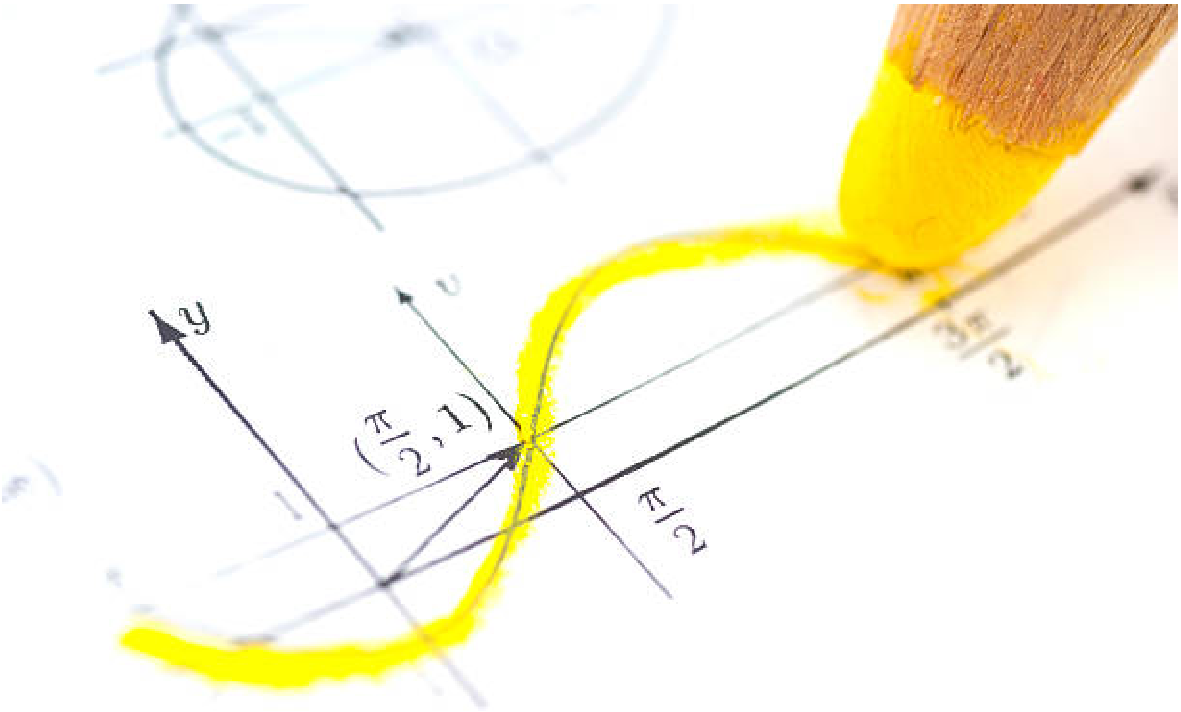
Trigonometri



Innhold

1 Definisjoner

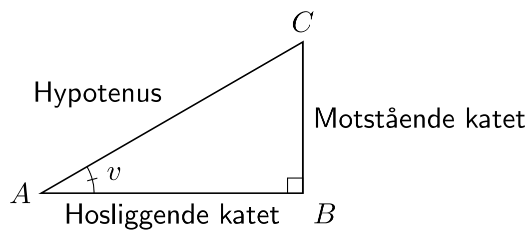
Cosinus - Cosinus er en trigonometrisk funksjon.
Cosinus til en vinkel i en rettvinklet trekant (ikke den rette vinkelen) er lik forholdet mellom lengden til hosliggende katet og hypotenus.

Sinus - Sinus er en trigonometrisk funksjon.
Sinus til en vinkel i en rettvinklet trekant er lik forholdet mellom lengden til motstående katet og hypotenus.

Tangens - Tangens er en trigonometrisk funksjon.
Tangens til en vinkel i en rettvinklet trekant er lik forholdet mellom lengden til motstående katet og hosliggende katet.

2 Trigonometriske grunnsetninger

$$\sin v = \frac{mot}{hyp}$$
$$\cos v = \frac{hos}{hyp}$$
$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{mot}{hos}$$

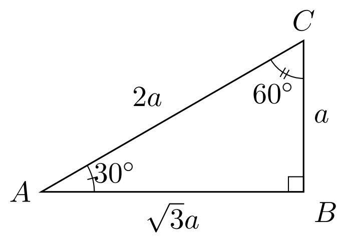


30-60-90-trekant

Hypotenusen er dobbelt så lang som det korteste katetet.
Setter korteste katet til a, da er hypotenusen $2a$.
Finner det ukjente katetet : $x^2 + a^2 = (2a^2) \Rightarrow x = \sqrt{3}a$

$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

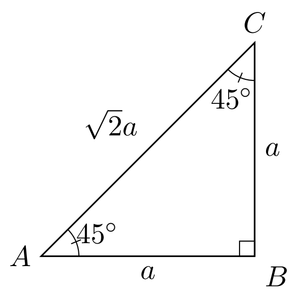
$\cos 60° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



45-45-90-trekant

Dette er en likebeint trekant,setter begge katetene til a.
Da blir hypotenusen $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



3 Cosinus-, sinus, og arealsetningen

3.1 Cosinussetningen

La ABC være en trekant. Anta at vi kjenner sidene AB , AC og $\angle A$ mellom dem. Da er

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AB \cdot AC)cos(\angle A)$$

3.2 Sinussetningen

La ABC være en trekant, og la A,B og C være vinklene i trekanten. Da er

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}$$

vi kan også snu denne på hodet :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin c}$$

3.3 Arealsetningen

$$F = \frac{1}{2} b \cdot c \sin A$$

4 Enhetssirkelen

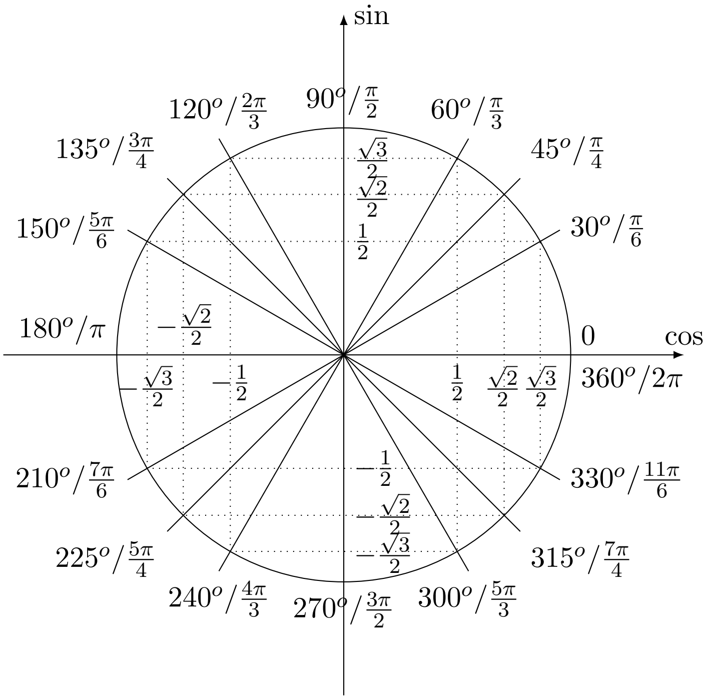
Radianer $= \frac{\text{buelengde}}{\text{radie}}$

En hel runde er 360^o og omkretsen på en sirkel er $2\pi \cdot r$.

Omkretsen av enhetssirkelen er 2π, siden radien er 1.

Forholdet mellom grader og radianer :

$$\frac{\text{vinkel i grader}}{360^o} = \frac{\text{vinkel i radianer}}{2\pi}$$



Eksakte verdier

Grader	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
Radianer	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ikke def.

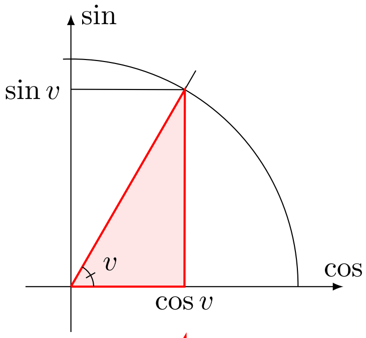
5 Enhetsformelen

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

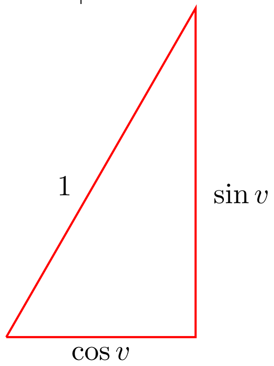
Eksempel

Finn $\sin v$ når vi vet at $\cos v = \frac{1}{4}$.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1$$
$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$
$$\sin x = \frac{\pm\sqrt{15}}{4}$$



Vi tegner inn en tilfeldig vinkel i enhetssirkelen.
Så tegner vi inn en trekant der hypotenusen er 1 fordi trekanten ligger inne i enhetssirkelen.
Trekanten vil da ha kateter med lengdene $\sin v$ og $\cos v$



Pythagoras' setning gir da :

$$kat^2 + kat^2 = hyp^2$$
$$(\sin v)^2 + (\cos v)^2 = 1^2$$
$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

Eksempel

$$2\cos^2 x + \sin^2 x = 2$$
$$2\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 2$$
$$\cos^2 x = 1$$
$$\cos x = \pm 1$$

6 Sum og differanse av vinkler

Sinus og cosinus til sum og differanse av 2 vinkler

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$$

Eksempel

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
\sin(75^\circ) &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\
&= \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot + sin 45^\circ \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}
\end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2(\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \sin x - \sqrt{3}\cos x
\end{aligned}$$

7 Omforming av trigonometriske uttrykk

$$a \cdot \sin(kx) + b \cdot \cos(kx) = A \cdot sin(k(x - \phi))$$
$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$

Eksempel

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x + \cos x \\
&MR: A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
&\quad = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&MR: \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\quad = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Eksempel

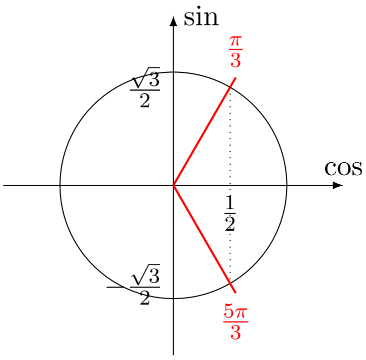
$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x \\
&MR: A = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2 \\
&\quad = 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&MR: \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\quad = 2\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

8 Trigonometriske likninger

$$\sin x = a$$
$$x = x_1 + n \cdot 2\pi \vee x = x_2 + n \cdot 2\pi$$
$$\cos x = a$$
$$x = x_1 + n \cdot 2\pi \vee x = x_2 + n \cdot 2\pi$$

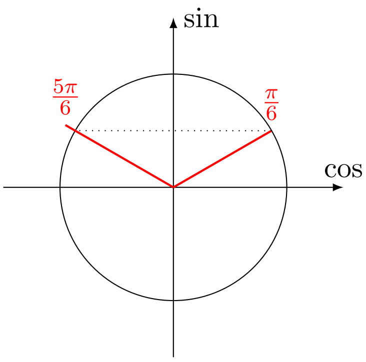
Eksempel

Finner verdien $\frac{1}{2}$ på cosinusaksen (x-aksen), og tegner en vertikal linje i denne verdien. Da ser vi at det er 2 løsninger : $x = \frac{\pi}{3}$ og $x = -\frac{\pi}{3}$. Det andre svaret er utenfor definisjonsmengden $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, så da må vi legge til en periode. Dette er enkelt dersom vi passer på å lage generell løsing. Svar nuller 2 blir da $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$



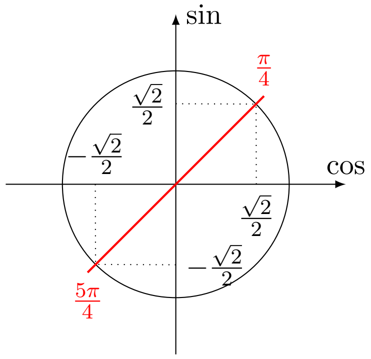
$$\cos x = \frac{1}{2} \quad , \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle$$
$$x_1 = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \bigvee x_2 = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$
$$x = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Eksempel



$$2\sin(2x) = 1 \quad , \quad x \in [0, 2\pi\rangle$$
$$\sin(2x) = \frac{1}{2}$$
$$2x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \bigvee 2x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi \bigvee 2x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$$
$$x = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\}$$

Eksempel



Vi kan bruke enhetssirkelen:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= 0 \\ \sin x &= \cos x \\ x &= \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \end{aligned}$$

eller vi kan regne ut med tangens:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= 0 \\ \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} &= 0 \\ \tan x + 1 &= 0 \\ \tan x &= -1 \\ x &= \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi \end{aligned}$$

9 Trigonometriske funksjoner

$$f(x) = A \cdot \sin(k(x-c)) + d$$

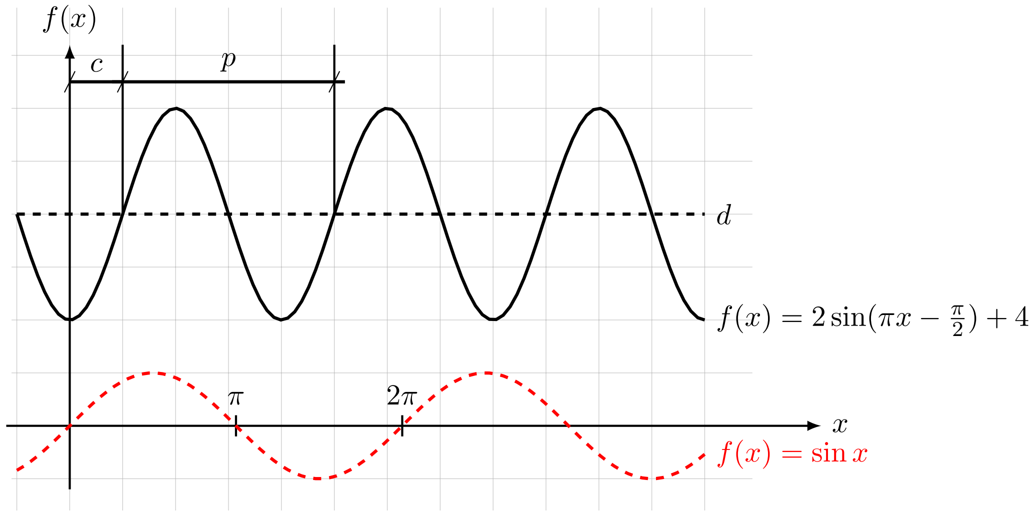
Denne formelen kan dere møte i mange ulike varianter :

$$\begin{aligned}
f(x) &= A\sin(kx - \phi) + d \\
f(t) &= A \cdot \cos(\omega t - \phi) + d \\
t &= \text{vinkelen (radianer)} \\
\omega &= \text{vinkelfart, frekvens (radianer pr.sek.)} \\
\phi &= \text{fasevinkel}
\end{aligned}$$

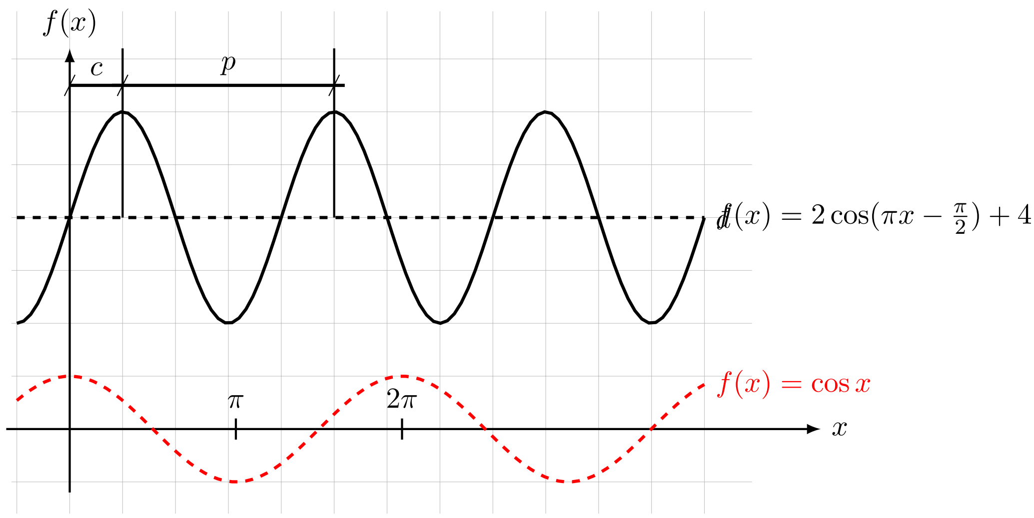
$$\begin{aligned}
f(x) &= A\cos(kx - \phi) + d \\
f(x) &= A\cos(k(x-c)) + d \\
c &= \frac{\phi}{k}, \text{grafens forskyvning} \\
f(x) &= C \cdot \cos(kx) + D \cdot \cos(kx) \\
A &= \sqrt{C^2 + D^2}
\end{aligned}$$

Sammenliknet med $f(x) = \sin(x)$

A strekker grafen i y-retningen - utslaget fra likevektslinja- Amplituden
d forskyver hele grafen i y-retningen - likevektslinja
k strekker grafen i x-retningen - påvirker perioden
Perioden $p = \frac{2\pi}{k}$
c forskyver grafen i x-retningen
Skjæringspunkt med likevektslinja $x = c$ på vei opp.



$$f(x) = A \cdot \cos(k(x - \phi)) + d$$



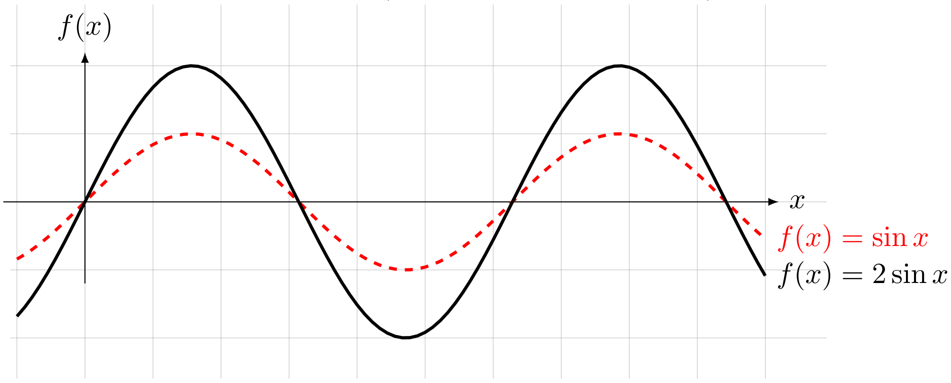
Sinus funksjonen

$$f(x) = A \cdot \sin(k(x - c)) + d$$

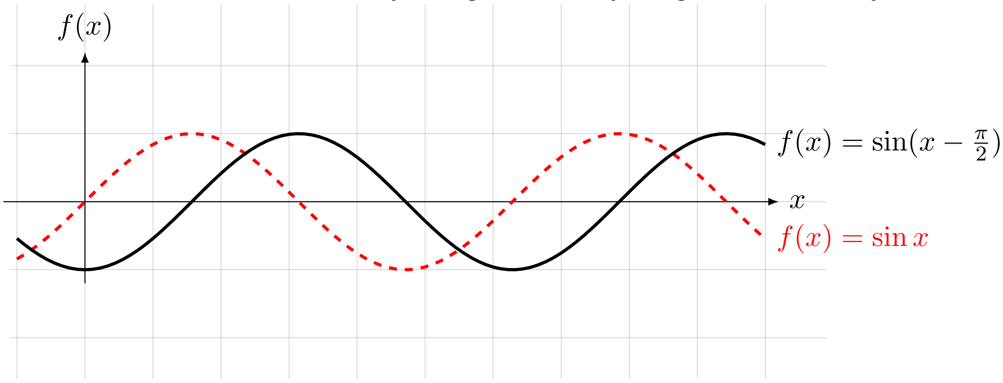
$$f(x) = a \cdot \sin(kx) + b \cdot \cos(kx)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

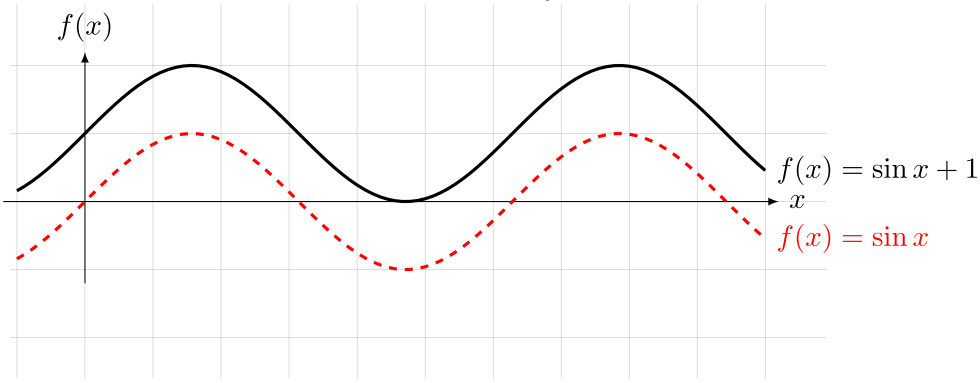
Amplituden sier hvor langt over/under likevektslinja topp-/bunnpunktene er.



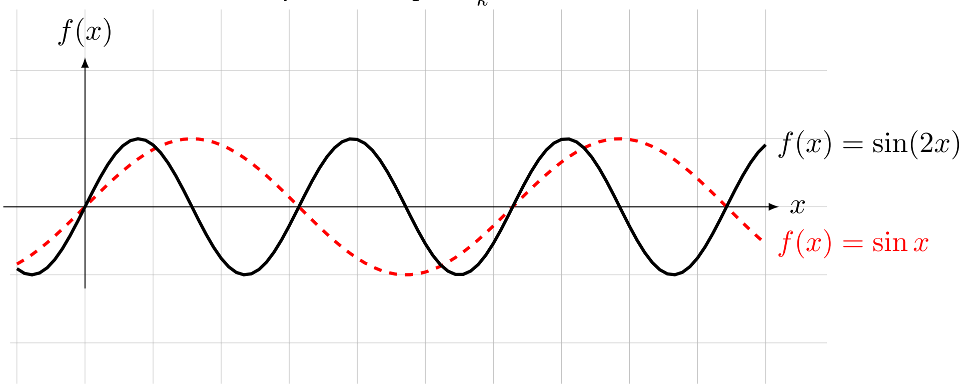
Det ekstra leddet inni sinus-uttrykket gir oss forskyvningen i forhold til y-aksen.



Konstantleddet hever eller senker likevektslinja.



verdien foran x endrer perioden , $p = \frac{2\pi}{k}$



Faseforskyvning

$$f(x) = A \cdot \sin(k(x-c)) + d$$

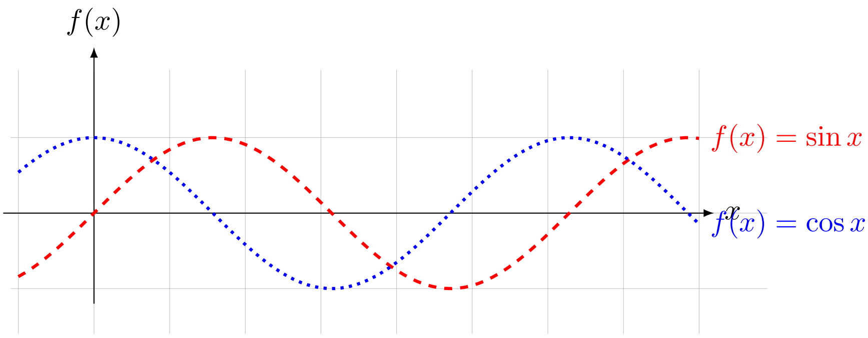
$$f(x) = A \cdot \sin(k \cdot x - \phi)) + d$$

$\sin x$ vil være null for $x = 0$, for så å stige. Ved faseforskyvning blir grafen forskøvet horisontalt.

Vi finner skjæring med likevektslinja ved å sette $(kx + c) = 0$, som gir en faseforskyvning $x = -\frac{c}{k}$

$c < 0$ grafen forskyves mot høyre

$c > 0$ grafen forskyves mot venstre



Eksempel

$$f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{2}x) + 5\ ,\ D_f = < 0, 12 >$$

$A = 3\ ,\ d = 5\ ,\ k = \frac{\pi}{2}\ ,\ =0$

$p = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$

Toppunkter : $f(x) = 8$, bunnpunkter $f(x) = 2$

Eksempel

$$f(x) = 2\sin(2\pi x - \frac{\pi}{2}) - 1\ ,\ x \in < -1, 3 >$$

$$f(x) = 2\sin(2\pi(x - \frac{1}{4}) - 1$$

$A = 2\ ,\ d = -1\ ,\ k = 2\pi\ ,\ \phi = \frac{1}{4}$

$p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Eksempel

Solhøyden H(x) , solas høyde over horisonten målt i grader, er gitt ved

$$H(x) = 18,8 - 26,9\cos(\frac{\pi}{12}x - 0,20)\ ,\ x \in [0, 24]$$

der x er antall timer etter midnatt.

1. Tegn grafen til H(x)
2. Bestem når sola står opp, og når den går ned.

3. Når står sola høyest på himmelen
4. på hviket tidspunkt stiger sola raskest, og hvor mange grader pr. minutt stiger den da?

   Lufttemperaturen i løpet av døgnet er gitt ved

$$T(x) = 20 - 4\sin(\frac{\pi}{12}x) - 4\cos(\frac{\pi}{12})\ ,\ x \in [0, 24]$$

5. Tegn grafen til T(x) sammen med H(x)
6. Hvor lang tid tar det fra sola står opp til temperaturen er på sitt høyeste?
7. Skriv T(x) som et sinusuttrykk

Eksempel

$$f(x) = 5 + 5\cos(x) - \cos(3x)\ ,\ x \in [0, 2\pi >$$

1. Vis at $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$
2. Vis at $f'(x) = 4\sin x - 12\sin^2 x$
3. Beskriv monotoniegenskapenen til f(x) ved hjelp av CAS (ikke graftegner)
4. Finn ekstremalpunktene

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\sin(3x) &= \sin(x + 2x) \\
&= \sin x \cdot \cos(2x) + \cos x \cdot \sin(2x) \\
&= \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x \cdot 2\sin x\cos x \\
&= \sin x\cos^2 x - \sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x \\
&= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x \\
&= 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5 + 5\cos(x) - \cos(3x) \\
f'(x) &= -5\sin x + \sin(3x) \cdot 3 \\
&= -5\sin x + 3(3\sin x - 4\sin^3 x) \\
&= -5\sin x + 9\sin x - 12\sin^3 x \\
&= 4\sin x - 12\sin^3 x \\
&= 4\sin x(1 - 3\sin^2 x)
\end{aligned}$$

Eksempel

Løs likningen $-\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$

Eksempel

Skriv om til en ren sinusfunksjon, bruk CAS

$$f(x) = 3\sin(3x) - 4\cos(3x) - 1$$

Eksempel

Deriver $f(x) = 3\sin(2x)$
$2x^2 \cdot \cos x$
$1/2 - \sqrt{\sin^2(x) + 1}$