Funksjoner

Innhold

1 Definisjoner

Funksjon

Funksjon - En funksjon er en regel f som til et hvert tall i definisjonsmengden angir ett entydig tall i verdimengden. (dvs. én x-verdi kan ha kun én y-verdi, men én y-verdi kan ha flere x-verdier)

Et eksempel på en slik relasjon er $f(x) = x^2$. (leses ≪f av x er lik x i andre≫) som viser forholdet mellom argumentet x og kvadratet av dette.

Kritiske punkter

De kritiske punktene til en funksjon $f(x)$ for $x \in [a, b]$ er :
1. Punkter der $f'(x) = 0$.
2. Punkter der $f'(x)$ ikke er definert.
3. Endepunktene til intervallet, a og b .

Stasjonært punkt -

er et punkt på grafen der den deriverte er null. Topp-/bunn eller terrassepunkt.

Bunnpunkt -

Et bunnpunkt for en funksjon $f(x)$ er et punkt $(a, f(a))$ der funksjonsverdien $f(a)$ er mindre enn $f(x)$ i alle nabopunktene, altså alle punktene i et intervall rundt a . I et bunnpunkt skifter den deriverte fra negativ til positiv verdi.

Toppunkt

Et toppunkt for en funksjon $f(x)$ er et punkt $(a, f(a))$ der funksjonsverdien $f(a)$ er større enn $f(x)$ i alle nabopunktene, altså alle punktene i et intervall rundt a . I et toppunkt skifter den deriverte verdi fra positiv til negativ.

Ekstremalpunkt

Vi sier at et punkt $x = a$ er et ekstremalpunkt for en funksjon $f(x)$ hvis det enten er et toppunkt eller bunnpunkt for funksjonen.

Terrassepunkt

Et terrassepunkt for en funksjon f(x) er et stasjonært punkt a (et punkt der den deriverte er null), som verken er et topp- eller bunnpunkt. I et terrassepunkt skifter ikke den deriverte fortegn.

Vendepunkt

Et vendepunkt for en funksjon f(x) er et punkt x=a , der funksjonen bytter mellom å være konveks og konkav. I et vendepunkt skifter den annenderiverte f"(x) fortegn.

Tangent - Tangenten er en linje som berører en kurve i et punkt. Vi sier da at linjen tangerer kurven i det punktet.

Definisjonsmengde og verdimengde

Definisjonsmengde

En funksjon tar verdier fra en bestemt mengde, og denne mengden kalles definisjonsmengden til funksjonen.
Enkelt sagt : alle gyldige x-verdier i oppgitt område.

Eksempel
$f(x) = \frac{1}{x}$ for $x \in \langle 0, \infty \rangle$ har definisjonsmengde $(0, \infty)$. Merk at funksjonen ikke kan være definert i $x = 0$ fordi vi ikke kan dele på 0 .

Verdimengde

Mengden av verdier f(x) kan anta, kaller vi verdimengden til funksjonen.
Enkelt sagt : alle y-verdier for lovlige x-verdier.

Eksempel
$f(x) = 2x$ for $x \in [0, 10]$, Det gir at $f(x)$ har verdimengde fra og med 0 til og med 20.
$f(0) = 0$, $f(10) = 20$

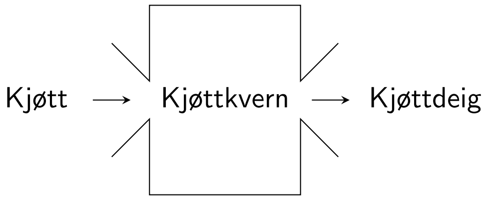
Intervall

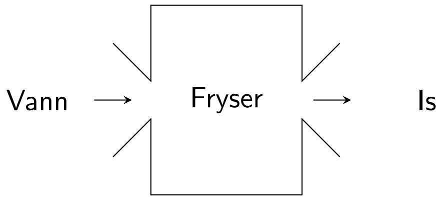
Et intervall er det samme som et tallområde. Tallene 4, 5, 6 og 7 ligger i intervallet 4–7 (fire til sju) , $[4, 7]$
Dersom vi ikke har sagt noe annet, lar vi øvre og nedre grense høre med til intervallet.
Dersom endepunktene (randpunktene) ikke er med : $x \in \langle 4, 7 \rangle$.

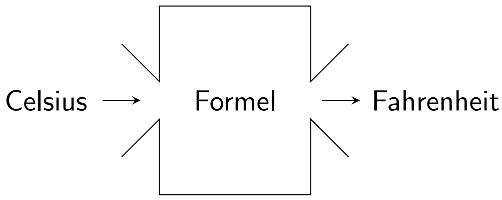
Kontinuitet

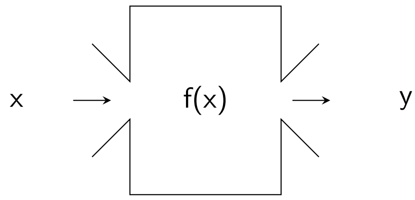
En funksjon f er kontinuerlig i et punkt $a \in D_f$ hvis rafen til f 'henger sammen' i punktet $(a, f(a))$. Dersom f er kontinuerlig for alle $a \in D_f$ er $f kontinuerlig$.

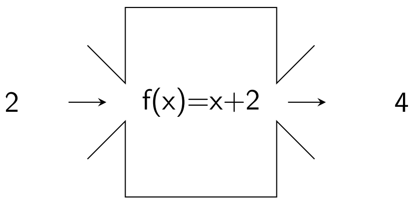
2 Hva er en funksjon?











3 Funksjonsanalyse

$f(x)$ er den fysiske grafen

$f(x) = 0 \Rightarrow$ nullpunkter
$f(x) > 0 \Rightarrow$ grafen ligger over x-aksen
$f(x) < 0 \Rightarrow$ grafen ligger under x-aksen

$f'(x)$ er veksten (stiger, synker, topp, bunn, terasse)

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ ekstremalpunkter, stasjonære punkter, topp, bunn, terasse.
$f'(x) > 0$ positiv vekst, grafen stiger.
$f'(x) < 0$ negativ vekst, grafen synker.

$f''(x)$ grafens krumning.

$f''(x) = 0$ vendepunkter
$f''(x) > 0$ grafen er konkav, åpning nedover (sur)
$f''(x) < 0$ grafen er konveks, åpning oppover (blid)

Algoritme

1. Hvis du kan faktorisere $f(x)$ sett opp fortegnslinje.
   Bruk fortegnslinjen for å finne nullpunkter og når grafen ligger over eller under x-aksen.

2. Deriver funksjonen for å finne $f'(x)$
   Faktoriser den deriverte og sett opp fortegnslinje for å finne ut når grafen stiger og synker.
   Bruk fortegnslinjen til å finne topp- og bunnpunkter (og terrassepunkter), og regn ut y-verdiene.
   Hvis oppgaven ber deg om å finne største eller minste verdi, så kan dette enten være topp-/bunnpunktene eller randpunktene dersom grafen er avgrenset.

3. Deriver den deriverte funksjonen for å finne $f''(x)$ (dobbelderivert / andrederivert) Faktoriser den dobbelderiverte og sett opp fortegnslinje for å funne grafens vendepunkter og krumning. Veksten er størst eller minst i vendepunktet.

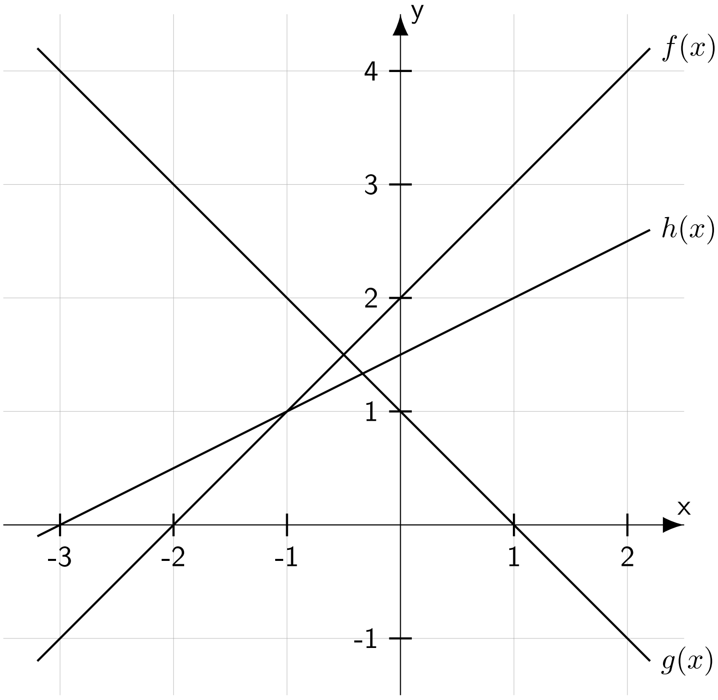
4. Bruk fortegnslinjene til å tegne en skisse av grafen

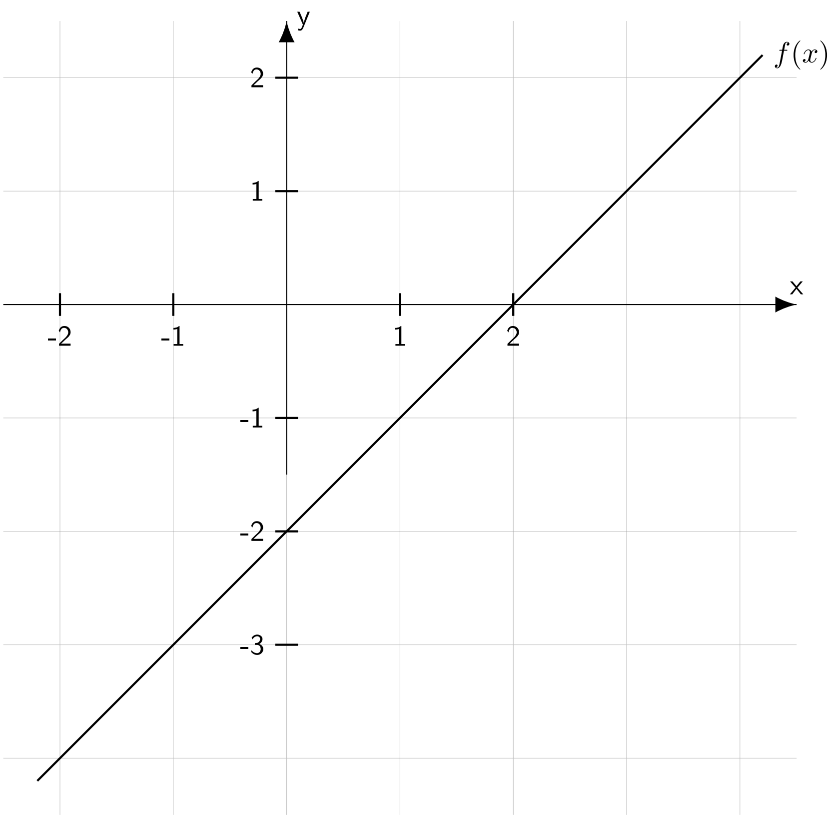
Eksempel på eksamensoppgave

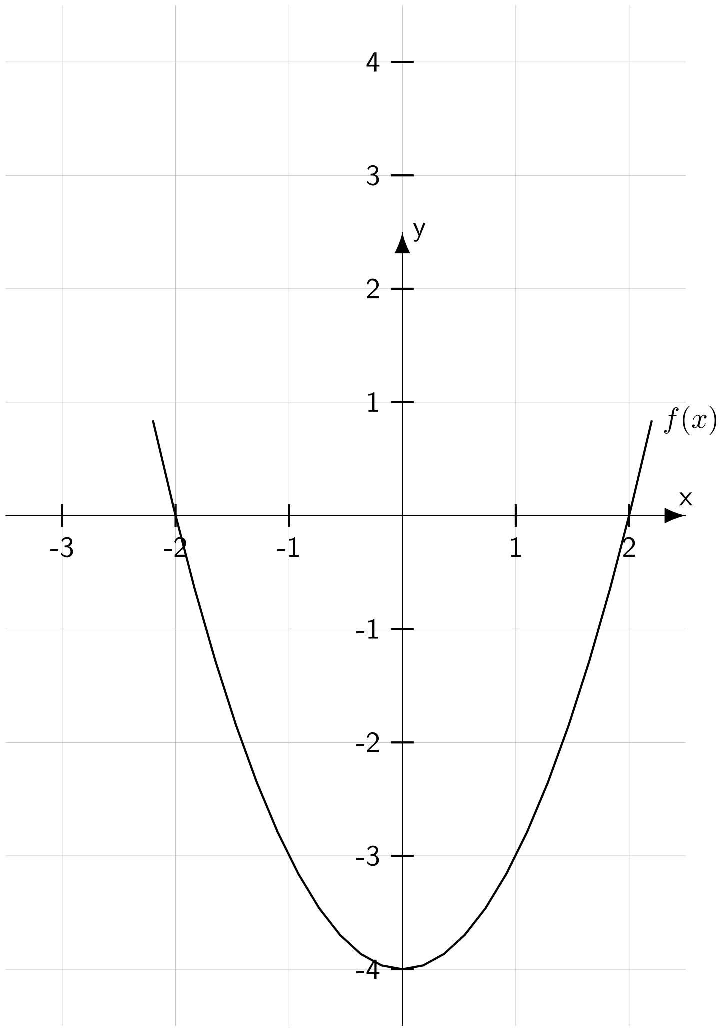
Du får vite om 4 funksjoner p, q, r og s :

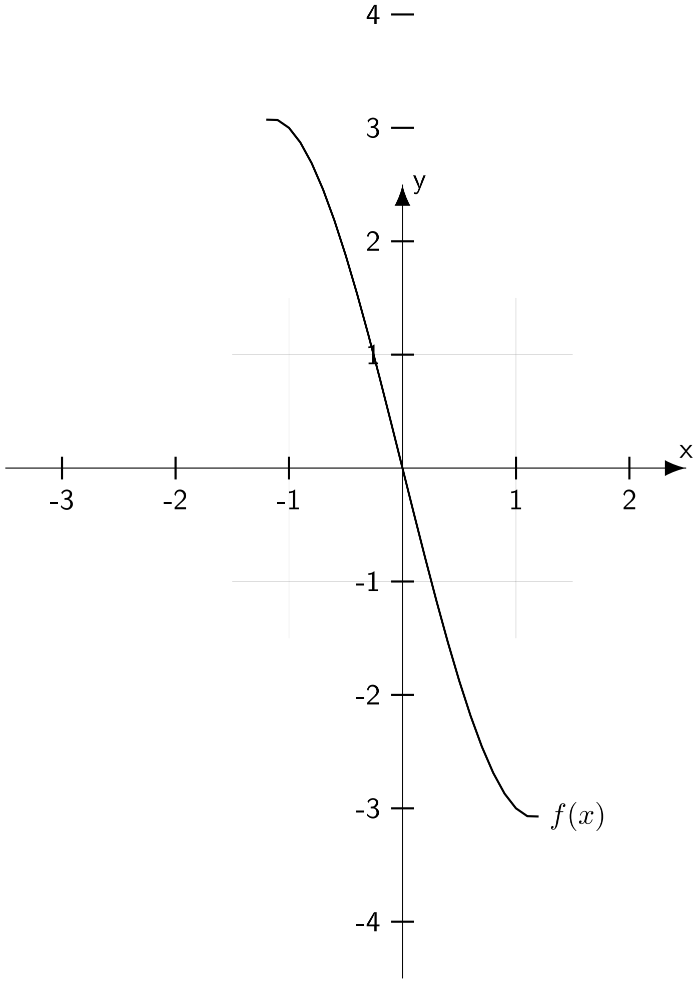
- $p'(0) = 0$ og $p'(-1) < 0$
- $q'(1) = -2$ og $q'(2) = -2$
- Den gjennomsnittlige vekstfarten til r i intervallet $[-2, 0]$ er 3.
- Tangentene til grafen til s i punktene $(-2, s(-2))$ og $(2, s(2))$ har likningene $y = -8x - 16$ og $y = -8x + 16$

Nedenfor ser dui seks grafer. Hvilken av grafene er grafen til henholdsvis p, q, r og s? Begrunn svarene dine.


y
x
f(x)
h(x)
g(x)
4
3
2
1
-1
-3
-2
-1
1
2


y
x
f(x)
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
1
2


4
3
y
2
1
$f(x)$
x
-3
-2
-1
1
2
-1
-2
-3
-4


4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
y
x
-3
-2
-1
1
2
$f(x)$

4 Funksjonstyper

1. Lineære funksjoner
2. Polynomfunksjoner
   - 2.gradfunksjoner
   - 3.gradsfunksjoner osv.
3. Eksponentielle funksjoner
4. Logaritmiske funkajoner
5. Potens funksjoner
6. Rasjonale funksjoner

4.1 Lineær funksjon

$$f(x) = a \cdot x + b$$

a er stigningstallet til linja, b er skjæringspunkt mellom linja og y-aksen.
Dersom vi kjenner 2 punkt på linja vil stigningstallet være :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Linjer med samme stigningstall er parallelle.

Dersom produktet av stigningstallene til 2 linjer $a_1 \cdot a_2 = -1$ så står linjene vinkelrett på hverandre.

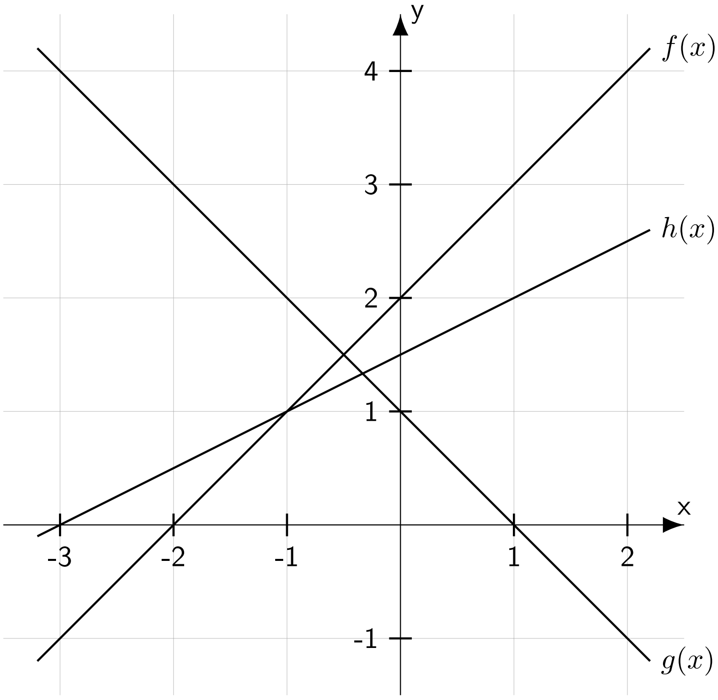
$$a_f \cdot a_g = -1$$
$$f(x) \perp g(x)$$

Eksempler

1) $f(x) = x + 2$

2) $g(x) = -x + 1$

3) $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



Eksempler

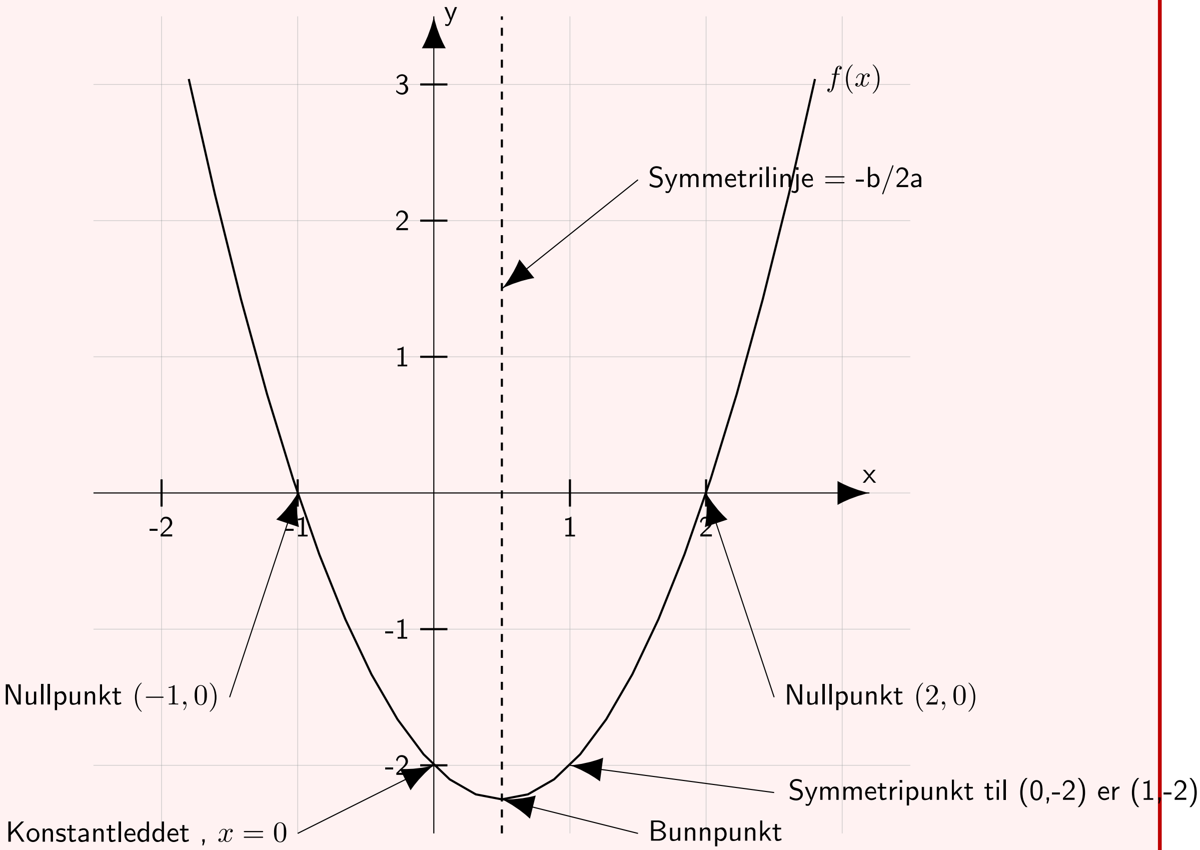
I Norge måler vi temperatur i grader celsius, men i USA måles temperaturen i grader Fahrenheit.
Vi vet at $-50°C = -58°F$, $-30°C = -22°F$, $0°C = 32°F$, $10°C = 50°F$.

Tegn et koordinatsystem med celsiusgrader langs x-aksen og fahrenheitgrader langs y-aksen.
Tegn sammenhengen mellom celsius og fahrenheit. (det er en lineær sammenheng).
Hvor mange grader er det når antall celsius er lik antall fahrenhet?
Bestem er formel som viser sammenhengen mellom celsius og fahrenheit.
Bruk formelen til å vise at $100°C = 212°F$

4.2 2.gradsfunksjoner

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

Positiv a gir konveks graf ('blid')
Negativ a gir konkav graf ('sur')



$$f(x) = a(x + 1)(x - 2)$$
$$= a(x^2 - x - 2)$$
$$= x^2 - x - 2$$

Denne grafen krysser y-aksen i $y = -2$, da må $a = 1$.

Eksempel ✎

Finn monotoniegenskapene til : $f(x) = x^2 - 4x + 1$

2.gradsfunksjon, altså en parabel.
Positivt 2.gradsledd, altså en konveks parabel.

Her er det ikke lett å finne verdien til nullpunktene, men vi kan finne dem sånn omtrentlig...

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 4x + 1 \\
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\
&= 2 \pm \sqrt{3} \\
2 + \sqrt{1} < 2 + &\sqrt{3} < 2 + \sqrt{4} \\
3 < 2 + &\sqrt{3} < 4 \\
2 - \sqrt{1} > 2 - &\sqrt{3} > 2 - \sqrt{4} \\
2 - \sqrt{4} < 2 - &\sqrt{3} < 2 - \sqrt{1} \\
0 < 2 - &\sqrt{3} < 1
\end{aligned}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \rightarrow \text{symmetrilinje når } y = 2$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x - 4 \\
&= 2(x - 2) \\
f'(x) &= 0 \\
x &= 2 \rightarrow \text{ ekstremalpunkt} \\
f(2) &= 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3 \rightarrow \text{bunnpunkt } (2, -3)
\end{aligned}$$

$$f''(x) = 2 \rightarrow \text{alltid konveks (blid)}$$

Siden grafen er konveks (blid) er ekstremalpunktet et bunnpunkt.

Eksempel ✎

Finn monotoniegenskapene til : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + 2x + 3 \\
&= -(x^2 - 2x - 3) \\
&= -(x - 3)(x + 1) \\
f'(x) &= -2x + 2 = -2(x - 2) \\
f''(x) &= -2
\end{aligned}$$

Eksempel ✎

$$f(x) = x^2 + b \cdot x + c$$

1) Bestem b og c slik at f(x) har et bunnpunkt i x=2 og nullpunkt i x=1

2) Bestem b og c slik at f har bunnpunkt i (1,-2)

1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + b \cdot x + c \\ f'(x) &= 2x + b \end{aligned}$$

Grafen har et bunnpunkt i $(2, f(2))$, altså er $f'(2) = 0$

$$\begin{aligned} f'(2) &= 0 \\ 2 \cdot 2 + b &= 0 \\ b &= -4 \end{aligned}$$

Da vet vi at $f(x) = x^2 - 4x + c$

Vi vet også at grafen har nullpunkt i $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + c \\ f(1) &= 0 \\ 1^2 - 4 \cdot 1 + c &= 0 \\ c &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

2) Bunnpunkt i (1.-2) gir oss at f'(1)=0

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ 2 \cdot 1 + b &= 0 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

Da vet vi at $f(x) = x^2 - 2x + c$

Setter inn punktet $(1, -2)$

$$\begin{aligned} f(1) &= -2 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + c &= -2 \\ c &= -1 \\ f(x) &= x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

4.3 3.grads funksjoner

3.gradsfunksjon

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Hvis $a > 0$ så starter grafen under x-aksen og slutter over x-aksen.
Hvis $a < 0$ så starter grafen over x-aksen og slutter under x-aksen.

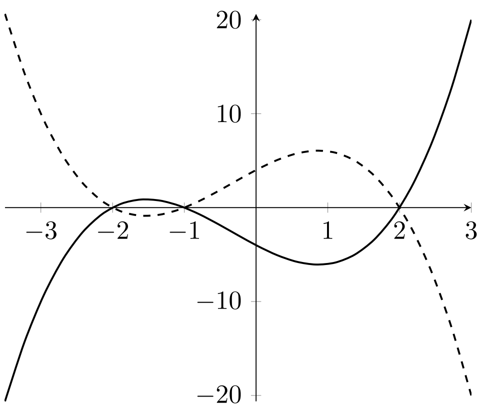
En 3.gradsfunksjon har minst ett null punkt, (kan ha 2 eller 3 også)

Eksempel ✎

Finn monotoniegenskapene til :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Bruk grafen og tegne fortegnslinjene til $f(x), f'(x), f''(x)$



Nullpunktene til funksjonen finner vi ved å faktorisere uttrykket.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ &= (x+2)(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

Prøver oss fram for å finne det ene nullpunktet.

$f(-1) = -1 + 1 + 4 - 4 = 0$

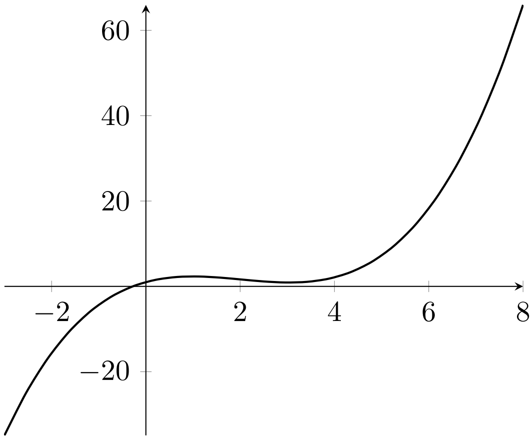
, da er $x = -1$ ett nullpunkt, og en av faktorene er $(x+1)$, og vi bruker denne i polynomdivisjonen.

Dersom vi setter $g(x) = -f(x)$, så ´flipper´ vi grafen (stiplet graf).

Eksempel

En tredjegradsfunksjon har alltid minst ett nullpunkt, max 3 nullpunkt. - Hvorfor?

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \\
f'(x) &= x^2 - 4x + 3 \\
&= (x-1)(x-3) \\
f''(x) &= 2x - 4 \\
&= 2(x-2)
\end{aligned}$$



Bruk grafen og tegne fortegnslinjene til $f(x), f'(x), f''(x)$

Det kan være vanskelig å finne nullpunktene for hånd, da går vi videre og ser om vi kan finne de andre punktene.

Eksempel

Finn monotoniegenskapene til : $f(x) = x^3 - 3x$
Tegn fortegnslinjene til $f(x), f'(x), f''(x)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x \\
&= x(x^2 - 3) \\
f(x) &= 0 \\
x = 0 &\lor x = \pm\sqrt{3} \\
f'(x) &= 3x^2 - 3 \\
&= 3(x^2 - 1) \\
&= 3(x+1)(x-1) \\
f'(x) &= 0 \\
x^2 - 1 &= 0 \\
x &= \pm 1 \\
f''(x) &= 6x \\
f''(x) &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Eksempel

Tegn fortegnslinjene til $f(x), f'(x), f''(x)$

Skisser grafen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -2x^3 - 3x^2 + 36x + 5 \\
f'(x) &= -6x^2 - 6x + 36 \\
&= -6(x^2 + x - 6) \\
&= -6(x+3)(x-2) \\
f''(x) &= -12x - 6 \\
&= -12(x + \frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Eksempel

Finn monotoniegenskapene til :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\
&= \frac{x}{3}(x^2 - 6x + 9) \\
&= \frac{x}{3}(x-3)^2 \\
f(x) &= 0 \\
x &= 0 \vee x = 3 \\
f(0) &= 0 \\
f(3) &= 3(\frac{1}{3} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 3) \\
&= 3(3 - 6 + 3) = 0 \\
\text{Nullpunkter : } & (0,0) \wedge (3,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{3}(x-3)^2 \\
f'(x) &= x^2 - 4x + 3 \\
&= (x-3)(x-1) \\
f'(x) &= 0 \\
x &= 3 \vee x = 1 \\
f(3) &= 0 \\
f(1) &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

3.gradsfunksjon, positivt x^3-ledd - starter under x-aksen, første ekstremalpunkt er et toppunkt.
Toppunkt : $(1, f(1)) = (1, \frac{4}{3})$
Bunnpunkt : $(3, f(3)) = (3, 0)$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2x - 4 = 2(x-2) \\
f''(x) &= 0 \\
x &= 2 \\
f(2) &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Vendepunkt i $(2, \frac{2}{3})$

Eksempel

Finn monotoniegenskapene til : $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 36x + 5$

Tredjegradsfunksjon, negativt x^2-ledd, altså starter den over x-aksen og ender under x-aksen.

Ingen åpenbare kandidater til nullpunkter, så vi går videre til ekstremalpunkter.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -2x^3 - 3x^2 + 36x + 5 \\
f'(x) &= -6x^2 - 6x + 36 \\
&= -6(x^2 + x - 6) \\
f'(x) &= 0 \\
x^2 + x - 6 &= 0 \\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm 5}{2} \\
x = 2 &\vee x = -3
\end{aligned}
$$

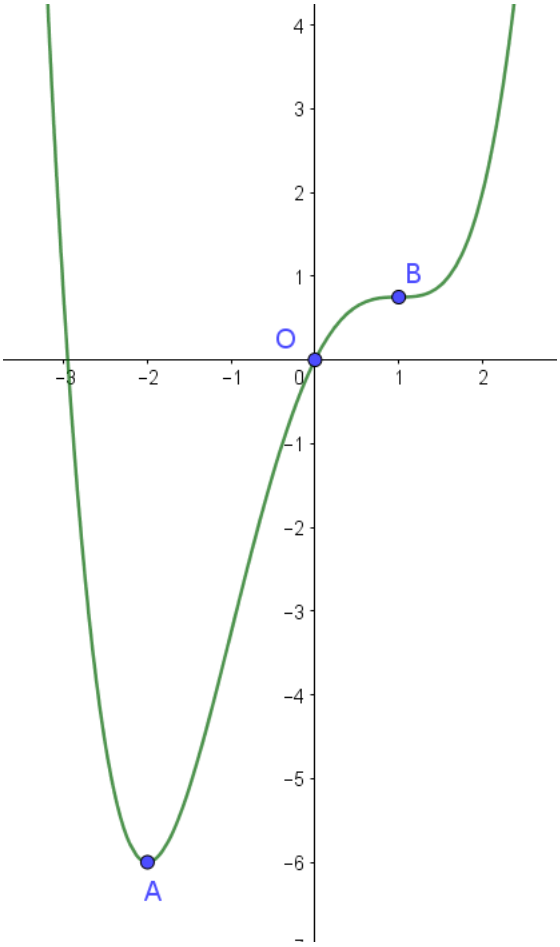
Vi vet at grafen starter over x-aksen, da må det første ekstremalpunktet være et bunnpunkt, bunnpunkt $(-3, f(-3)) = (-3, -76)$

og det andre er et toppunkt,
toppunkt $(2, f(2)) = (2, 49)$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -12x - 6 = -12(x + \frac{1}{2}) \\
f''(x) &= 0 \\
x + \frac{1}{2} &= 0 \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

altså har vi et vendepunkt i $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, -\frac{27}{2})$

Eksempel 💻1T



Grafen til funksjonen $f(x)$ er tegnet inn i koordinatsystemet. Grafen går gjennom punktene $A(-2, -6)$, $B(1, \frac{3}{4})$ og origo. Vi vet også at $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$.

1) Bestem $f'(0)$

2) Bestem likningen for tangenten til grafen til f i origo.

3) Vis ved regning at A er et bunnpunkt og B er et terrassepunkt.

4) Finn funksjonsuttrykket.

Eksempel 1T

OM en funksjon får du vite at $f(x) = k \cdot x^2 + 12x + 9$, og at $f(x)$ er et funnstendig kvadrat.
Bestem k.
Bestem nullpunktene til f.

Eksempel 💻 1T

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = -x^3 + k \cdot x \ , \ k \geq 1$$

1) Bestem nullpunktene til f

2) Bruk CAS til å vise at grafen til f har et bunnpunkt i $(0,0)$ og et toppunkt i $(\frac{2}{3}k, \frac{4}{27}k)$

3) Bruk CAS til å bestemme likningen for tangenten til grafen til f i punktet $(1, f(1))$, skriv på formeln $y = ax + b$

4) Bruk CAS og vis at den momentane vekstfarten til f når $x = 1$, alltid er større enn den gjennomsnittlige vekstfarten til f fra $x = 0$ til $x = 2$

Eksempel 💻

f er en tredjegradsfunksjon. Grafen til f har toppunkt i $(-1, \frac{5}{4})$ og et vendepunkt i $(\frac{1}{2}, -1)$.
Finn funksjonsuttrykket.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Toppunkt x=-1 : $f'(-1) = 0$

$$3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$$
$$3a - 2b + c = 0$$

Vendepunkt i x=$\frac{1}{2}$:

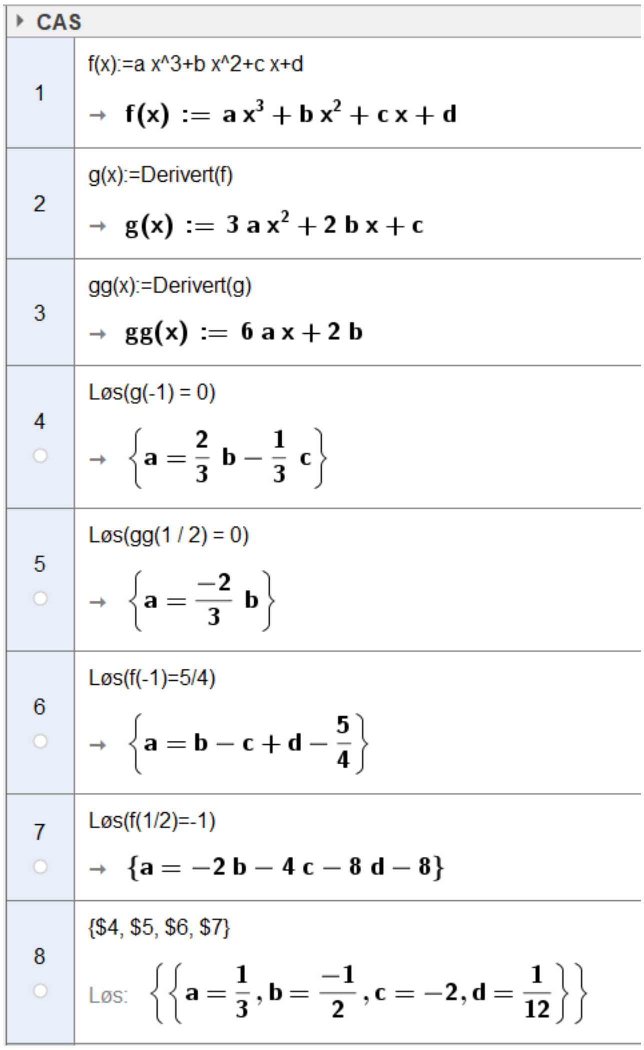
$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$6 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot b = 0$$
$$3a + 2b = 0$$

y-verdi topp : $f(-1) = \frac{5}{4}$

$$-a + b - c + d = \frac{5}{4}$$
$$-4a + 4b - 4c + 4d = 5$$

y-verdi vendepunkt :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{1}{2}\right)^2 + c\left(\frac{1}{2}\right) + d = -1$$
$$\frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d = -1$$
$$a + 2b + 4c + 8d = -8$$



Vi har 4 ukjente og 4 likninger, løser likningssettet:

$$
\begin{aligned}
II: &\quad 3a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}a \\
I: &\quad 3a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = -3a - 3a = -6a \\
III: &\quad a + 2b + 4c + 8d = -8 \\
&\quad a - 3a - 24a + 8d = -8 \\
&\quad 26a - 8d = 8 \\
IV: &\quad -4a + 4b - 4c + 4d = 5 \\
&\quad -4a - 6a + 24a + 4d = 5 \\
&\quad 14a + 4d = 5 \\
&\quad 28a + 8d = 10 \\
III + IV: &\quad 54a = 18 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\
&\quad b = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \\
&\quad c = -6 \cdot \frac{1}{3} = -2 \\
&\quad 8d = 26 \cdot \frac{1}{3} - 8 = \frac{26-24}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{3 \cdot 8} = \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

4.4 Eksponentielle funksjoner

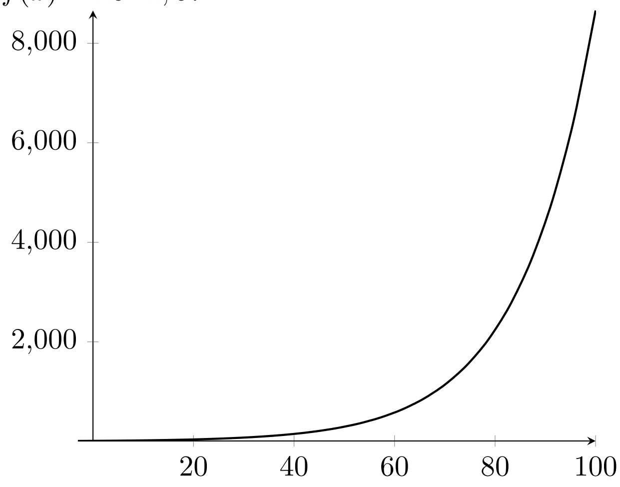
Når noe vokser med en fast prosent.

$$f(x) = k \cdot a^x$$
$$f'(x) = k \cdot a^x \cdot \ln a$$
$$f''(x) = k \cdot a^x \cdot (\ln a)^2$$

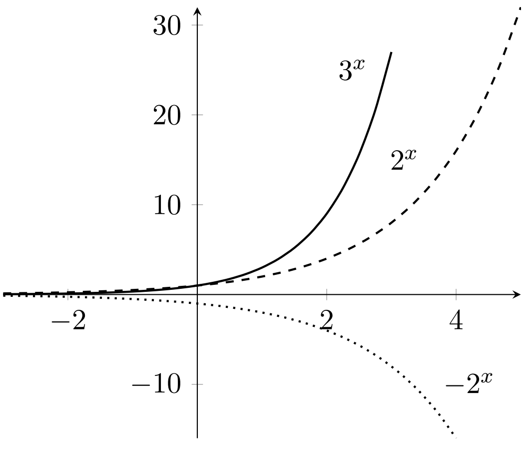
$\ln a > 0 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow$ f er strengt voksende
$\ln a < 0 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow$ f er strengt synkende
$\ln a = 0 \Rightarrow a = 1$

Eksempel

$f(x) = 10 \cdot 1,07^x$



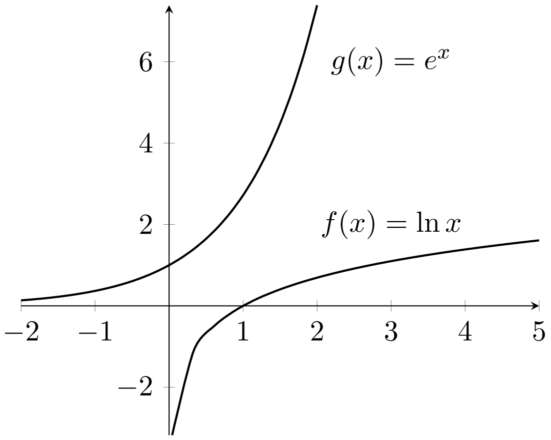
Eksempel



Eksponentialfunksjonen har ikke nullpunkter, ikke topp-/bunnpunkter, konveks når $a > 1$, konkav når $a < 1$.
$a = 1 \Rightarrow f(x) = k$.
$f(0) = k$, krysser alltid y-aksen i k

4.5 Logaritmiske funksjoner

$$f(x) = \ln x$$



Eksempel

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

Definisjonsområde : Logaritmen er kun definert for positive tall, altså må $(x^2 - 1) > 0$

$$(x^2 - 1) > 0$$
$$x \in \left\langle \leftarrow, -1 \right\rangle \cup \left\langle 1, \rightarrow \right\rangle$$

Nullpunkter

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \ln(x^2 - 1) &= 0 \\ x^2 - 1 &= 1 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vi finner sånn ca hvor nullpunktene ligger

$$\begin{aligned} \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \\ 1 < \sqrt{2} < 2 \end{aligned}$$

Begge nullpunktene er innenfor definisjonsmengden, altså i $(-\sqrt{2}, 0)$ og $(\sqrt{2}, 0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{(x^2 - 1)} \\ f'(x) &= 0 \\ x &= 0, \text{ utenfor definisjonsområdet} \\ f''(x) &= \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \\ f''(x) &= 0 \end{aligned}$$

alltid negativ, altså alltid konkav

Tegn fortegnslinjer, og lag e skisse av grafen til $f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) = ln(0^+) = -\infty \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) = ln(0^+) = -\infty \end{aligned}$$

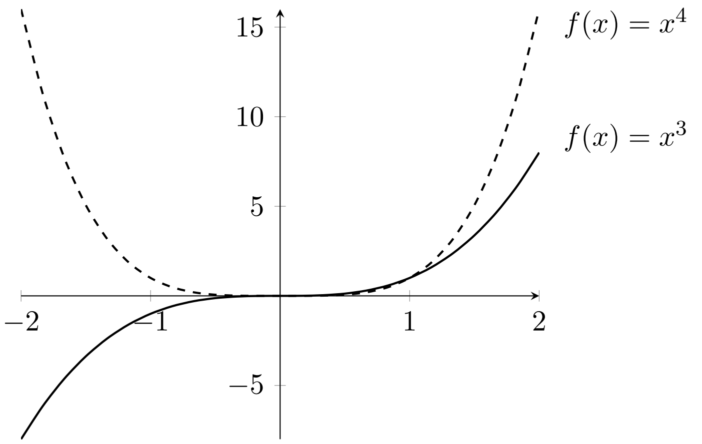
4.6 Potensfunksjoner

$$f(x) = k \cdot x^p$$

Lag glidere i Geogebra

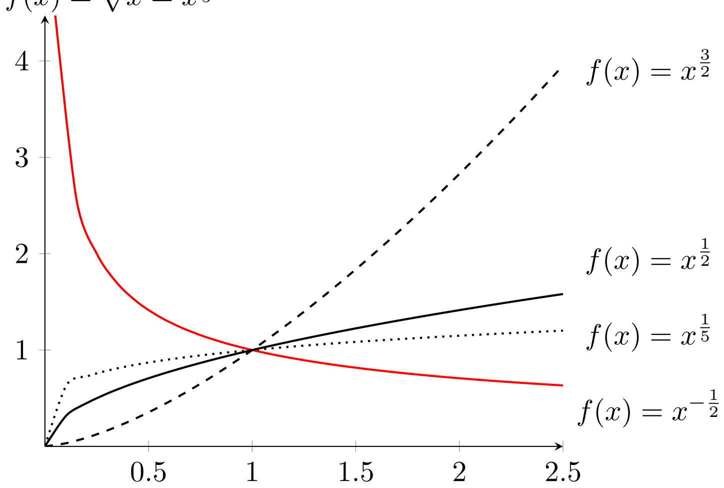
Eksempel

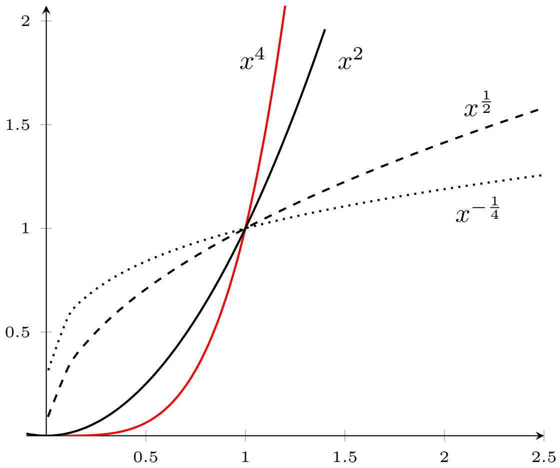
$f(x) = x^4$
$f(x) = x^3$



Eksempel

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{-\frac{1}{2}}$
$f(x) = x\sqrt{x} = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$
$f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$




x^4
x^2
$x^{\frac{1}{2}}$
$x^{-\frac{1}{4}}$
2
1.5
1
0.5
0.5
1
1.5
2
2.5

4.7 Rentesrenteformelen

$$K_n = K_0\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$$
$$K_n = K_0 \cdot VF^n$$

Eksempel

En bil koster ny 320 000. Etter 5 år blir den solgt for 190 000, etter 9 år blir den solgt for 120 000

Finn en eksponentialfunksjon som passer til disse tallene.

Regresjon : Eksponentiell 1 vs. Eksponentiell 2
$f(x) = 322237 * 0.897^x$

Finner punkter i teksten : $(0, 320000)$, $(5, 190000)$ og $(9, 120000)$

Nå synker bilens verdi raskest? - $V'(0) = 35055$ kr/år (momentan vekst i starten av det første året)

Hvor mye sank verdien det første året? - $V(1) - V(0) = 33223$

Når er bilens verdi halvert? - 6.37 år

Årlig prosentvis verditap? - 10.6%

Eksempel

Du setter 10 000,- i banken til 2 % rente.
Hvor mye har du i banken etter 10 år?
Hvor mange år til summen er doblet?

5 Vekst og Derivasjon

Gjennomsnittlig vekst måles mellom to punkter,

Momentan vekst er veksten i et punkt.

Gjennomsnittlig vekst (Vekstfart)

En funksjon $f(x)$ har gjennomsnittlig vekstfart mellom x_2 og x_1

$$\frac{\text{endring i y-verdi}}{\text{endring i x-verdi}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dette er gjennomsnittlig økning i y-retning per økning i x-retning på intervallet.

Momentan vekst

Dersom vi måler endringen over et veldig lite intervall får vi det vi kaller momentan vekst. Vi kan ikke måle veksten i et punkt, fordi da blir $\Delta x = 0$, og vi kan ikke dividere med null. Derfor har vi verktøyet derivasjon som gir oss momentan vekst.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivasjon

En grenseoperasjon på en funksjon, som gir en ny funksjon, den deriverte til den opprinnelige. Funksjonsverdiene til den deriverte er stigningstallene til grafen til den opprinnelige funksjonen.

Den deriverte forteller oss hvor fort en gitt variabel (f.eks. f(x)) endrer seg i forhold til endringen i en annen variabel (f.eks. x). Vi kan tolke den deriverte geometrisk som stigningstallet til en tangentlinje.
Den deriverte kan også tolkes fysisk som hvor stor momentan endring en størrelse har.

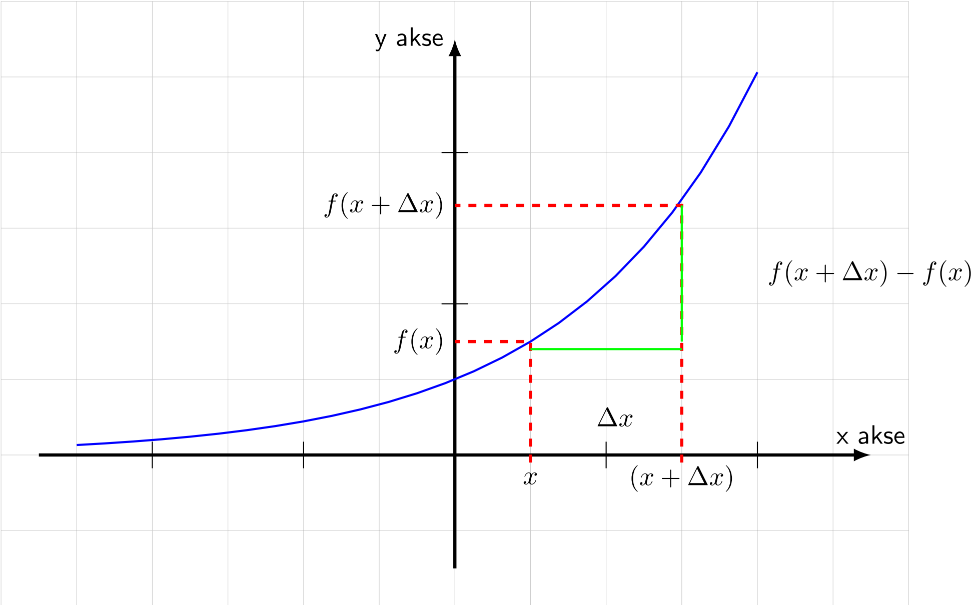
Lineær vekst - jevn vekst

Eksponentiell vekst - vokser prosentvis, dvs. vekstfarten endres

Logistisk vekst - eksponentiell vekst som avtar mot en bæreevne.

Definisjon av den deriverte

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Vi finner den gjennomsnittligeveksten mellom punktene $(x, f(x))$ og $((x+\Delta x), f(x+\Delta x))$
Vi kan bruke definisjonen til å derivere :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - (x^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Eksempel

Bruk definisjonen til å finne den deriverte : $f(x) = x^2 + x$

Eksempel

Bruk definisjonen til å finne den deriverte : $f(x) = 2x^2 - x$

Når vi vet verdien vi skal finne den deriverte i kan vi bruke formelen :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Denne kalles ofte for Newtons konstant.

Newtons symmetriske konstant gir ofte et bedre resultat,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Eksempel

Finn $f'(3)$ når $f(x) = x^2 - 4x + 1$

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 4x + 1) - (3^2 - 4 \cdot 3 + 1)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 1 - 3^2 + 12 - 1)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} x - 1 = 2
\end{aligned}$$

Lag et program i Python som finner denne verdien med numerisk metode.

Eksempel

Finn $f'(3)$ når $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{(x^3 - 2x^2 + 3x - 2) - (3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 2)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2 - 27 + 18 - 9 + 2}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 18}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x^2 + x + 6)}{x - 3} \\
&= \lim_{x \to 3} x^2 + x + 6 = 9 + 3 + 6 = 18
\end{aligned}$$

5.1 Derivasjon Grunnregelen

$$(a \cdot x^n)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Flerleddede uttrykk, deriver ett ledd av gangen :

$(2x^3 + 4x^2 - 3x + 8)' = 6x^2 + 8x - 3$

Husk reglene for potenser og røtter, noen ganger må vi omforme uttrykket før vi deriverer:

$(\frac{1}{x^2})' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$

Eksempel

$$(2x^3)' = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 6x^2$$

Eksempel

Flerleddet utrrykkk deriverers ett ledd av gangen.

$$\begin{aligned}(x^3 + x^2 + x + 1)' &= 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 \\ &= 6x^2 + 2x = 2x(3x + 1)\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2}\right)' &= (x^{-2})' \\ &= (-2) \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(\sqrt{x})' &= x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

5.2 Flere regler

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= a^x \cdot \ln a \\
(e^x) &= e^x \cdot \ln e = e^x \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

5.3 Produktregelen

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(x \cdot x^2)' &= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x \\ &= x^2 + 2x^2 \\ &3x^2 \\ \text{MR: } u = x, u' = 1, v = x^2, v' = 2x\end{aligned}$$

Denne kan vi også løse ved å omforme med potensreglene først.

$$\begin{aligned}(x \cdot x^2)' &= (x^3)' \\ &= 3x^2\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(2x^3 \cdot \ln x)' &= 6x^2 \cdot \ln x + 2x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 6x^2 \cdot \ln x + 2x^2 \\ &= 2x^2(3\ln x + 1) \\ \text{MR: } u = 2x^3, u' = 6x^2, v = \ln x, v' = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(x^2 \cdot e^x)' &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ &= xe^x(2 + x) \\ \text{MR: } u = x^2, u' = 2x, v = e^x, v' = e^x\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(e^x \cdot \ln x)' &= e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} \\ &= e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

5.4 Kvotientregelen

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2}{2x-5}\right)' &= \frac{2x \cdot (2x-5) - x^2 \cdot 2}{(2x-5)^2} \\
&= \frac{2x(2x-5) - 2x^2}{(2x-5)^2} \\
&= \frac{4x^2 - 10x - 2x^2}{(2x-5)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 10x}{(2x-5)^2} \\
&= \frac{2x(x-5)}{(2x-5)^2}
\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2x}{e^x}\right)' &= \frac{2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x}{(e^x)^2} \\
&= \frac{2e^x(1-x)}{(e^x)^2} \\
&= \frac{2(1-x)}{e^x}
\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} \\
&= \frac{x - \ln x \cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} \\
&= \frac{1 - 2\ln x}{x^3}
\end{aligned}$$

5.5 Utledning av formel for derivasjon av kvotient

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Bruker logaritmen som et verktøy til en omforming :

$$\begin{aligned}
\ln(\frac{u}{v}) &= \ln u - \ln v \\
(\ln(\frac{u}{v}))' &= (\ln u - \ln v)' \\
&= \frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v' \\
&= \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}
\end{aligned}$$

Går så tilbake til derivasjonen :

$$\begin{aligned}
(\frac{u}{v})' &= (e^{\ln(\frac{u}{v})})' \\
&= e^{\ln(\frac{u}{v})} \cdot (\ln(\frac{u}{v}))' \\
&= \frac{u}{v} \cdot (\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}) \\
&= \frac{u}{v} \cdot \frac{u'v - uv'}{uv} \\
&= \frac{u'v - uv'}{v^2}
\end{aligned}$$

5.6 Kjerneregelen

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}((x^2+2)^4)' &= 4(x^2+2)^3 \cdot (x^2+2)' \\ &= 4(x^2+2)^3 \cdot 2x \\ &= 8x(x^2+2)^3\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(\sqrt{2x})' &= \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}}\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(e^{2x})' &= e^{2x} \cdot (2x)' \\ &= 2e^{2x}\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}(e^{x^2})' &= e^{x^2} \cdot (x^2)' \\ &= 2xe^{x^2}\end{aligned}$$

MR: $u = x^2, u' = 2x$

Eksempel

$$\begin{aligned}(\ln(2x))' &= \frac{1}{2x} \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2x} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{x} \\ (\ln(2x))' &= (\ln 2 + \ln x)' \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(\ln(x^2))' &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x \\
&= \frac{2x}{x^2} \\
&= \frac{2}{x} \\
(\ln(x^2))' &= (2\ln x)' \\
&= \frac{2}{x}
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(\frac{2}{3x+4})' &= (\frac{2}{u})' \cdot u' \\
u &= 3x+4 \\
u' &= 3 \\
g'(u) &= (2u^{-1})' = \frac{2}{u^2} \\
&= -\frac{6}{(3x+4)^2}
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
((1-\sqrt{x})^4)' &= 4(1-\sqrt{x})^3(-\frac{1}{2\sqrt{x}}) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})^3
\end{aligned}
$$

6 Tangenter

En tangent er en rett linje som tangerer grafen.
Stigningstallet til tangenten i punktet $x = x_1$ er $a = f'(x_1)$.

Tangent :

$$y = a \cdot x + b$$

$$y = f'(x) \cdot x + b$$

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 3x + 2 \\ f'(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Vi skal finne likningen til tangenten i punktet $(2, f(2))$

Alt I :

$$\begin{aligned} f(2) &= 4 + 6 + 2 = 12 \\ \text{Kjent punkt : } P = (2, 12) : f'(2) &= 4 + 3 = 7 \\ \text{Veksten i punktet } &= \text{ stigningstallet til tangenten} \\ y &= 7x + b \\ \text{setter inn kjent punkt : } 12 &= 7 \cdot 2 + b \\ b &= 12 - 14 = -2 \\ y &= 7x - 2 \end{aligned}$$

Alt II : Ettpunktsformelen

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1) \\ y - 12 &= 7(x - 2) \\ y &= 7x - 14 + 12 \\ y &= 7x - 2 \end{aligned}$$

Eksempel

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$
$$f'(x) = 6x - 2$$

Finn likningen til tangenten i punktet $(1, f(1))$

$$f(1) = 3 - 2 - 1 = 0$$
$$\text{Kjent punkt } P = (1,0) : f'(1) = 6 - 2 = 4$$
$$y = 4x + b$$
$$\text{Setter inn kjent punkt:} 0 = 4 + b$$
$$b = -4$$
$$y = 4x - 4$$

Vi kan bruke ettpunktsformelen.

$$\text{Tangenten går gjennom punktet } (x_1, y_1) = (1,0)$$
$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
$$\text{Stigningstallet : } a = f'(1) = 4$$
$$y - 0 = 4(x - 1)$$
$$y = 4x - 4$$

Eksempel

$$f(x) = -2x^3 + 8x + 4$$

Finn likningen til tangenten i punktet $(1, f(1))$

$$f(1) = -2 + 8 + 4 = 10$$
$$\text{Grafen går gjennom punktet (1,10)}$$
$$f'(x) = -6x + 8$$
$$f'(1) = -6 + 8 = 2$$
$$\text{Stigningstallet til tangenten er 2 :} y = 2x + b$$
$$\text{Setter inn (1,10):}$$
$$10 = 2 + b$$
$$b = 8$$
$$\text{Likningen til tangenten er :} y = 2x + 8$$

Eksempel

$$f(x) = 4x^3 + 2$$

Finn likningen til tangenten i punktet $(1, f(1))$

$$\begin{aligned}
\text{Grafen går gjennom punktet (1,f(1))}&\\
f(1) &= 4 + 2 = 6\\
\text{Grafen går gjennom punktet (1,6)}&\\
f'(x) &= 12x^2\\
f'(1) &= 12\\
y &= 12x + b\\
\text{Setter inn (1,6):}&\\
6 &= 12 + b\\
b &= -6\\
\text{Likningen til tangenten er :}y &= 12x - 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(x) = -x^2 + 4x + 1, x = 1\\
&f(x) = x^2 - 32 + 2, x = 3\\
&f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

7 Grenseverdier

La f være en funksjon og L et tall. Dersom

$$f(x) \to L \text{ når } x \to a$$

kaller vi L for grenseverdien til $f(x)$ når x går mot a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Hvis $f(x)$ ikke nærmer seg noe bestemt tall når $x \to a$, sier vi at grenseverdien $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ikke eksisterer.

lim er forkortelse for limes som betyr grense på latin.

Eksempel

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} (2x + 3) &= 2 \cdot 1 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Dersom det er mulig kan vi bare sette inn grensen i uttrykket.
Geogebra CAS : Grenseverdi(2x+3, 1) $\to$ 5

7.1 Grenseverdier for rasjonale uttrykk

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

1. $f(a) = 0, g(a) \neq 0 \to 0$
2. $f(a) \neq 0, g(a) = 0 \to \pm\infty$, ingen grense
3. $f(a) = 0, g(a) = 0 \to$ faktorisere, dividere med høyeste potens av x
4. $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$ $\to$ l'Hôpitals regel

Eksempel

Dersom vi får null i nevneren kan vi ikke sette inn grensen direkte, men noen ganger kan vi omforme/forkorte uttrykket

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} x \\ &= 1 \end{aligned}$$

Eksempel

Dersom telleren går mot null og nevner ikke går mot null, er grenseverdien null.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+2} &= \frac{0}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eksempel

Dersom nevner går mot null og teller ikke går mot null, finnes ingen grenseverdi.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} \frac{x+3}{x+1} &= \frac{'4'}{0} \\ &= \infty \end{aligned}$$

NB! vi kan ikke dividere med null, men hvis vi deler på et tall som er veldig nær null $(0,00000000001)$, vil vi se at svaret blir uendelig stort.

7.2 Grenseverdi $\frac{\infty}{\infty}$

Når grenseverdien sier $\frac{\infty}{\infty}$ så vet vi egentlig ingenting.
Da må vi bruke andre metoder for å komme videre.
Vi kan dividere med høyeste potens av x,
eller vi kan bruke L'Hôpitals metode

Eksempel

Dividere med høyeste potens av x.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+2} &= \frac{\infty}{\infty}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Vi kan også løse denne med L'Hôpitals metode

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+2} &\overset{L'H}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Eksempel - Skrå asymptote

$$f(x) = \frac{2x^3-1}{3x^2+x-4}$$

Høyere potens i teller enn i nevner- da må vi dividere

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-1}{3x^2+x-4} = \lim_{x\to\infty}$$

$$(2x^3-1):(3x^2+x-4) = \frac{2}{3}x+\frac{2}{9}+\frac{2x-1}{3x^2+x-4}$$

Da har vi en skrå asymptote $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}$

$$\begin{aligned}3x^2+x-4 &= 0\\ x &= \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot(-4)}}{2\cdot3}\\ &= \frac{-1\pm\sqrt{49}}{6}\\ &= \frac{-1\pm7}{6}\\ x=1 \vee x &= \frac{-4}{3}\end{aligned}$$

Vertikale asymptoter når $x=1$ og $x=\frac{-4}{3}$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2+2} &= \frac{\infty}{\infty} \\
(x^2+3x-1):(x^2+2) &= 1 + \frac{3x-3}{x^2+2} \\
\lim_{x\to\infty} 1 &= 1 \\
\lim_{x\to\infty} \frac{3x-3}{x^2+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} \\
&= \frac{0}{1} = 0 \\
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2+2} &= 1+0 = 1
\end{aligned}
$$

Grenseverdi setningene

Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = K$ og $\lim_{x\to a} g(x) = L$
Da er :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \big[f(x) \pm g(x)\big] &= K \pm L \\
\lim_{x\to a} \big[f(x) \cdot g(x)\big] &= K \cdot L \\
\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{K}{L}
\end{aligned}
$$

Eksempel

$$
f(x) = \frac{3x+2}{x-3}
$$

Ikke definert når $x = 3$, da har grafen et brudd. Vi antar at dette er en vertikal asymptote når $x = 3$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^+} \frac{3x+2}{x-3} &= \infty \\
\lim_{x\to 3^-} \frac{3x+2}{x-3} &= \frac{+}{-} = -\infty \\
\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x-3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}} = 3
\end{aligned}
$$

eller med l'Hôpital (kan brukes ved $\frac{\infty}{\infty}$):

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1} = 3
$$

Eksempel

$$f(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{1}{x}(x^2+4) = \frac{x^2+4}{x}$$

1) Finn f'(x) og f''(x)
2) Finn topp- og bunnpunkter uten hjelpemidler
3) Finn asymptotene
4) lag en skisse av grafen

1)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + \frac{4}{x} \\
f'(x) &= 1 - \frac{4}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2}(x^2-4) \\
&= \frac{1}{x^2}(x+2)(x-2) \\
&= \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} f''(x) & &= \frac{8}{x^3}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
1 - \frac{4}{x^2} &= 0 \\
x^2 - 4 &= 0 \\
(x+2)(x-2) &= 0 \\
f(2) &= 2 + \frac{4}{2} = 2 + 2 = 4 \\
f''(2) &= \frac{8}{8} = 1 > 0 \\
f(-2) &= -2 + \frac{4}{-2} = -2 - 2 = -4 \\
f''(-2) &< 0
\end{aligned}$$

Bunnpunkt i $(-2,-4)$, og toppunkt i $(2,4)$

3)
$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x + \frac{4}{x} = \infty$, altså vertikal asymptote når x=0

$f(x) = x + \frac{4}{x}$ gir en skrå asymptote når $y = x$

8 Rasjonale funksjoner

En rasjonal funksjon er en funksjon som kan skrives som en brøk der telleren og nevneren er polynomer.

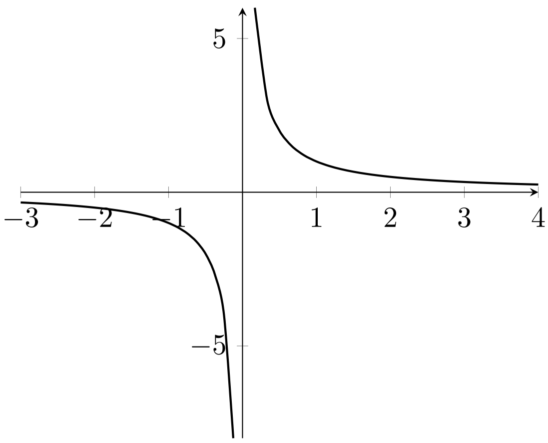
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Eksempel

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Vi kan tegne denne ved å lage en verditabell.
Vi vet også at $f(0)$ ikke eksisterer (vi kan ikke dele på null) , og at dersom x blir veldig stor så blir $f(x)$ veldig liten.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	X	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

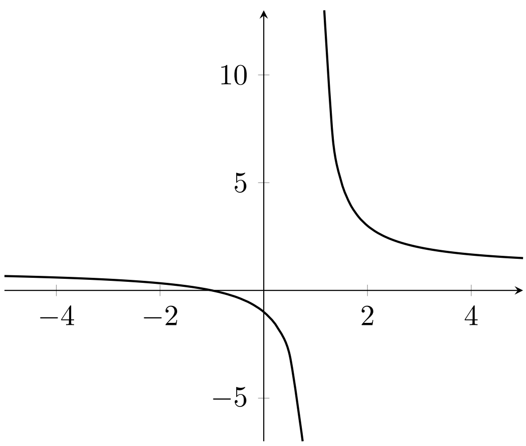


$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$
$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \infty$$
$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\left(\frac{1}{-0,0000001} = -10^7 = -\infty\right)$$

Eksempel

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1+} = \infty$$
$$\lim_{x\to1-} = -\infty$$



Vi kan ikke ha $x = 1$, da finnes ikke grafen (vi kan ikke dele på null)
altså har vi en vertikal asymptote når $x = 1$.

$$\lim_{x\to\infty} = 1^+$$
$$\lim_{x\to-\infty} = 1^-$$

altså har vi en horisontal asymptote når $y = 1$.

Eksempel

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} 2x = 4$$

Dette uttrykket kan forkortes derfor er det enkelt å finne grenseverdien.

Eksempel

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$
$$= \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}$$
$$= x+1$$

Dette er en rett linje, men vi må ikke glemme hvor vi kommer fra.....

Vi kan forkorte uttrykket, men må huske på at f(x) ikke er definert for x=1, siden det gir null i nevneren.
Vi kan derfor ikke regne ut f(1) , så da må vi bruke grenseverdi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Grafen til denne funksjonen er en rett linje med et "hull" der x=1

8.1 Skrå asymptote - pensum??

$$f(x) = ax + b + g(x)$$

der $g(x)$ er resten ved polynomdivisjonen.
Da er $y = ax + b$ den skrå asymptoten.

Eksempel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+n}{3n^2-1} \lim_{n\to\infty} \frac{7+1/n}{3-1/n^2}$$
$$= \frac{7}{3}$$

Eksempel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-3n^4}{n^4-5n^3+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^4-3}{1-5/n+1/n^3}$$
$$= \frac{-3}{1}$$
$$= -3$$

Eksempel

$$f(x) = x^3 + 2x + 5$$

a) Vis at f(x) er kontinuerlig for x=3

$\lim f(3) = 27 + 6 + 5 = 38$, altså kontinuerlig.

b) Vis at f(x) er kontinuerlig for alle $x \in R$

$$\lim_{x\to a} x^3 + 2x + 5 = a^3 + 2a + 5 = f(a)$$

Eksempel

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}\ , D_f = R\{1\}$$

a) Vis at $f(x)$ er kontinuerlig for $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

b) Vis at $f(x)$ er kontinuerlig for alle $x \in D_f$

$$\lim_{x\to a} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{\lim_{x\to a} 2x-1}{\lim_{x\to a} x-1} = \frac{2a-1}{a-1} = f(a)$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+2x-8}{2x-4} \\
\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{2(x-2)} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x+4)}{2} \\
&= \frac{6}{2} = 3
\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-1}{x^2+x-2} \\
&= \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\
\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2-3x+2}{x-1} \\
\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)} &= \lim_{x\to 1} x-2 \\
&= 1-2 = -1
\end{aligned}$$

Vi kan også løse denne med Δx-metoden:
Setter $x = 1 + \Delta x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+2}{(1+\Delta x)-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1+2\Delta x+\Delta x^2-3-3\Delta x+2}{1+\Delta x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\Delta x^2-\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{x\to 1}\Delta x - 1 = -1
\end{aligned}$$

9 Logistisk vekst - pensum i R2

Verhulstkurven

$$N'(x) = rN(\frac{K-N}{K} = rN(1 - \frac{N}{K}))$$
$$N(x) = \frac{K}{1 + C \cdot e^{rx}}$$

$$f(x) = \frac{K}{1 + e^{-k(x-x_0)}}$$

K = grafens maksismale verdi (Bæreevne)
k = vekstrate (kurvens bratthet)
x_0 = x-verdien til vendepunktet

9.1 Logistisk funksjon

En logistisk funksjon vokser eksponentielt, men avtar mot en fast verdi (bæreevne).
Vi kan modellere et uttrykk for endringen og løse den som en differensiallikning :
Startverdi (0,1), bæreevne K=2 gir diff.likn : $y' = y(1 - \frac{y}{K})$
Denne løser vi i Geogebra : $løsODE(y' = y(1 - \frac{y}{K}), (0,1))$ som gir oss : $f(x) = \frac{2}{1-e^{-1}}$
eller vi kan modellere direkte : $f(x) = \frac{2}{1+e^{-k(x-x_0)}}$

Eksempel

Befolkningen på en øy i Nordishavet har 10.000 innbyggere. Befolkningsveksten er på 1,5% pr.år.

Vi kan lage et funksjonsuttrykk for å beskrive dette.

$$f(x) = 10000 \cdot 1,015^x = 10000 \cdot e^{0,015x}$$

,men ingenting vokser inn i himmelen, og vi har fått en beregning av befolkningsveksten som er

$$f(x) = \frac{1000}{9 \cdot e^{0,015x} + 1}$$

$$f(x) = \frac{B}{1 + a \cdot e^{-k \cdot x}}$$

B=bæreevne

$$\lim_{x \to \infty} e^{-k \cdot x} = 0$$

altså vil funksjonsverdien

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{B}{1} = B$$

Logistisk vekst benyttes for å beskrive hvordan antall individer i en populasjon endrer seg. Det vil da ofte være slik at endringen er rask i starten, men avtar mot en bæreevne.

- antall kaniner på en øy
- antall reinsdyr på Hardangervidda

- antall bakterier i en bakteriekultur
- antall mennesker på jorda??

Eksempel

Antall ørret

år	1998	2000	2002	2004		2006	2008	2010
fisk	4000	6700	10900	17400		21500	24500	26000

Bruk regresjon, først på 1998 - 2004 : Eksponentiell vekst og logistisk vekst

Så på hele intervallet : logistisk

Sammenlikne og kommentere.

Eksempel - generell observasjon

Når vokser denne raskest?
forutsetter at konstantene a, k, og B er positive.

$f(x) = \frac{B}{1+a \cdot e^{-kx}}$

$f'(x) = \frac{Bake^{-kx}}{(ae^{-kx}+1)^2}$

Vokser raskest i vendepunktet :

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\ln a}{k}$ (regnet ut i Geogebra)

$f'(\frac{\ln a}{k}) = \frac{Bk}{4}$

For å sjekke om $x = \frac{\ln a}{k}$ er en topp eller en bunn på den deriverte, kan vi trippelderivere :
$f'''(\frac{\ln a}{k}) = -\frac{1}{8}Bk^3 < 0$ altså er veksten størst (ikke minst) i dette punktet.

Hvor mange individer er det nå veksten er størst?
$f(\frac{\ln a}{k}) = \frac{1}{2}B$

Aktivitet

Undersøk funksjonen for logistisk vekst med glidere.

10 Omvendte funksjoner

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(x) = a \Rightarrow g(a) = x$$

$f(x)$ og $g(x)$ er omvendte funksjoner dersom : $g(f(x)) = x$ og $f(g(x)) = x$

Vi skriver ofte den omvendte funksjonen som $f^{-1}(x)$

$f(x)$ har en omvendt funksjon dersom den er strengt voksende eller synkende i intervallet.

én-entydig

En funksjon f har en omvendt funksjon hvis den er én-entydig.
En funksjon f er én-entydig hvis $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in D_f$.

Eksempler på én-entydige funksjoner :
Lineære - vokser eller avtar i hele R , f.eks. $f(x) = x + 2$
Hyperbler - vokser eller avtar i hele definisjonsområdet, eks. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
Eksponentielle - vokser eller avtar i hele R , eks $f(x) = e^x$

IKKE én-entydig :
Parabel - én y-verdi kan ha flere x-verdier.

Dersom $g(x)$ er en omvendt funksjon til $f(x)$ vil

$$D_g = V_f \text{ og } V_g = D_f$$

Eksempel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 & \qquad D_f &= [0, \rightarrow> \ , \ V_f = [0, \rightarrow \rangle \\ y &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{y} \\ g(x) &= \sqrt{x} & \qquad D_g &= [0, \rightarrow> \ , \ V_f = [0, \rightarrow \rangle \end{aligned}$$

10.1 Derivasjon av omvendte funksjoner

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

La $g(x)$ være den omvendte funksjonen til $f(x)$.
Da er $g(f(x)) = x$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \\ g'(f(x)) \cdot f'(x) &= 1 \\ g'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \\ g(x) &= \sqrt{x} \\ f'(g(x)) &= f'(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x} \\ g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Eksempel

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} - 2 \\ f(1) &= \sqrt[3]{1} - 2 \\ &= -1 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ f'(1) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \\ &= \frac{1}{3} \\ g'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \\ g'(-1) &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{1/3} = 3 \end{aligned}$$

11 Delt funksjonsuttrykk

Et delt funksjonsuttrykk bruker vi når modellen bytter funksjonsuttrykk innen definisjonsområdet.

Eksempel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & , \ x < 1 \\ -2x + 5 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Er $f(x)$ kontinuerlig for $x = 1$?

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1} x^2 + 2 \\ &= 1 + 3 = 3 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1} -2x + 5 \\ &= -2 + 5 = 3 \end{aligned}$$

altså er $f(x)$ komtinuerlig.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \ x < 1 \\ -2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1) = \begin{cases} 2 & , \ x < 1 \\ -2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

altså ikke deriverbar for $x = 1$

Eksempel

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \ x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 2 & , x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2} 2x + 1 \\ &= 4 + 1 = 5 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2} -x^2 + 6x - 2 \\ &= -4 + 12 - 2 = 6 \end{aligned}$$

altså ikke kontinuerlig, da er den heller ikke deriverbar.

Eksempel

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \ x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

Kontinuerlig, men ikke deriverbar i $x = 0$.

11.1 Kontinuerlige funksjoner

En funksjon er kontinuerlig dersom grafen til funksjonen er sammenhengende.

Hvis $f(x)$ er definert for $x = a$, sier vi at f er kontinuerlig i punktet $x = a$ dersom

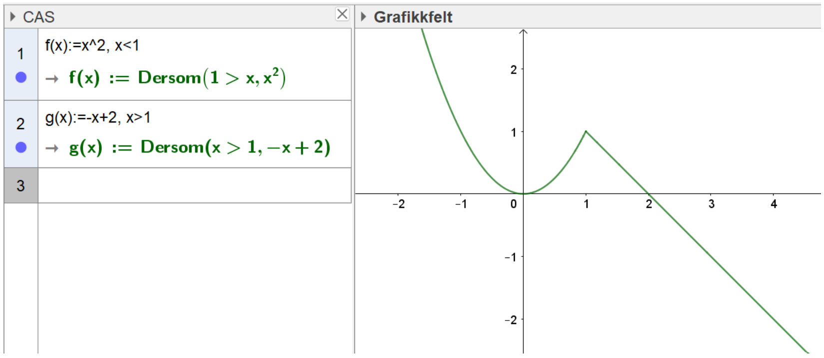
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Dersom f er kontinuerlig i alle punktene i et intervall, sier vi at f er kontinuerlig i intervallet.

Eksempel

Kontinuerlig funksjon :

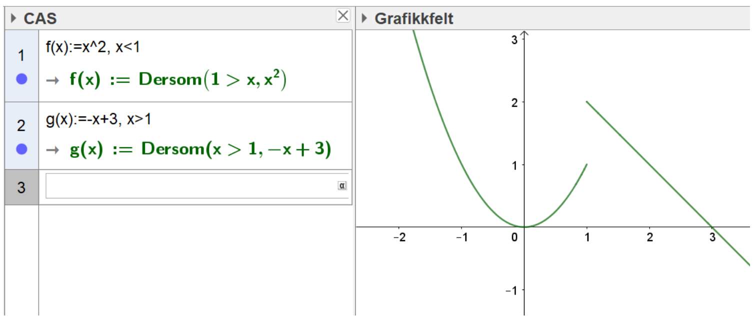
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 1 \\ -x + 2 & , x \geq 1 \end{cases}$$



Eksempel

Ikke-kontinuerlig i $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 1 \\ -x + 3 & , x \geq 1 \end{cases}$$



Eksempler på kontinuerlige funksjoner

Potensfunksjoner : x , $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$

eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner : e^x , 2^x , $\ln x$

Trigonometriske funksjoner : $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

11.2 Deriverbarhet

En funksjon er deriverbar når den både er kontinuerlig i punktet og ikke har en ≪knekk≫. En knekk oppstår dersom stigningstallet plutselig forandrer seg.