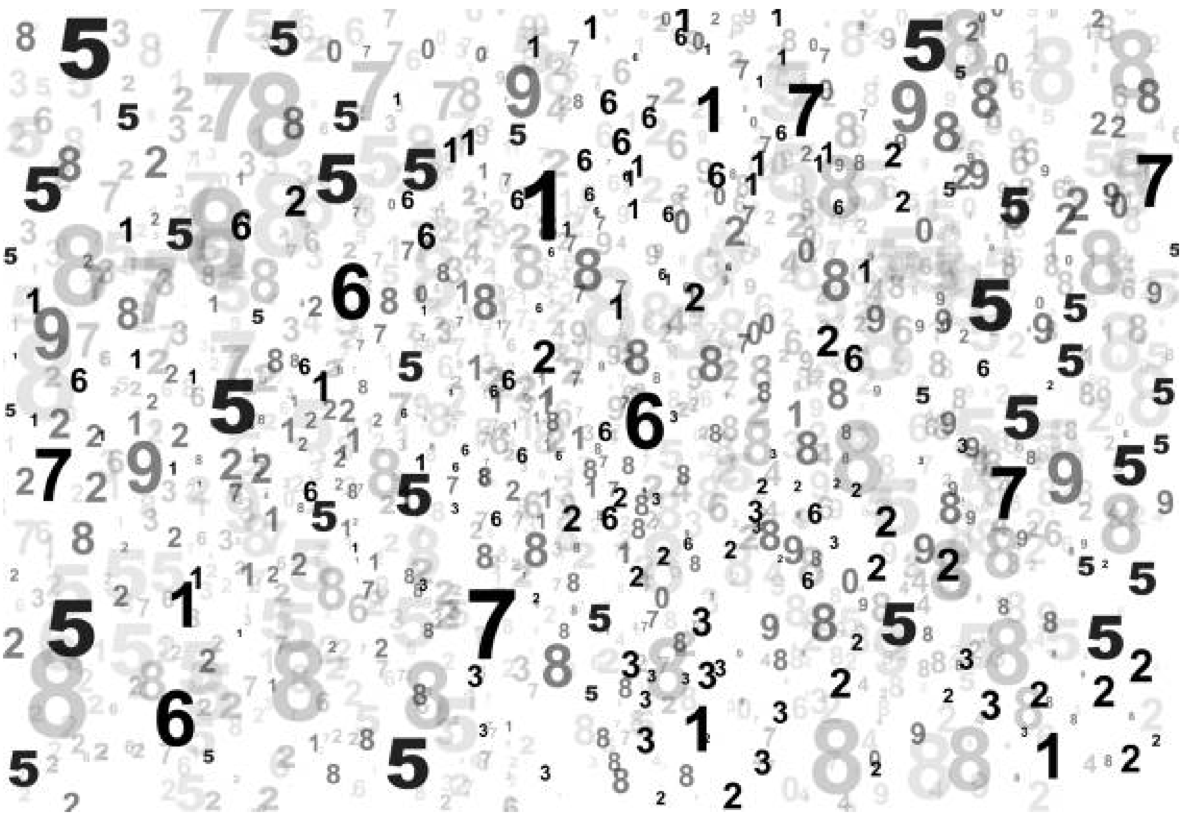
ALGEBRA



Innhold

1 Regneregler

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$

$-2 \cdot 3 + (a+7)9 - \frac{4-2a}{2} + a \cdot 2^3 =$

1.1 Addisjon

$a + b = b + a$ Kommunikativ regel for addisjon

$(a+b)+c = a+(b+c)$ Assosialtiv egel for addisjon

$a + (-a) = 0$ Invers verdi

$a + 0 = a$

1.2 Multiplikasjon

$a \cdot b = b \cdot a$ Kommunikativ regel for multiplikasjon

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ tabto6cm Assosialtiv regel for multiplikasjon

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ Invers verdi

$\frac{a}{a} = 1$

$\frac{a}{1} = a$

1.3 Parenteser

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab + ac \\ -(a+b) &= (-1)(a+b) \\ &= (-1) \cdot a + (-1) \cdot b \\ &= -a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy - zx - 2yx &= xy - xz - 2xy \\ &= \end{aligned}$$

2 Brøkregning

Formler

Addisjon / subtraksjon - Fellesnevner

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Multiplikasjon - "teller · teller , nevner · nevner"

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Divisjon - "Snu bakerste brøken og multiplisere"

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\frac{a}{b} \cdot d}{\frac{c}{d} \cdot d} \\ &= \frac{\frac{a \cdot d}{b}}{c} \\ &= \frac{\frac{a \cdot d}{b} \cdot b}{c \cdot b} \\ &= \frac{ad}{cb} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

2.1 Oppgaver

1. $\frac{1}{12} + \frac{4}{9} =$
2. $\frac{1}{12} \cdot \frac{4}{9} =$
3. $\frac{1}{12} : \frac{4}{9} =$
4. $3 - \frac{3}{12} =$
5. $\frac{2}{24a+4} + \frac{3a}{6a+1} =$

3 Logikk

3.1 Implikasjon

En påstand P impliserer en annen påstand Q hvis det følger at Q er sann hvis P er sann.
Vi skriver $P \Rightarrow Q$.

Eksempel

"Alle i klassen har gul t-skjorte"$\Rightarrow$ "Ingen i klassen har grønn t-skjorte".

Eksempel

"Anne er fra Moss"$\Rightarrow$ "Anne er fra Norge".
"Anne er ikke fra Norge"$\Rightarrow$ "Anne er ikke fra Moss".

3.2 Ekvivalens

Man sier at to påstander P og Q er ekvivalente hvis følgende er sant:
Hvis P er sann, må også Q være sann.
OG
Hvis Q er sann, må også P være sann.

Vi skriver da $P \Leftrightarrow Q$, som leses P er ekvivalent med Q .

Eksempel

'Hvis Ida er i Frankrike, er hun i Europa' $\Leftrightarrow$ 'Hvis Ida ikke er i Europa, er hun ikke i Frankrike'.

Eksempel

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$
$$x^2 = 1 \Leftarrow x = 1$$
$$x^2 = 1 \Leftarrow x = -1$$

3.2.1 Eksempel

Definert : produkt av 2 heltall er et heltall
n er et heltall $\Leftrightarrow$ $2n$ er et heltall.
fordi både 2 og n er heltall.

3.2.2 Eksempel

$x = \sqrt{16} \Leftarrow x = 4$
fordi $x = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$

$y = 0 \Rightarrow xy = 0$
$x = 0 \Rightarrow xy = 0$
$x = 0 \vee y = 0 \Leftrightarrow xy = 0$

$n > 0, m > 0 \Rightarrow n \cdot m > 0$

$\sqrt{x+8} - 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{x+8} = x + 2 \Rightarrow x + 8 = (x+2)^2$

$2x + 4 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

$(x-2)^2 = 16 \Leftarrow x = 6$

$(x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -6$

$x \in < 0, 4 >$ .... $x \in < 1, 3 >$

$x < 5$ ... $x \leq 5$

$x < 0$ ... $x < -1$

Jeg er eldre enn sønnen min ..... sønnen in er yngre enn meg

x+2=3 ... x=1

x=2.... 2x=4

x er et partall x er delelig med 2

x er et partall x er delelig med 4

4 Algoritmer

4.1 Algoritmer

En algoritme er i matematikken og informatkken en presis beskrivelse av en serie operasjoner som skal utføres for å løse et eller flere problemer.
Hvis en prosess er algoritmisk kan den beskrives som en serie operasjoner, som kan utføres gjennom beregninger.

Eksempel - Veibeskrivelse

1. Gå 500 meter rett fram
2. Ta til venstre i krysset
3. Gå 100 meter rett fram
4. Lukk opp den grønne døren som er til venstre ......

Eksempel - Bakeoppskrift

1. Ta en kilo mel og 1 kilo pepper
2. Bland sammen og tilsett 1 teskje sukker
3. Smelt 600 g smør........

4.2 Programmering

Et program utfører trinnene i en algoritme.
Fordel med programmering i matematikk - numeriske utregninger er enkelt fordi vi kan gjøre mange utregninger for å finne en got tilnærming til resultatet.

Eksempel

1. Vi har disse tallvariablene : a, b .....
2. Vi har en funksjon
3. Gjør denne funksjonen 10000 ganger med ulike verdier av a og b .....

5 Tallteori

5.1 Partall

Partall $\{2, 4, 6, 8, ...\}$
Mengden av alle partall $A = \{2 \cdot n | n \in \mathbb{N}\}$

5.2 Oddetall

Oddetall $\{1, 3, 5, 7, ...\}$
Mengden av alle oddetall $B = \{2 \cdot n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$

5.3 Primtall

Primtall Kan kun deles på 1 og seg selv hvis svaret skal være et helt tall.
$\{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\}$
Alle tall kan deles opp i produkt av primtall - primtallsfaktorisering.

5.4 Talltyper

$\mathbb{N}$	Naturlige tall	Hele positive tall
	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$	
	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$	
$\mathbb{Z}$	Hele tall	
	$\mathbb{Z} = \{.., -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$	
	(etter det tyske ordet for tall = zahl)	
$\mathbb{Q}$	Rasjonale tall	Kan skrives som brøk
	$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \vert a, b \in \mathbb{Z}\}$	
$\mathbb{R}$	Reelle tall	Hele tallinja
$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	Irrasjonale tall	$\pi, \sqrt{2}, ..$
$\mathbb{C}$	Komplekse tall	$z = Re + Im = a + bi, i = \sqrt{-1}$
	Imaginære tall	
	Tall som ikke finnes på tallinja.	

5.5 Tallmengder

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \cap B = \{4, 5\}$
$C = A \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$\langle 2, 4 \rangle$	Tallinja fra 2 til 4
$[2, 4\rangle$	Tallinja fra og med 2 til 4
$\langle 2, 4]$	Tallinja fra 2 til og med 4
$\langle 2, \infty \rangle$	Tallinja fra 2 og oppover
$\cup$	Union
$\cap$	Snitt
$(A \vert B)$	A gitt B
$x \in \mathbb{N}$	x er element i mengden av Naturlige tall

6 Absoluttverdi

Absoluttveri = tallverdien

Avstanden fra null til tallet, uavhengig av hvilken side.

$$|a| = \begin{cases} a & , \ a > 0 \\ -a & , \ a < 0 \end{cases}$$

Eksempel

$|x-4| = 2$ betyr at x er alle tall som er slik at avstanden mellom x og 4 er 2

$$\begin{aligned} |x-4| &= 2 \\ &= \begin{cases} x-4 & , \ x-4 > 0 \\ -(x-4) & , \ x-4 < 0 \end{cases} \\ (x-4) > 0 \Rightarrow x-4 &= 2 \\ x &= 2+4 = 6 \\ (x-4) < 0 \Rightarrow -(x-4) &= 2 \\ -x+4 &= 2 \\ x &= 4-2 = 2 \end{aligned}$$

7 Bevisførsel

Definisjoner

Aksiomer = grunnsetninger som aksepteres uten bevis, som allment aksepterte sannheter.

Bevis = en formell og logisk argumentasjon som starter med en aksiomer og ender i en konklusjon.

Partall : Hvis $n \in N$ så er $x = 2n$ et partall.
Oddetall : Hvis $n \in N$ så er $x = 2n + 1$ et oddetall.
Direkte bevis : Gjennomføre en trinnvis generell utledning.
Indirekte bevis : bevise en påstand ved å anta at det er usant, og påvise motsigelse.
Kontrapositivt bevis : $P \Rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg P \Rightarrow \neg Q$

Føring av bevis

Vær detaljert og strukturert.
Bruk ´vi´-form.
Skriv opp antakelser og hva som skal vises
argumentasjon : siden ..... derfor får vi... dermed har vi.... det følger at... fordi....
Bruk definisjoner, regler, formler
avslutt med : som er det vi skulle vise.

7.1 Direkte bevis

Et direkte bevis gjøres ved å gjennomføre en trinnvis generell utledning Hvis A så B , $A \Rightarrow B$

Eksempel - Direkte bevis - sum oddetall

Påstand : Summen av to oddetall vil alltid bli et partall.

Setter de to oddetallene : $a = 2n + 1$ og $b = 2m + 1$, der $m, n \in \mathbb{N}$

Da blir summen : $a + b = (2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$

Siden n og m er heltall vil også $(n + m)$ være et heltall, altså vil $2(n + m + 1)$ være et partall.

Eksempel

Bevis at produktet av to partall er et partall

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2 \cdot n \cdot 2 \cdot m \\ &= 2 \cdot (2nm) \end{aligned}$$

Eksempel

Bevis at 1,3333..... er et rasjonalt tall

$$
\begin{aligned}
t &= 1,333... \\
10t - t &= 13,33... - 1,333... \\
9t &= 12 \\
t &= \frac{12}{9} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$1,333... = \frac{4}{3}$ altså et rasjonalt tall.

Eksempel

Bevis at 4,131313.... er et rasjonalt tall

$$
\begin{aligned}
t &= 4,1313... \\
100t - t &= 413,1313... - 4,1313... \\
99t &= 409 \\
t &= \frac{409}{99}
\end{aligned}
$$

Eksempel

Bevis at 0,123123123.... er et rasjonalt tall

$$
\begin{aligned}
1000t - t &= 123,123123... - 0,123123... \\
999t &= 123 \\
333t &= 41 \\
t &= \frac{41}{333}
\end{aligned}
$$

Eksempel

Vis at dersom a er delelig med 2 og b er delelig med 3 så er a*b delelig med 6
Dersom et tall er delelig med 3 så inneholder det faktoren 3.

$$
\begin{aligned}
a &= 2 \cdot n \ , n \in \mathbb{N} \\
b &= 3 \cdot m \ , m \in \mathbb{N} \\
a \cdot b &= 2 \cdot n \cdot 3 \cdot m \\
&= 2 \cdot 3 \cdot n \cdot m \\
&= 6 \cdot mn
\end{aligned}
$$

Eksempel

Vis at dersom m er et partall og n er et naturlig tall så er m^n et partall

$$\begin{aligned} n &\in \mathbb{N} \\ m^n &= m \cdot m \cdot m \cdot .... \\ m &= 2 \cdot k, k \in \mathbb{N} \\ m^n &= (2k)^n \\ &= 2^n \cdot k^n \end{aligned}$$

7.2 Motbevis/ moteksempel

Eksempel

Finn et moteksempel:
$x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

$$\begin{aligned} x = -2 &\vee y = 2 \\ (-2)^2 &= 2^2 \\ -2 &\neq 2 \end{aligned}$$

Eksempel

Finn et moteksempel:
$n^2 > 9 \Rightarrow n > 3$

$$\begin{aligned} n &= -4 \\ (-4)^2 &= 16 > 9 \\ -4 \not> 3 \end{aligned}$$

Eksempel

Finn et moteksempel:
n er et primtall $\Rightarrow 2^n - 1$ er et primtall

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ 2^3 - 1 &= 8 - 1 = 7\text{er et ptimtall} \end{aligned}$$

prøver et annet primtall

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ 2^5 - 1 &= 32 - 1 = 31\text{er et ptimtall} \end{aligned}$$

her trenger vi kanskje et hjelpemiddel....

Eksempel - Motbevis - sum av primtall

Goldbachs sterke formodning : Ethvert partall større enn eller lik 4 ekan skrives som summen av to primtall.
Goldbachs svake formodning : Ethvert odd eheltall større enn eller lik 7 kan skrives som en sum av tre primtaller summen av to primtall
Prøv å finne moteksempel. (270 år har matematiker brukt på å bevise disse formodningene)
Den svake kan bevises dersom den sterke er sann.

7.3 Indirekte bevis

Beviser utsagn ved å anta at det er usant og påvise motsigelse

Eksempel - Indirekte bevis

Påstand : $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall. (dvs. det kan ikke skrives som en brøk med to heltall), der brøken er forkortet så mye som mulig.

Da vet vi at : $a \neq b \neq 0$

Dersom $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall : Definisjon av et rasjonalt tall : $\{\frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2 \cdot b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Dersom a er et partall så er a^2 også et partall : $a = 2n$

$$\begin{aligned} 2b^2 &= (2n)^2 \\ &= 4n^2 \\ b^2 &= 2n^2 \end{aligned}$$

altså er både a og b partall så da kan brøken forkortes, og forutsetningen vi tok holder ikke. Dermed har vi bevist at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

7.4 Konntrapositivt bevis

$P \Rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg P \Rightarrow \neg Q$

Eksempel - Kontrapositivt bevis

Påstand : Hvis x^3 er et partall så er også x et partall.

Antar at utsagnet ikke er sant, antar at x^3 er et partall når x er et oddetall.

$x = 2n + 1$, når $n \in N$

$x^3 = (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1$, altså et oddetall.

Da har vi en selvimotsigelse, og vi har vist at hvis x^3 er et partall så er også x et partall.

Oppgaver

Eksempel - Direkte bevis partall

Påstand : Hvis x er et partall så er også x^3 et partall.
$x = 2n \Rightarrow x^3 = (2n)^3 = 2 \cdot 4n^3$, altså et partall.

Eksempel

Påstand : Hvis x er et partall så går 4 opp i x^2.
$x = 2n \Rightarrow (x^2) = (2n)^2 = 4n^2$, altså delelig med 4, som betyr at 4 går opp i x^2.

8 Faktorisering

Faktorisering : Å faktorisere et tall betyr å skrive tallet som et produkt av to eller flere tall.

$$\text{faktor} \cdot \text{faktor} = \text{produkt}$$

Eksempel: $5 \cdot 3 = 15$. Her er 5 og 3 er faktorer. Tallet 15 er produktet.
Vi kan si at 15 består av faktorene 5 og 3.

Primtallsfaktorisere : Faktorisere et tall i så små faktorer som mulig,
Primtall= tall som kun dan deles på seg selv eller 2.
Primtall=$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...$

8.1 Faktorisering av tall - primtallsfaktorisering

$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$
$6 = 2 \cdot 3$
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$
$144 = 12 \cdot 12 = 4^2 \cdot 3^2 = 2^4 \cdot 3^2$

8.2 Faktorisering av uttrykk med 2 ledd

Faktorisering av uttrykk = skrive det som et produkt av lineære faktorer.
$2x + 4 = 2 \cdot x + 2 \cdot 2 = 2(x + 2)$
$x^2 - 2x = x \cdot x - 2 \cdot x = x(x - 2)$
$3x^2 - 9x = 3 \cdot x \cdot x - 3 \cdot 3 \cdot x = 3x(x - 3)$
Tallfaktorer : $2 \cdot 3 \cdot 7$
Lineære faktorer : $(x + 1)(x + 2)$
2.gradsfaktorer : $(x^2 - 3)(x^2 + 2x + 1)$

8.3 Faktorisering av uttrykk med 3 ledd

$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$
$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$
$x^3 - 2x^2 - 8x = x(x^2 - 2x - 8) = x(x - 4)(x + 2)$
Vi kan faktorisere uttrykk på flere måter :

- Kvadratsetningene
- abc-formelen
- Fullstendige kvadrater
- Produkt/sum-metoden
- 4 ledds polynom - Polynomdivisjon

Faktorisere i Geogebra

$Faktoriser(x^2 + 6x + 8)$
$Forenkle((x + 2)(x + 4))$

8.4 Kvadratsetningene

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
\text{Løse opp :}(x+1)^2 &= x^2 + x + x + 1^2 \\
&= x^2 + 2x + 1 \\
\text{Faktorisere :}x^2 + 2x + 1 &= \mathbf{x^2} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1^2} \\
&= \mathbf{a^2} + \mathbf{2ab} + \mathbf{b^2} \\
&= (x+1)^2
\end{aligned}$$

8.5 Konjungatsetningen

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
\text{Løse opp :}(x+2)(x-2) &= x^2 - 2x + 2x + 2 \cdot (-2) \\
&= x^2 - 4 \\
\text{Faktorisere :}x^2 - 4 &= x^2 - 2^2 \\
&= (x+2)(x-2)
\end{aligned}$$

Konjungatsetningen er VELDIG nyttig i faktorisering :

$$\begin{aligned}
x^2 - 1 &= x^2 - 1^2 = (x+1)(x-1) \\
x^2 - 4 &= x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2) \\
x^2 - 9 &= x^2 - 3^3 = (x+3)(x-3) \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

9 Polynomdivisjon

Eksempel

$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x+2) &= (x^2-1)(x+2)\\ &= x^3+2x^2-x-2\\ (x^3+2x^2-x-2):(x+2) &= x^2-1\\ f(x) = x^3+2x^2-x-2 &= (x+1)(x-1)(x+2)\\ f(x) \text{ har nullpunkter i } x &\in \{-2,-1,1\}\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{array}{l}\big(\quad x^3-4x^2\quad +x+6\big) : \big(x-2\big) = x^2-2x-3\\ \underline{-x^3+2x^2}\\ \qquad -2x^2 \quad +x\\ \qquad \underline{\;\;2x^2-4x}\\ \qquad\qquad -3x+6\\ \qquad\qquad \underline{\;\;\;3x-6}\\ \qquad\qquad\qquad 0\end{array}$$

$$x^3-4x^2+x+6 = (x-2)(x^2-2x-3) = (x-2)(x-3)(x+1)$$

Eksempel

$$\begin{aligned}x^3+2x^2-x-2 &= (x^2-1)(x+2)\\ &= (x+1)(x-1)(x+2)\end{aligned}$$

Når vi skal faktorisere i første runde må vi bruke polynomdivisjon.
Her har vi ikke fått oppgitt nullpunkt eller faktor, så da må vi prøve oss fram.
Tester for ulike verdier :

$$\begin{aligned}P(x) &= x^3+2x^2-x-2\\ P(0) &= -2\\ P(1) &= 1+2-1-1 = \underline{\underline{0}}\\ P(-1) &= (-1)^3+2\cdot(-1)^2-(-1)-2 = -1+2+1-2 = \underline{\underline{0}}\\ P(2) &= 2^3+2\cdot 2^2-2-2 = 8+8-2-2 = 12\\ P(-2) &= (-2)^3+2\cdot(-2)^2-(-2)-2 = -8+8+2-2 = \underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

Her har vi regnet ut for mange verdier, egentlig kan vi stopp på $P(1)=0$.
Da vet vi at $x=1$er et nullpunkt, og da er $x-1$ en faktor i polynomet.

I vår utregning har vi funnet 3 nullpunkter.
Da vet vi alle 3 faktorene, og dermed vet vi at polynomet kan faktoriseres til

$$x^3+2x^2-x-2 = (x+1)(x-1)(x+2)$$

Vi vet også at vi kan utføre polynomdivisjon med alle disse 3 faktorene og få null i rest.

Eksempel

$$
\begin{aligned}
x^3 - 3x - 2 &= \\
P(1) &= 1 - 3 - 2 \neq 0 \\
P(-1) &= -1 + 3 - 2 = 0 \\
&= (x^2 - x - 2)(x+1) \\
&= (x-2)(x+1)^2
\end{aligned}
$$

10 Likninger

10.1 Likning vs identitet

En likning er et matematisk uttrykk som har to sider med likhetstegn mellom.

En likning er en identitet dersom den er sann for alle verdier av de ukjente.
f.eks : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

10.2 Likninger

En likning er et åpent utsagn med en eller flere ukjent størrelser. Vi bruker som oftest x som den ukjente, men alle bokstaver kan brukes for å navngi den ukjente.

Vi kan gjøre "hva vi vil", så lenge vi gjør det samme på begge sider.(Flytte-bytte-regne-avvenning...)

Identitet - En matematisk identitet er en ligning som stemmer for alle variabler som inngår i ligningen. Ligningen er altså alltid oppfylt. f.eks $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Matematisk uttrykk - Et matematisk uttrykk har ikke uttrykk på begge sider av likhetstegnet.

En funksjon er en likning som viser sammenhengen mellom to størrelser

$$y = 2x + 5$$

y er en avhengig variabel , x er en uavhengig variabel

Geogebra : Vi kan teste om to uttrykk er identiske med dobbelt likhetstegn (==)

10.3 Likninger - Lineære

- Samler x-leddene og konstant-leddene på hver sin side av likhetstegnet

- dividerer slik at vi finner verdien til x

Eksempel

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= x + 3 \\ 2x - x + 5 - 5 &= x - x + 3 - 5 \\ 2x - x &= 3 - 5 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 2x + 7 \\ 4x - 2x &= 7 + 1 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} x + 2 &= \frac{1}{2}x + 3 \\ x - \frac{1}{2}x &= 3 - 2 \\ \frac{1}{2}x &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

10.4 abc-formelen

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = x_1 \lor x = x_2$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Eksempel

$$x^2 + 4x + 3 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm 2}{2}$$
$$x = \frac{-4 + 2}{2} \lor x = +frac{-4 - 2}2$$
$$x = \frac{-2}{2} = -1 \lor x = \frac{-6}{2} = -3$$

Da kan uttrykket faktoriseres : $x^2 + 4x + 3 = 1 \cdot (x - (-1))(x - (-3)) = (x + 1)(x + 3)$

10.5 Produkt/sum-metoden

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{når } x_1 + x_2 = b \text{ og } x_1 \cdot x_2 = c$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3 \\ &= x^2 + (2+3)x + (2 \cdot 3) \\ &= x^2 + 5x + 6 \\ x^2 + 5x + 6 &= (x+2)(x+3)\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}-x^2 - x + 2 &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2} \\ &= \frac{1 \pm 3}{-2} \\ x = \frac{1+3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \vee x &= \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}x^2 + 3x + 2 &= x^2 + (1+2)x + (1 \cdot 2) \\ &= (x+1)(x+2)\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 2 &= x^2 + (-1-2)x + ((-1) \cdot (-2)) \\ &= (x-1)(x-2)\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}x^2 - x - 2 &= x^2 + (1-2)x + (1 \cdot (-2)) \\ &= (x+1)(x-2)\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 8 &= x^2 + (2+4)x + (2 \cdot 4) \\ &= (x+2)(x+4)\end{aligned}$$

10.6 Fullstendige kvadrater

Vi legger til et ledd for å kunne benytte kvadratsetningene (og konjungatsetningen).

$$
\begin{aligned}
x^2 + bx + c &= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \\
&= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
x^2 + 4x + 3 &= x^2 + 4x + (2)^2 - 2^2 + 3 \\
&= (x+2)^2 - 1^2 \\
&= ((x+2)+1)((x+2)-1) \\
&= (x+3)(x+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 4x - 5 &= x^2 + 4x + 4 - 4 - 5 \\
&= (x+2)^2 - 3^2 \\
&= ((x+2)+3)((x+2)-3) \\
&= (x+5)(x-1)
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
x^2 + x - 2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + 2\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \\
&= (x+2)(x-1)
\end{aligned}
$$

NB!

$$-3^2 = -9$$

$$(-3)^2 = 9$$

10.7 Likninger - 2.grads

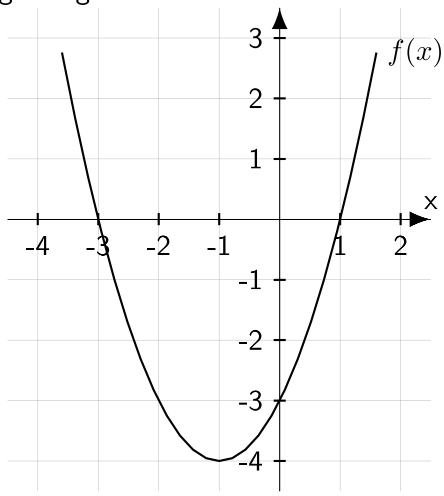
Vi samler alle leddene på venstre side av likhetstegnet og faktoriserer.

Likning

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$
$$x = -3 \vee x = 1$$

Husk :

$$a \cdot b = 0$$
$$a = 0 \vee b = 0$$



Vi kan løse 2.gradlikninger på flere ulike måter :

- Direkte faktorisering
- abc-formelen
- Produkt og sum-metoden
- Fullstendige kvadrater
- Kvadratsetningene

Eksempel - 2 ledd

$$2x^2 - 2 = 0$$
$$2(x^2 - 1) = 0$$
$$2(x+1)(x-1) = 0$$
$$x = -1 \vee x = 1$$

Eksempel - 3 ledd

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x+1)(x+2) = 0$$
$$x = -1 \vee x = -2$$

10.8 Oppgaver

1. $1 - x^2 = -8$

2. $-x^2 - x + 6$

10.9 3.grads - Likninger

Eksempel

$$
\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 - x - 2 &= 0 \\
(x^2 - 1)(x + 2) &= 0 \\
(x + 1)(x - 1)(x + 2) &= 0 \\
x = -1 \vee x = 1 \vee x &= -2
\end{aligned}
$$

Når vi skal faktorisere i første runde må vi bruke polynomdivisjon.
Her har vi ikke fått oppgitt nullpunkt eller faktor, så da må vi prøve oss fram.
Tester for ulike verdier :

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^3 + 2x^2 - x - 2 \\
P(0) &= -2 \\
P(1) &= 1 + 2 - 1 - 1 = \underline{\underline{0}} \\
P(-1) &= (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = \underline{\underline{0}} \\
P(2) &= 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 8 + 8 - 2 - 2 = 12 \\
P(-2) &= (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - (-2) - 2 = -8 + 8 + 2 - 2 = \underline{\underline{0}}
\end{aligned}
$$

Her har vi regnet ut for mange verdier, egentlig kan vi stopp på $P(1) = 0$.
Da vet vi at $x = 1$er et nullpunkt, og da er $x - 1$ en faktor i polynomet.

I vår utregning har vi funnet 3 nullpunkter.
Da vet vi alle 3 faktorene, og dermed vet vi at polynomet kan faktoriseres til

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$$

Vi vet også at vi kan utføre polynomdivisjon med alle disse 3 faktorene og få null i rest.

Eksempel

$$
\begin{aligned}
x^3 - 3x - 2 &= 0 \\
P(1) = 1 - 3 - 2 &\neq 0 \\
P(-1) = -1 + 3 - 2 &= 0 \\
(x^2 - x - 2)(x + 1) &= 0 \\
(x - 2)(x + 1)^2 &= 0
\end{aligned}
$$

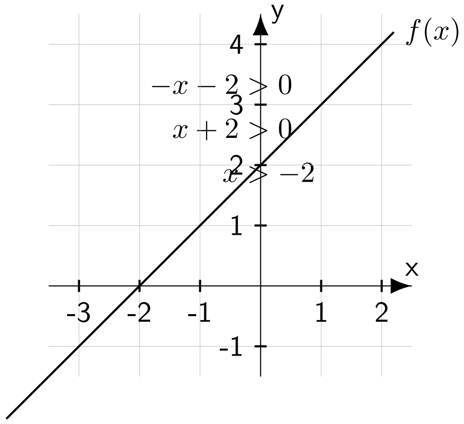
11 Ulikheter

11.1 Ulikheter - lineære

Lineære ulikheter løses på samme måte som lineære likninger, MEN dersom vi multipliserer eller dividerer med et negativt tall må ulikhetstegnet snus.

Eksempel

$f(x) = x + 2$



$$-x - 2 > 0$$
$$x + 2 > 0$$
$$x > -2$$

Eksempel

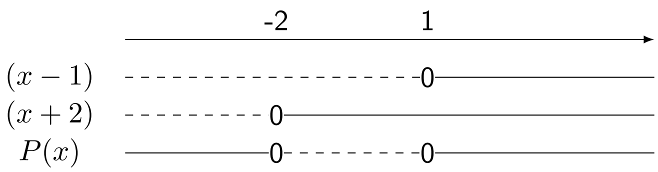
$$x + 1 > 2x - 3$$
$$x - 2x > -3 - 1$$
$$-x = -4$$
$$x < 4$$

11.2 Ulikheter - 2.grads

Enkle ulikheter løses som likninger, MEN dersom vi ganger eller deler på et negativt tall må tegnet snus.
Ellers løses ulikheter med fortegnslinjer.

Eksempel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + x - 2 \\
&= (x-1)(x+2)
\end{aligned}
$$



$$f(x) < 0 \Rightarrow x \in \big\langle -2, 1 \big\rangle$$

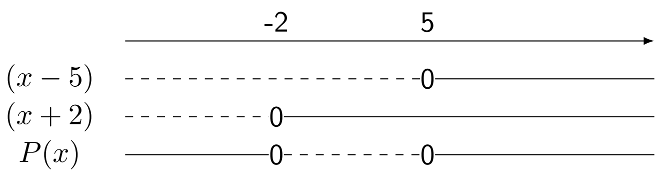
$$f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in \big[-2, 1 \big]$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in \big\langle \leftarrow, -2 \big\rangle \cup \big\langle 1, \rightarrow \big\rangle$$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in \big\langle \leftarrow, -2 \big] \cup \big[1, \rightarrow \big\rangle$$

Eksempel

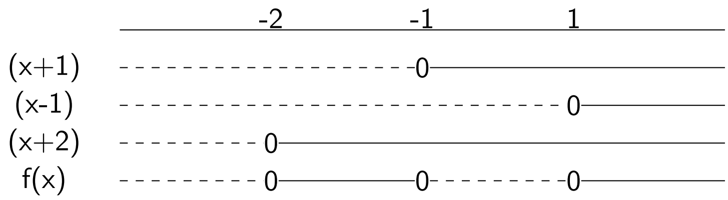
$$
\begin{aligned}
-x^2 + 3x &> -10 \\
-x^2 + 3x + 10 &> 0 \\
x^2 - 3x - 10 &< 0 \\
(x+2)(x-5) &< 0 \\
x &\in \big\langle -2, 5 \big\rangle
\end{aligned}
$$



11.3 3.grads - Ulikheter

Eksempel

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$$
$$(x+1)(x-1)(x+2) > 0$$



$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$
$$f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-2, -1, 1\}$$
$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in \Big\langle -2, -1\Big\rangle \cup \Big\langle 1, \rightarrow \Big\rangle$$
$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in \Big[-2, -1\Big] \cup \Big[1, \rightarrow \Big\rangle$$
$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in \Big\langle \leftarrow, -2\Big\rangle \cup \Big\langle -1, 1\Big\rangle$$
$$f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in \Big\langle \leftarrow, -2\Big] \cup \Big[-1, 1\Big]$$

12 Rasjonale likninger, uttrykk, ulikheter

12.1 Rasjonale uttrykk

Eksempel

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{x-3} - \frac{7x+14}{x^2-x-6} &= \frac{x+2}{x-3} - \frac{7(x+2)}{(x-3)(x+2)} \\
&= \frac{x+2}{x-3} - \frac{7}{(x-3)} \\
&= \frac{x+2-7}{x-3} \\
&= \frac{x-5}{x-3}
\end{aligned}
$$

12.2 Rasjonale likninger

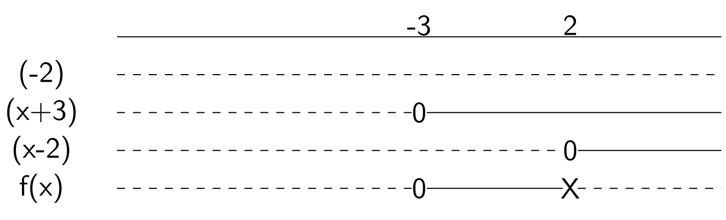
Eksempel

$$
\begin{aligned}
\frac{3x+4}{2x-1} &= 1 \\
\frac{3x+4}{2x-1} &= \frac{2x-1}{2x-1} \\
\frac{3x+4-(2x-1)}{2x-1} &= 0 \\
\frac{x+5}{2x-1} &= 0 \\
x &= -5
\end{aligned}
$$

12.3 Rasjonale ulikheter

Eksempel

$$
\begin{aligned}
\frac{x+3}{4-2x} &> 0 \\
\frac{(x+3)}{-2(x-2)} &> 0
\end{aligned}
$$



13 Likningssett

13.1 Lineære Likningssett

En prroblemstilling kan inneholde flere ukjente verdier. Da trenger vi flere uavhengige likninger, minst like mange som antall ukjente.

Vi har 2 metoder :

1. Innsettingsmetoden

2. Addisjonsmetoden

Eksempel - Innsettingsmetoden

$$\begin{aligned}
I: && 2y &= x+4 \\
II: && y &= -x+5 \\
I: && 2(-x+5) &= x+4 \\
&& -2x+10 &= x+4 \\
&& -2x-x &= 4-10 \\
&& -3x &= -6 \\
&& x &= 2 \\
II: && y &= -2+5=3 \\
&& (x,y) &= (2,3)
\end{aligned}$$

Eksempel - Addisjonsmetoden

$$\begin{aligned}
I: && 5x+2y &= 4 \\
II: && 3x+4y &= -6 \\
2I-II. && 2\cdot(5x+2y)-(3x+4y) &= 2\cdot 4-(-6) \\
&& 10x+4y-3x-4y &= 8+6 \\
&& 7x &= 14 \\
&& x &= 2 \\
I: && 5\cdot 2+2y &= 4 \\
&& 2y &= 4-10=-6 \\
&& y &= -3 \\
&& (x,y) &= (2,-3)
\end{aligned}$$

13.2 Likningssett - ikke-lineære

Eksempel

$$\begin{aligned}
I: && x^2 + y^2 &= 4 \\
II: && x + 2 &= y \\
I: && x^2 + (x+2)^2 &= 4 \\
&& x^2 + x^2 + 4x + 4 - 4 &= 0 \\
&& 2x^2 + 4x &= 0 \\
&& 2x(x+2) &= 0 \\
&& x &= 0 \vee x = -2 \\
&& y &= 2 \vee y = -2 + 2 = 0 \\
&& (x, y) &= (0, -2) \vee (x, y) = (-2, 0)
\end{aligned}$$

13.3 Likningssett - 3 ukjente

Eksempel

$$\begin{aligned}
I: && x + 2y + 3z &= 6 \\
II: && y + 2z &= 2 \\
III: && x + 6y + 2z &= 5 \\
II: && y &= 2 - 2z \\
I: && x + 2(2 - 2z) + 3z &= 6 \\
&& x + 4 - 4z + 3z - 6 &= 0 \\
&& x &= z + 2 \\
III: && (z + 2) + 6(2 - 2z) &= 5 \\
&& z + 2 + 12 - 12z - 5 &= 0 \\
&& 9z &= 9 \\
&& z &= 1 \\
&& x &= 1 + 2 = 3 \\
&& y &= 2 - 2 = 0 \\
&& (x, y, z) &= (3, 0, 1)
\end{aligned}$$

14 Prosentregning

14.1 Prosentfaktor

$$PF = \frac{p}{100}$$

14.2 Vekstfaktor

$$VF = 1 \pm \frac{p}{100}$$

Dersom VF $>$ 1 betyr det at verdien øker

Dersom VF $<$ 1 betyr det at verdien synker

Oppgave

Oppgave

Lag et program som tar imot en verdi,en prosent og om verdien skal øke eller synke.

14.3 Prosent over flere perioder

Verden x øker med p prosent i n peroider :

$$verdi = x \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$$

15 Potenser og røtter

$3^2 = 9$ $\sqrt{9} = 3$
Potenser og røtter er motsatte regnearter.

15.1 Potenser

Potenser er et tall ganget med seg selv et antall ganger.
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots. \; n$ ganger.
a er grunntallet og n er potensen
$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a.$

15.2 Potensregler

Formler	Eksempler
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$
$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	$(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$
$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$	$\frac{1}{2} = 2^{-1}$
$(a \cdot b)^p = a^p \cdot a^q$	$(2x)^3 = (2 \cdot x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2^2} = \frac{x^2}{4}$
$a^0 = 1$	$14^0 = 1$

Eksempel

$$\begin{aligned} x \cdot y^2 \cdot x^3 \cdot y &= x^1 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot y^1 \\ &= x^{1+3} \cdot y^{2+1} \\ &= x^4 y^3 \end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cdot b \cdot a^{-1}}{a^3 \cdot b^{-2} \cdot b} &= \frac{a^{2-1} \cdot b^1}{a^3 \cdot b^{-2+1}} \\ &= \frac{a^1 \cdot b^1}{a^3 \cdot b^{-1}} \\ &= a^{1-3} \cdot b^{1-(-1)} \\ &= a^{-2} \cdot b^2 \\ &= \frac{b^2}{a^2} \end{aligned}$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
\frac{(a^2)^3 \cdot a^0}{(a^2)^{-1}} &= \frac{a^{2\cdot 3} \cdot 1}{a^{2\cdot(-1)}} \\
&= \frac{a^6}{a^{-2}} \\
&= a^{6-(-2)} \\
&= a^8
\end{aligned}
$$

15.3 Røtter

Kvadratrot : $\sqrt{a^2} = a$
n-te rot : $\sqrt[n]{a^n} = a$

15.4 Formler for røtter

Formler	Eksempler
$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$
	$\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$	$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
$\sqrt{m \cdot n} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$	$\sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2x$
$\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$	

Eksempel

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3} &= \sqrt{x^2 \cdot x} \\ &= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \\ &= x\sqrt{x}\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}\sqrt{12} - \sqrt[6]{9} - \sqrt[4]{9} &= \sqrt{4 \cdot 3} - (3^2)^{\frac{1}{6}} - (3^2)^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{3} - 3^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} && = 0\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}\sqrt{20} + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2}} &= \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{4}\sqrt{5} + \sqrt{5} - \frac{4\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 4\sqrt{5} \\ &= -\sqrt{5}\end{aligned}$$

Oppgaver

Skriv som potens

1) $36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2 = 6^2$

2) $64 = 8^2$

3) $81 = 9^2$

4) $125 = 5^3$

5) $10000 = 10t$

6) $0,01 = 10^{-2}$

7) $32 =$

Regn ut

1) $4^3 \cdot 4^2 = 4^{3+2} = 4^5 = 2^{10} = 1024$

2) $5 \cdot 5^2 = 5^{1+2} = 5^3 = 125$

3) $\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4 = 81$

4) $(3^2)^3 = 3^6 =$

5) $\left(\frac{4^2}{2^3}\right)^2 = \left(\frac{2^4}{2^3}\right)^2 = (2^{4-3})^2 = 2^2 = 4$

6) $3^3 + 3^3 + 3^3 = 3 \cdot 3^3 = 3^4$

Forenkle uttrykket

1) $\sqrt{\frac{10^5}{10^3}} = (10^{5-3})^{1/2} = 10^{2 \cdot 1/2} = 10$

2) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$

3) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} =$

4) $\frac{x}{2\sqrt{x}} =$

5) $\sqrt{18} - \sqrt{2} =$

6) $\sqrt[3]{8} =$

7) $\sqrt[3]{27} =$

Lag en algoritme og et program

1) som tar imot uttrykk på formen a*a*a*a og skriver det som potenstall

2) som tar i mot tilsvarende men med to ulike grunntall

3) som tar imot et tall og faktoriserer det

Likning

$$
\begin{aligned}
2^{x^2} \cdot 2^{\frac{x}{2}} &= 2^3 \\
2^{x^2+\frac{x}{2}} &= 2^3 \\
x^2 + \frac{x}{2} - 3 &= 0 \\
2x^2 + x - 6 &= 0 \\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} \\
x = \frac{-1+7}{4} &\vee x = \frac{-1-7}{4} \\
x = \frac{6}{4} &\vee x = \frac{-8}{4} \\
x = \frac{3}{2} &\vee x = -2
\end{aligned}
$$

15.5 Standardform

Standardform er en enkel beskrivelse av store og små tall, som gjør det lettere å lese og regne med tallene.
Et tall på standardform skrives som $a \cdot 10^n$, der a er et tall mellom 1 og 10.

Eksempel

$$\begin{aligned}\frac{120 \cdot 25000}{0,15} &= \frac{12 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-2}} \\ &= \frac{12 \cdot 25}{15} \cdot 10^{1+3-(-2)} \\ &= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 5} \cdot 10^6 \\ &= 20 \cdot 10^6 \\ &= 2,0 \cdot 10^7\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}\frac{0,72 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^{-8}} &= \frac{72 \cdot 10^6}{60 \cdot 10^{-8}} \\ &= \frac{36}{30} \cdot 10^{6-(-8)} \\ &= \frac{12}{10} \cdot 10^{14} \\ &= 12 \cdot 10^{13}\end{aligned}$$

Eksempel

$$\frac{(0,5 \cdot 10^6)^2}{0,2 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5}} =$$

15.6 10-er potenser

- Tera $= 10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$
- Giga $= 10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$
- Mega $= 10^6 = 1\ 000\ 000$
- Kilo $= 10^3 = 1\ 000$
- Deka $= 10^2 = 100$
- Hekto $= 10$
- Deci $= 10^{-1} = 0,1$
- Centi $= 10^{-2} = 0,001$
- Milli $= 10^{-3} = 0,001$
- Micro $= 10^{-6} = 0,000\ 001$
- Nano $= 10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$