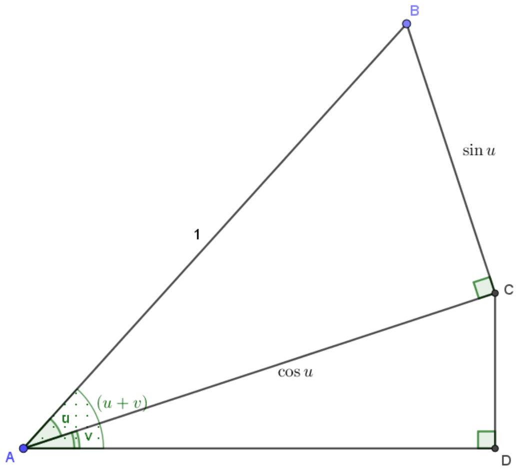
Trigonometri
Bevise formler

Bevis for formelen $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

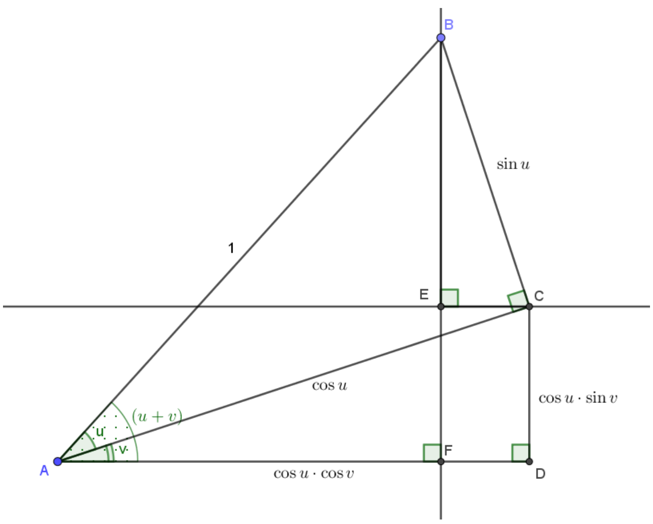
Vi skal føre bevis for formelen $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$.

Vi starter med en rettvinklet trekant $\triangle ABC$, $\angle CAB = u$
Hypotenusen i denne trekanten $AB = 1$,
da kan vi uittrykke katetene $AC = \cos u$ og $CB = \sin u$.



a)
Hvordan kan vi uttrykke AD og DC ved sinus og cosinus til vinklene u og v?

Vi lager en parallell til AD gjennom C, og en normal fra B ned på den parallelle linjen.
Da får vi en ny rettvinklet trekant $\triangle ECB$



b)
Forklar hvorfor den nye trekanten er formlik med $\triangle ADC$

c)
Hvordan kan vi uttrykke EB og EC ved sinus og cosinus til vinklene u og v?

d)
Bruk det du har gjort over til å vise at $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

e)
Bruk tilsvarende resonnement til å vise at $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

f)
Gjør en tilsvarende prosess for å bevise formlene $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$

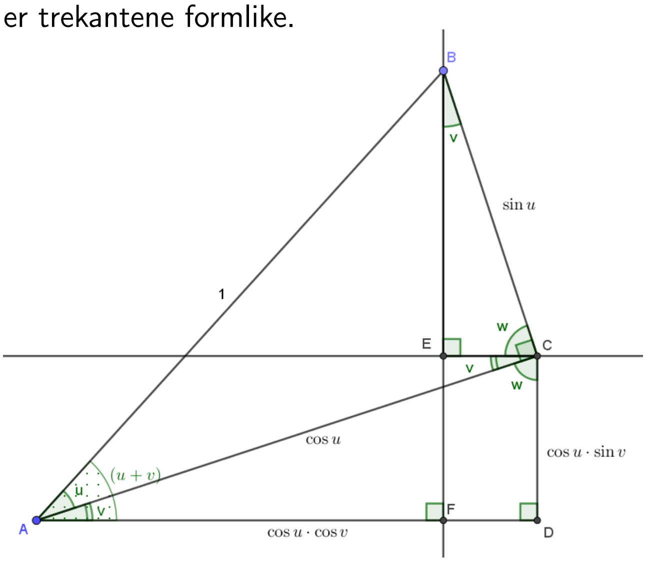
Løsningsforslag

a)
Hvordan kan vi uttrykke AD og DC ved sinus og cosinus til vinklene u og v?

$$\begin{aligned}
\cos v &= \frac{AD}{AC} \\
AD &= \cos v \cdot AC \\
&= \cos v \cdot \cos u \\
\sin v &= \frac{DC}{AC} \\
DC &= \cos u \cdot AC \\
&= \cos u \cdot \sin v
\end{aligned}$$

Vi lager en parallell til AD gjennom C, og en normal fra B ned på den parallelle linjen. Da får vi en ny rettvinklet trekant $\triangle ECB$

b)
Den nye trekanten er formlik med $\triangle ADC$.
$\angle ACE = \angle DAC = v$ fordi de har ett ben felles og de andre bena er parallelle.
Da kan vi vise at $\angle DCA = \angle ECB = w$, og da vet vi at alle tre vinklene er like, altså er trekantene formlike.



c)

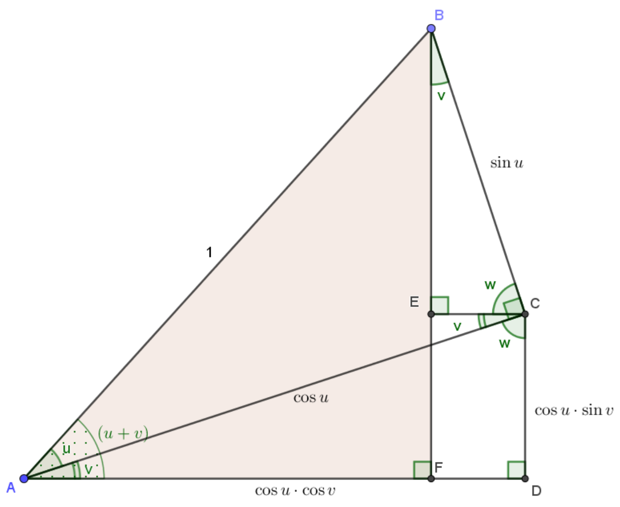
Vi bruker formlikhet for å finne uttrykk for EB og EC, og får da at :

$$
\begin{aligned}
\frac{EC}{DC} &= \frac{CB}{AC} \\
EC &= \frac{CB \cdot DC}{AC} \\
&= \frac{\sin u \cdot \cos u \cdot \sin v}{\cos u} \\
&= \sin u \cdot \sin v \\
\frac{EB}{CB} &= \frac{AD}{AC} \\
EB &= \frac{AD \cdot CB}{AC} \\
&= \frac{\cos u \cdot \cos v \cdot \sin u}{\cos u} \\
&= \sin u \cdot \cos v
\end{aligned}
$$

d)
Bruk det du har gjort over til å vise at $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$

Vi ser nå på trekanten $\triangle AFB$. Den er rettvinklet og har vinkel $\angle DAB = u + v$.
Den har hypotenus $AB = 1$, da kan vi uttrykke katetene :

$$
\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \frac{FB}{AB} \\
&= FB \\
&= EB + FE \\
&= EB + DC \\
\sin(u+v) &= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v
\end{aligned}
$$



e)
Bruk tilsvarende resonnement til å vise at $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$

f)
Gjør en tilsvarende prosess for å bevise formlene $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$