| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

Vektor mellom 2 punkter :

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Skalarprodukt :

$$[x_a, y_a] \cdot [x_b, y_b] = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

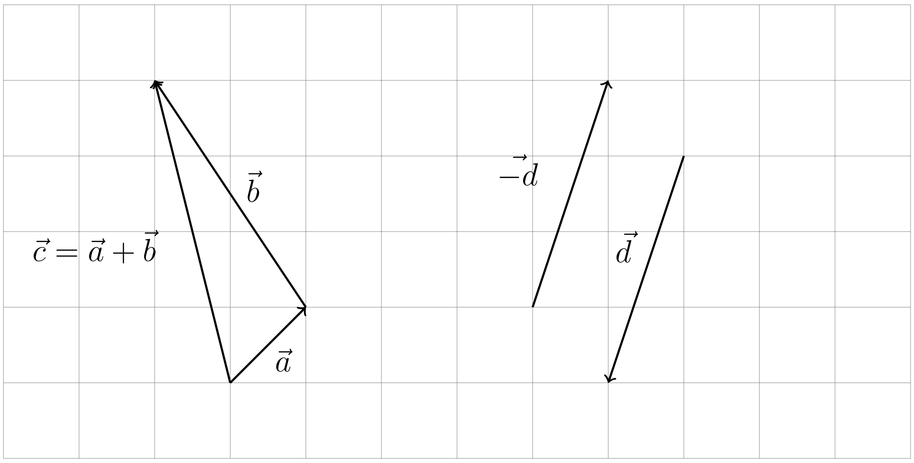
Orthogonale vektorer :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Parallelle vektorer :

$$\vec{a} || \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

## 2.1 Vektorer som piler




Når vi legger sammen 2 vektorer legger vi dem etter hverandre (se figur over). Da får vi en ny vektor fra startpunktet til sluttpunktet. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
Hvis vi setter minus foran vektoren så snur den retning.
NB! Vektorer er ikke stedbundne - de kan flyttes.

## 2.2 Regneregler

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a} = (s + t)\vec{a}$

# 3 Vektorer med koordinater

Vektor mellom 2 punkter $A$ og $B$ : $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$

Lengden til en vektor :$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$

### 3.0.1 Eksempel - vektor fra punkt til punkt

Vi skal finne vektoren som går fra punktet $A(3,-2)$ til punktet $B(0,5)$. Finn også $\overrightarrow{BA}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [x_B - x_A, y_B - y_A]\\ &= [0-3, 5-(-2)]\\ &= [-3, 7]\end{aligned}$$

#### Eksempel - vektor fra origo

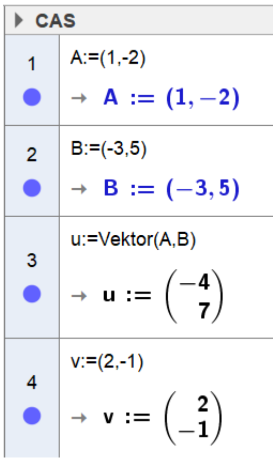
En vektor fra origo til et punkt kaller vi for punktets posisjonsvektor.
Vi skal finne vektoren som går fra origo og $A(3,-1)$

Vi ser at en vektor fra origo til et punkt har samme koordinater som punktet.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= [x_A - x_O, y_A - y_B]\\ &= [3-0, -1-0]\\ &= [3, -1]\end{aligned}$$

### 3.0.2 Definere punkt og vektor i Geogebra

Defineres på samme måte med stor bokstav gir punkte og liten bokstav gir vektor.




Dersom vi ønsker store bokstaver for en vektor : AB:=Vektor(1,3)

# 4 Sum og differanse av vektorer

$$[x_a, y_a] + [x_b, y_b] = [x_a + x_b, y_a + y_b]$$

### Eksempel

Vi har to vektorer $\vec{u} = [2, -3]$
og $\vec{v} = [-1, 4]$
Finn

1) $\vec{u} + \vec{v} =$
2) $\vec{u} - \vec{v} =$
3) $\vec{u} + \vec{u} =$
4) $\vec{v} + \vec{v} =$

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= [2, -3] + [-1, 4] \\
&= [2 - 1, -3 + 4] \\
&= [1, 1] \\
\vec{u} - \vec{v} &= [2, -3] - [-1, 4] \\
&= [2 - (-1), -3 - 4] \\
&= [3, -7] \\
\vec{u} + \vec{u} &= [2, -3] + [2, -3] \\
&= [2 + 2, -3 - 3] \\
&= [4, -6] \\
\vec{v} + \vec{v} &= [-1, 4] + [-1, 4] \\
&= [-1 - 1, 4 + 4] \\
&= [-2, 8]
\end{aligned}$$

### Oppgave - Python

# 5 Produkt av en konstant og en vektorer

$$k[x, y] = [k \cdot x, k \cdot y]$$

### Eksempel

Vi har en vektor $\vec{v} = \left[2, -3\right]$

For å finne en vektor $\vec{u}$ som er like lang, men motsatt rettet multipliserer vi med $(-1)$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (-1) \cdot \vec{v}\\ &= -\left[2, -3\right]\\ &= \left[-2, 3\right]\end{aligned}$$

For å finne en vektor $\vec{a}$ som er dobbelt så lang og har samme retning som $\vec{v}$, multiplisere vi med 2

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2 \cdot \vec{v}\\ &= 2\left[2, -3\right]\\ &= \left[4, -6\right]\end{aligned}$$

For å finne en vektor $\vec{a}$ som er halvparten så lang og har samme retning som $\vec{v}$, multiplisere vi med $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{1}{2} \cdot \vec{v}\\ &= \frac{1}{2}\left[2, -3\right]\\ &= \left[1, -\frac{3}{2}\right]\end{aligned}$$

### Eksempel

$\left[2, 5\right] = k\left[4, 10\right]$
$\left[4, 8\right] = k\left[2, 4\right]$

# 6 Vektorer - Skalarprodukt

$$
\begin{aligned}
[x_a, y_a] \cdot [x_b, y_b] &= x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})
\end{aligned}
$$

## Eksempel

$A(0,0), B(\sqrt{3},0), C(\sqrt{3},1)$
Finn vinkelen $v$ mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AB}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [\sqrt{3}, 0] \\
|\overrightarrow{AB}| &= |[\sqrt{3}, 0]| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 0^2} = \sqrt{3} \\
\overrightarrow{AC} &= [\sqrt{3}, 1] \\
|\overrightarrow{AC}| &= |[\sqrt{3}, 1]| = \sqrt{4} = 2 \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos v \\
[\sqrt{3}, 0] \cdot [\sqrt{3}, 1] &= \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos v \\
3 &= 2\sqrt{3} \cdot \cos v \\
\cos v &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
v &= 30^\circ
\end{aligned}
$$

# 7 Orthogonale vektorer

Orthogonale vektorer betyr vektorer som står vinkelrett på hverandre.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

## Eksempel

En trekant har hjørner i punktene $A(2,0)$ , $B(4,1)$ og $C(3,5)$.
Undersøk om trekanten er rettvinklet.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [4-2, 1-0] = [2,1] \\
\overrightarrow{AC} &= [3-2, 5-0] = [1,5] \\
\overrightarrow{BC} &= [3-4, 5-1] = [-1,4] \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= [2,1] \cdot [1,5] = 2+5 \neq 0 \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= [2,1] \cdot [-1,4] = -2+4 \neq 0 \\
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= [1,5] \cdot [-1,4] = -1+20 \neq 0
\end{aligned}$$

Altså er ikke trekanten rettvinklet.

## Eksempel

En trekant har hjørner i punktene $A(1,0)$ , $B(3,4)$ og $C(2,t)$.
Bestem t slik at $AB \perp AC$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [3-1, 4-0] = [2,4] = 2[1,2] \\
\overrightarrow{AC} &= [2-1, t-0] = [1,t] \\
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\
[1,2] \cdot [1,t] &= 0 \\
1 + 2t &= 0 \\
t &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

# 8 Vektorer uten koordinater

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$$

### Eksempel

$|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 120°$.

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$
$\cos 0° = 1$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})\\ &= 5\cdot 4\cdot(-\frac{1}{2})\\ &= -10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{a})\\ &= 5\cdot 5\cdot 1\\ &= 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\vec{b} &= |\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(0)\\ &= |\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\\ &= 4\cdot 4\cdot 1 = 16\end{aligned}$$

Vi ser ur fra dette at

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

### Eksempel

Samme opplysninger som eksemplet over.
$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$
$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$
Finn $\vec{u}^2, \vec{v}^2$ og $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$$\begin{aligned}\vec{u}^2 &= (\vec{a}+\vec{b})^2\\ &= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2\\ &= 25 + 2\cdot(-10) + 16\\ &= 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}^2 &= (\vec{a}-\vec{b})^2\\ &= \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2\\ &= 25 - 2\cdot(-10) + 16\\ &= 61\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})\\ &= \vec{a}^2 - \vec{b}^2\\ &= 25 - 16\\ &= 9\end{aligned}$$

# 9 Parallelle vektorer

Parallelle vektorer : To vektorer er parallelle hvis og bare hvis det finnes et reelt tall $k$ slik at den ene vektorene kan skrives som $k$ multiplisert med den andre vektoren :

$$\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

### 9.0.1 Eksempel - orthogonale

Vi har punktene $A(1,0)$ , $B(3,4)$ og $C(2,t)$.
Bestem t slik at $AB||AC$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [3-1, 4-0] = [2,4] \\
\overrightarrow{AC} &= [2-1, t-0] = [1,t] \\
\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC} &\Rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \\
[2,4]||[1,t] &\Rightarrow [2,4] = k \cdot [1,t] \\
[2,4] &= k \cdot [1,t] \\
2 &= k \wedge 4 = k \cdot t \\
k &= 2 \wedge t = 2
\end{aligned}$$

### Eksempel - parallelle

$A(-1,-1), B(1,3), C(4,9)$.
A, B og C ligger på linje, forklar hvorfor.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [1-(-1), 3-(-1)] = [2,4] = 2[1,2] \\
\overrightarrow{AC} &= [4-(-1), 9-(-1)] = [5,10] = 5[1,2] \\
\overrightarrow{AB} = 2 \cdot [1,2] &\Rightarrow \overrightarrow{AB}||[1,2] \\
\overrightarrow{AC} = 5[1,2] &\Rightarrow \overrightarrow{AC}||[1,2] \\
\text{da vet vi at :}\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC} & \\
\text{altså ligger punktene på linje} &
\end{aligned}$$

### 9.0.2 Eksempel - Veien om origo

$A(3,1), B(1,5)$
Finn midtpunktet på $\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [1-3, 5-1] \\
&= [-2,4] \\
\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}[-2,4] \\
&= [-1,2] \\
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\
&= [3,1] + [-1,2] \\
&= [2,3] \\
M &= (2,3)
\end{aligned}$$

# Oppgaver - Vektorer

### Eksempel

Vi har et parallellogram ABCD. $A(-3,1), B(2,2), C(3,4)$, finn koordinatene til punktet D.

### Eksempel

Finn koordinatene til $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når $\vec{a}+\vec{b}=[2,1]$ og $\vec{a}-\vec{b}=[4,-2]$

Løsning :

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b}) &= [2,1]+[4,-2] \\
\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}-\vec{b} &= [6,-1] \\
2\vec{a} &= [6,-1] \\
\vec{a} &= \frac{1}{2}[6,-1] = [3,-\frac{1}{2}] \\
\vec{a}+\vec{b} &= [2,1] \\
\vec{b} &= [2,1]-[3,-\frac{1}{2}] = [-1,\frac{3}{2}]
\end{aligned}
$$

### Eksempel

Vi har gitt $\vec{a}=[2,-3]$ og $\vec{b}=[-3,5]$.
$\vec{c}=[x,y]$.

Finn x og y slik at $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

### Eksempel

Firkanten A, B, C, D er et rektangel to andre punkter P og Q er slik at C, D, P, Q er hjørnene i et parallellogram. Vis at firkanten som har A, B, P og Q også er et parallellogram

### Eksempel

### Eksempel

# 10 Sirkellikningen

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Hvorfor ikke beskrive en sirkel med en funksjon? La oss skrive om sirkellikningen :

### Eksempel

senter i origo, radius r=1

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=1\\ y^2&=1-x^2\\ y&=\pm\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

### Eksempel

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2&=r^2\\ (y-y_0)^2&=r^2-(x-x_0)^2\\ y-y_0&=\pm\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}\\ y&=y_0\pm\sqrt{r^2-(x-x_0)^2} \end{aligned}$$

### Eksempel

En sirkel har senter i $A(2,-3)$ og radius $r=3$, vi skal finne likningen til sirkelen.

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2&=r^2\\ (x-2)^2+(y-(-3))^2&=3^2\\ (x-1)^2+(y+3)^2&=9\\ x^2-2x+1^2+y^2+6y+3^2&=9\\ x^2-2x+y^2+6&=19 \end{aligned}$$

### Eksempel

En sirkel er gitt ved likningen : $x^2+y^2-4x+6y-12=0$. Bestem senter og radius til sirkelen.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+6y-12&=0\\ x^2-4x+y^2+6y&=12\\ x^2-4x+2^2-y^2+6y+3^2&=12+2^2+3^2\\ (x-2)^2+(y+3)^2&=5^2\\ \text{Senter}: S=(2,-3),\text{Radius}: r&=5 \end{aligned}$$

### Eksempel

En sirkel er gitt ved likningen : $x^2+y^2+6x-12y+20=0$.Bestem senter og radius til sirkelen.

$$\begin{aligned} x^2+y^2+6x-12y+20&=0\\ x^2+6x+3^2+y^2-12y+6^2&=-20+9+36\\ (x+3)^2+(x-6)^2&=5^2 \end{aligned}$$

Senter i $(-3, 6)$ , radius $r = 5$

# 11 Parameterframstilling av en rett linje

$$l = \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$$

Punkt på linja : $P(x_0, y_0)$
Retningsvektor for linja : $\vec{r} = [a, b]$

## Eksempel

En rett linje går gjennom punktene $A(2, 3)$ og $B(-1, 1)$.
Finn parameterframstillingen til linja.

Retningsvektor : $\overrightarrow{AB} = [-1 - 2, 1 - 3] = [-3, -2]$

$$l = \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$$

## Eksempel

En linje går gjennom punktene $A(1, 2)$ og $B(3, 7)$. Sett opp en parameterframstilling av linja og finn skjæringspunktene mellom linja og aksene.

Retningsvektor : $\overrightarrow{AB} = [3 - 1, 7 - 2] = [2, 5]$

$$l = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$$

Krysser y-aksen når x=0 :

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 1 + 2t &= 0 \\ t &= -\frac{1}{2} \\ y &= 2 + 5t \\ &= 2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Krysser x-aksen når y=0 :

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 2 + 5t &= 0 \\ t &= -\frac{2}{5} \\ x &= 1 + 2t \\ &= 2 + 2 \cdot (-\frac{2}{5}) = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

## Eksempel

A(-3,-2), B(3,4), C(-4,5)
En linje $l$ går gjennom punkt C og er parallell med AB.

1) Sett opp en parameterframstilling av linja.

2) Linja krysser x-aksen i D. Bestem koordinatene til D.

3) Bestem koordinatenetil et punkt E på linja l slik at $\angle BAE = 90^o$

1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [3-(-3), 4-(-2)] \\ &= [6,6] \\ &= 6[1,1]\end{aligned}$$

altså er en retningsvektor for linja $\vec{r} = [1,1]$, og linja går gjennom $A(-3,-2)$

$$l = \begin{cases} x = -3+t \\ y = -2+t \end{cases}$$

2)

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -2+t &= 0 \\ t &= 2 \\ x &= -3+2 = -1 \\ D &= (-1,0) \end{aligned}$$

3) $\angle BAE = 90^o$ betyr at $AB \perp AE$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= 6 \cdot [1,1] \\ \overrightarrow{AE} &= [x-(-3), y-(-2)] = [x+3, y+2] \\ [1,1] \cdot [x+3, y+2] &= 0 \\ x+3+y+2 &= 0 \\ x &= -3+t \\ y &= -2+t \\ (-3+t)+(-2+t) &= 0 \\ 2t &= 5 \\ t &= \frac{5}{2} \\ E &= [-3+\frac{5}{2}, -2+\frac{5}{2}] \\ &= [\frac{-6+5}{2}, \frac{-4+5}{2}] \\ &= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

# 12 Kurver og Vektorfunksjoner

$$K = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

## Strekning, fart og akselerasjon

| | |
|---|---|
| Strekning : | $s(t)$ |
| Fart : | $v(t) = s'(t)$ |
| Akselerasjon: | $a(t) = v'(t) = s''(t)$ |
| Posisjonsvektor: | $\vec{r}(t) = [f(t), g(t)]$ |

### 12.0.1 Eksempel - fotballspark

Kurven til en fotball som sparkes kan beskrives ved

$$K = \begin{cases} x = 3t \\ y = -t^2 + 4t \end{cases}$$

Gyldighetsområdet er $t \in [0, 4]$, x og y er lengde og høyde målt i meter.
Denne situasjonen kan også beskrives med vektorfunksjonen (posisjonsvektoren) : $\vec{r}(t) = [3t, -t^2 + 4t]$

1) Hva betyr dette gyldighetsområdet?
2) Hvor stor er utgangshastigheten?
3) Hvor høyt over bakken er ballen etter 2 sekunder
4) Hvor stor er farten på dette tidspunktet?
5) Hvor lang tid tar det før ballen treffer bakken? og hvor langt fra utgangspunktet er dette?
6) Når er ballen på det høyeste? og hvor høyt over bakken er den da?

$$\vec{r}(t) = [3t, -5t^2 + 5t]$$
$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [3, -10t + 5]$$
$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = [0, -10]$$

Ballen treffer bakken når y-verdien til retningsvektoren er 0 :

$$-5t^2 + 5t = -5t(t-1) = 0$$
$$t = 0 \vee t = 1$$
$$\vec{r}(1) = [3, 0]$$

Når ballen er på det høyeste er farten i y-retningen null.

$$-10t + 5 = 0$$
$$t = \frac{1}{2}$$
$$\vec{r}(\frac{1}{2})_y = -\frac{5}{4} + \frac{5}{2} = \frac{-5+10}{2} = \frac{5}{2}$$
$$\vec{v}(0) = [3, 5]$$
$$|\vec{v}(0)| = |[3, 5]| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

### 12.0.2 Eksempel - partikkel

Posisjonen til en partikkel er : $\vec{r}(t) = [t^2 + 2t, \frac{1}{2}t^2]$.

1) Finn et uttrykk for fartsvektoren.

2) Finn et uttrykk for akselerasjonsvektoren

3) Undersøk om det finnes en verdi av $t$ slik at $\vec{v} \perp \vec{a}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= [t^2 + 2t, \frac{1}{2}t^2] \\
\vec{v}(t) &= \vec{r}'(t) = [2t + 2, t] \\
\vec{a}(t) &= \vec{v}'(t) = [2, 1] \\
\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t) &\Rightarrow \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0 \\
[2t + 2, t] \cdot [2, 1] &= 2(2t + 2) + t = 4t + 4 + t = 0 \\
5t &= -4 \\
t &= -\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

, altså finnes det en t slik at farten står vinkelrett på akselerasjonen.

### 12.0.3 Eksempel - Fugler som flyr

En fugl flyr parallelt med havoverflaten med en fart på $\vec{v_1} = [-3, -0.7]$
Den er i punktet $A(10.2, 8.2)$ når tiden $t = 0$.

1) Hvor stor fart flyr fuglen med?
2) Finn en parameterframstilling for den rette linja $l$ fuglen følger.

En annen fugl flyr også parallelt med havoverflaten i samme høyde.
Denne fuglen har farten $\vec{v_2} =$ og er i punktet B(8, 8.5) når tiden er $t = 0$.

1) Finn en parameterframstilling for den reette linja $m$ som denne fuglen følger.
2) Tegn inn en beskrivelse av situasjonen i Geogebra.
3) Bestem skjæringspunktet mellom de to linjene
4) Vil de to fuglene kollidere? Hvorfor/hvorfor ikke?
5) Bestem et uttrykk $d(t)$ for avstanden mellom de to fuglene.
6) Hva er den korteste avstanden mellom fuglene, og når finner den sted?

# Python

## Eksempel

$\vec{a} = [1,2]$ $\vec{b} = [-2,1]$ Lag et program som regner ut $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ og $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

## Eksempel

Lag et program som regner ut

1) lengden til en vektor
2) sum av 2 vektorer
3) skalarprodukt

## Eksempel

Vi har et parallellogram med hjørner i A(1,4), B(8,0) og C(9,8)
Lag et program som regner ut koordinatene til det siste punktet.
Finn lengden av alle 4 sidene.

## Eksempel

```
from numpy import array
a=array([3,2])
b=array([5,1])
c=b-a
print(c)
```

Hva tror du skjer i dette programmet?
Hva skrives ut?

Vektorer i rommet
- vektorer i rommet
- avstand fra et punkt til en linje
- vinkel mellom 2 linjer

Vektorprodukt
- matriser
- vektorprodukt
- arealberegninger
- volumberegninger

Plan
- likningen for et plan - Skjæring mellom plan og linje
- Avstand fra punkt til plan
- vinkel mellom en linje og et plan

Kuler
- sirkellikningen
- kulelikningen
- skjæring mellom kule og linje