# Nettstudiet - R2
# Oppgaver
# Løsningsforslag

## 1 Oppgaver til Integralregning

### 1.1 Ubestemt integral

**Ubestemt integral**

#### 1.1.1 Oppgave

Finn funksjonsuttrykket til alle de antideriverte når

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = 4x^3 + 4x + 2$

c) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 1 \\ \int 3x^2 - 1 \; dx &= \frac{3}{2+1}x^{2+1} - x + C \\ &= x^3 - x + C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 + 4x + 2 \\ \int 4x^3 + 4x + 2 \; dx &= \frac{4}{3+1}x^{3+1} + \frac{4}{1+1}x^{1+1} + 2x + C \\ &= x^4 + 2x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 - 3x^2 + 7 \\ \int 5x^3 - 3x^2 + 7 \; dx &= \frac{5}{3+1}x^{3+1} - \frac{3}{2+1}x^{2+1} + 7x + C \\ &= \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 7x + C \end{aligned}$$

## Ubestemt integral

### 1.1.2 Oppgave

Finn de ubestemte integralene

a) $\int 9x^2\ dx =$

b) $\int (4x^3 + 6x^2 + 1)\ dx =$

c) $\int (2 + \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3})\ dx =$

a)

$$\begin{aligned}\int 9x^2\ dx &= \frac{9}{2+1}x^{2+1} + C \\ &= 3x^3 + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int (4x^3 + 6x^2 + 1)\ dx &= \frac{4}{3+1}x^{3+1} + \frac{6}{2+1}x^{2+1} + x + C \\ &= x^4 + 2x^3 + x + C\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int (2 + \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3})\ dx &= \int (2 + 3x^{-2} + 5x^{-3})\ dx \\ &= 2x + \frac{3}{-2+1}x^{-2+1} + \frac{5}{-3+1}x^{-3+1} + C \\ &= 2x + (-3)x^{-1} + \left(-\frac{5}{2}\right)x^{-2} + C \\ &= 2x - \frac{3}{x} - \frac{5}{2x^2} + C\end{aligned}$$

## 1.2 Integralet av $1/x$

**Integralet av $1/x$**

### 1.2.1 Oppgave

Finn de ubestemte integralene

a) $\int \frac{5}{x}\,dx =$

b) $\int \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2}\,dx =$

c) $\int \frac{2x^2-3x}{x^2}\,dx =$

a)

$$\int \frac{5}{x}\,dx = 5\ln x + C$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2}\,dx &= 7\ln x + \left(-\frac{7}{-2+1}\right)x^{-2+1} + C\\ &= 7\ln x - \frac{7}{-1}x^{-1} + C\\ &= 7\ln x + \frac{7}{x} + C\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-3x}{x^2}\,dx &= \int \frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}\,dx\\ &= \int 2 - \frac{3}{x}\,dx\\ &= 2x - 3\ln x + C\end{aligned}$$

## 1.3 Integrasjon av eksponentialfunksjoner

**Integrasjon av eksponentialfunksjoner**

### 1.3.1 Oppgave

Regn ut integralene

a) $\int e^{5x}\ dx =$

b) $\int 7^x\ dx =$

c) $\int (5e^{8x} - 2 \cdot 3^x)\ dx =$

a)

$$\int e^{5x}\ dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

b)

$$\int 7^x\ dx = 7^x \cdot \ln 7 + C$$

c)

$$\int (5e^{8x} - 2 \cdot 3^x)\ dx = \frac{5}{8}e^{8x} - \frac{2}{\ln 3} \cdot 3^x + C$$

**Integrasjon av eksponentialfunksjoner**

### 1.3.2 Oppgave

Regn ut integralene

a) $\int 3200 \cdot e^{-1{,}23t}\ dt =$

b) $\int 23000 \cdot 1,05^t\ dt =$

a)

$$\int 3200 \cdot e^{-1{,}23t}\ dt = \frac{3200}{-1,23}e^{-1{,}23t} + C$$
$$=$$

b)

$$\int 23000 \cdot 1,05^t\ dt = 23000 \cdot 1,05^t \cdot \ln 1,05 + C$$
$$=$$

## 1.4 Bestemt integral som grense for en sum

**Bestemt integral som grense for en sum**

### 1.4.1 Oppgave

**Bestemt integral som grense for en sum**

### 1.4.2 Oppgave

## 1.5 Bestemt integral og areal

**Bestemt integral og areal**

### 1.5.1 Oppgave

Finn det bestemte integralet

a) $\int_1^4 (3x^2 - 4x + 1)\ dx =$

b) $\int_0^4 (x^2 - 4x)\ dx =$

a)

$$\begin{aligned}\int_1^4 (3x^2 - 4x + 1)\ dx &= [x^3 - 2x^2 + x]_1^4 \\ &= (4^3 - 2\cdot 4^2 + 4) - (1^3 - 2\cdot 1^2 + 1) \\ &= (4(16 - 8 + 1)) - (1 - 2 + 1) \\ &= 4\cdot 9 \\ &= 36\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^4 (x^2 - 4x)\ dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4^2 \\ &= 4^2\left(\frac{4}{3} - \frac{6}{3}\right) \\ &= 16\cdot(-\frac{2}{3}) \\ &= -\frac{32}{3}\end{aligned}$$

## Bestemt integral og areal

### 1.5.2 Oppgave

Gitt funksjonene $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 10x$ og $g(x) = 4x - 8$. Regn ut :

a) $\int_0^5 f(x)\ dx =$

b) Arealet avgrenset av grafen til $f$ og x-aksen.

c) Arealet avgrenset av grafen til $f$ og grafen til $g$.

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^5 f(x)\ dx &= \int_0^5 -x^3 + 7x^2 - 10x\ dx \\
&= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - 5x^2 \right]_0^5 \\
&= \left( -\frac{1}{4} \cdot 5^4 + \frac{7}{3} \cdot 5^3 - 5 \cdot 5^2 \right) \\
&= 5^3 \left( -\frac{5}{4} + \frac{7}{3} - 1 \right) \\
&= 125 \left( -\frac{15}{12} + \frac{28}{12} - \frac{12}{12} \right) \\
&= 125 \cdot \frac{1}{12} \\
&= \frac{125}{12}
\end{aligned}$$

b)
Finner nullpunktene til $f(x)$ :

$$\begin{aligned}
-x^3+7x^2-10x&=0\\
-x(x^2-7x+10)&=0\\
-x(x-5)(x-2)&=0\\
x&=\{0,2,5\}
\end{aligned}$$

altså må vi dele opp integralet for å finne arealet.

$$\begin{aligned}
\int -x^3+7x^2-10x\;dx&=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3-5x^2\Big]_0^2\\
&=F(2)-F(0)\\
&=-\frac{16}{3}\\
\int -x^3+7x^2-10x\;dx&=\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3-5x^2\Big]_2^5\\
&=F(5)-F(2)\\
&=\frac{125}{12}-\left(-\frac{64}{12}\right)\\
&=\frac{189}{12}\\
A&=\frac{189}{12}+\frac{64}{12}\\
&=\underline{\underline{\frac{253}{12}}}
\end{aligned}$$

Mellomregning :

$$\begin{aligned}
F(5)&=\frac{125}{12}\\
F(0)&=0\\
F(2)&=-\frac{1}{4}\cdot 2^4+\frac{7}{3}\cdot 2^3-5\cdot 2^2\\
&=2^2\left(-\frac{4}{4}+\frac{14}{3}-5\right)\\
&=4\left(\frac{14}{3}-\frac{18}{3}\right)\\
&=-\frac{16}{3}\\
&=-\frac{64}{12}
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^3 + 7x^2 - 10x \\
g(x) &= 4x - 8 \\
h(x) &= f(x) - g(x) \\
&= -x^3 + 7x^2 - 14x + 8 \\
&= -(x-1)(x-2)(x-4) \\
H(x) &= \int h(x)\ dx \\
&= -\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^3 - 7x^2 + 8x + C \\
A &= \left| \int_1^2 h(x)\ dx \right| + \left| \int_2^4 h(x)\ dx \right| \\
&= \left| H(2) - H(1) \right| + \left| H(4) - H(2) \right| \\
&= \left| \frac{8}{3} - \frac{37}{12} \right| + \left| \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \right| \\
&= \left| \frac{8 \cdot 4 - 37}{12} \right| + \left| \frac{16 - 8}{3} \right| \\
&= \left| \frac{-5}{12} \right| + \left| \frac{8}{3} \right| \\
&= \frac{5 + 8 \cdot 4}{12} \\
&\underline{\underline{= \frac{37}{12}}} \\
H(1) &= \frac{37}{12} \\
H(2) &= \frac{8}{3} \\
H(4) &= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

## 1.6 Integrasjon og volum

**Integrasjon og volum**

### 1.6.1 Oppgave

Et flatestykke er avgrenset av x-aksen, y-aksen, linja x=8 og grafen til funksjonen $f(x) = 2x + 3$

a) Finn et uttrykk for volumet av den gjenstanden vi får når vi dreier grafen $360°$ om x-aksen.

b) Finn volumet av den gjenstanden vi får når vi dreier grafen $360°$ om x-aksen.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^8 (2x+3)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^8 (4x^2 + 12x + 9) \, dx \\
&= \pi \left[ \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x \right]_0^8 \\
&= \pi \left( (\frac{4}{3} \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 9 \cdot 8) - 0 \right) \\
&= \pi (8(\frac{4 \cdot 64}{3} + 48 + 9)) \\
&= \frac{3416}{3}\pi
\end{aligned}
$$

## Integrasjon og volum

### 1.6.2 Oppgave

Et flatestykke er avgrenset av x-aksen, y-aksen, linja x=4 og grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

a) Finn et uttrykk for

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 \sqrt{x^2 - 4x + 5}^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^4 (x^2 - 4x + 5) \, dx \\
&= \pi [\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x]_0^4 \\
&= \pi (\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4) \\
&= 4\pi (\frac{16}{3} - 8 + 5) \\
&= 4\pi (\frac{16}{3} - \frac{9}{3}) \\
&= \frac{28\pi}{3}
\end{aligned}
$$

# 2 Oppgaver til Trigonometri

## 2.1 Trigonometriske likninger med grader

**Trigonometri**

### 2.1.1 Oppgave

Finn løsningene i første omløp.

a) $\sin v = 0,45$

b) $3\cos v - 2 = 0$

c) $2\cos v - 3 = 0$

**Trigonometri**

### 2.1.2 Oppgave

Finn løsningene i første omløp.

a) $5\tan v + 8 = 0$

b) $2\tan v + 9 = 0$

c) $3\tan v + 2 = 5(1 - \tan v)$

## 2.2 Eksakte trigonometriske verdier

**Trigonometri**

### 2.2.1 Oppgave

Finn eksakte verdier for $\sin v, \cos v, \tan v$

a) $360°$

b) $-90°$

c) $-300°$

**Trigonometri**

### 2.2.2 Oppgave

Finn eksakte verdier for $\sin v, \cos v, \tan v$

a) $210°$

b) $225°$

c) $240°$

## 2.3 Oppgaver til Absolutt vinkelmål (radianer)

**Trigonometri**

### 2.3.1 Oppgave

a) $360°$

b) $90°$

c) $300°$

**Trigonometri**

### 2.3.2 Oppgave

Regn om til grader

a) $-\frac{7\pi}{2}$

b) $\frac{8\pi}{5}$

c) $-\frac{9\pi}{15}$

## 2.4 Trigonometriske likninger og radianer

**Trigonometri**

### 2.4.1 Oppgave

Løs likningene når $x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $\cos x = 0,4$

b) $3 \sin x + 5 = 3$

c) $4 \tan x - 5 = 8$

a)

$$=$$

**Trigonometri**

### 2.4.2 Oppgave

Løs likningene når $x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $4 \sin x = 3 \cos x$

b) $8 \cos^2 x + 2 \cos x = 1 - 7 \cos^2 x$

c) $2 \tan^2 x - 7 = 2 \tan x + 5$

## 2.5 Eksakte løsninger

**Trigonometri**

### 2.5.1 Oppgave

Finn de eksakte løsningene av likningene når $x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $4\sin x + 5 = 3$

c) $5\tan x + 8 = 3$

a)

$$\begin{aligned}\cos x &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi &\vee x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi\\ x = \frac{5\pi}{6} &\vee x = \frac{7\pi}{6}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}4\sin x + 5 &= 3\\ \sin x &= \frac{3-5}{4}\\ \sin x &= -\frac{1}{2}\\ x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi &\vee x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi\\ x = \frac{7\pi}{6} &\vee x = \frac{11\pi}{6}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}5\tan x + 8 &= 3\\ \tan x &= \frac{3-8}{5}\\ \tan x &= -1\\ x &= \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi\\ x = \frac{3\pi}{4} &\vee x = \frac{7\pi}{4}\end{aligned}$$

## Trigonometri

### 2.5.2 Oppgave

Finn de eksakte løsningene av likningene når $x \in [0, 4\rangle$

a) $\sqrt{3}\sin \pi x = 3\cos \pi x$

b) $6\sin \pi x + 3\sqrt{2} = 0$

c) $2\cos^2(\frac{\pi x}{2}) + 2\cos(\frac{\pi x}{2}) + 7 = 5\cos(\frac{\pi x}{2}) + 6$

a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin \pi x &= 3\cos \pi x \\
\frac{\sqrt{3}}{3}\tan \pi x &= 1 \\
\tan \pi x &= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\
\frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} &= \frac{3}{\sqrt{3}} \\
\pi x &= \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \\
x &= \frac{1}{3} + n \\
x &= \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right\}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
6\sin \pi x + 3\sqrt{2} = 0 \\
6\sin \pi x &= -3\sqrt{2} \\
\sin \pi x &= \frac{-3\sqrt{2}}{6} \\
\sin \pi x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\pi x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \vee \pi x &= \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi \\
x = -\frac{1}{4} + n \cdot 2 \vee x &= \frac{5}{4} + n \cdot 2 \\
x &= \left\{\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{13}{4}, \frac{15}{4}\right\}
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 7 &= 5\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 6 \\
2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 &= 0 \\
2a^2 - 3a + 1 &= 0 \\
a &= \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm 1}{4} \\
a &= 1 \lor a = \frac{1}{2} \\
\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) &= 1 \lor \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
\frac{\pi x}{2} &= n\cdot 2\pi \lor \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \lor \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \\
x &= 4n \lor x = -\frac{2}{3} + 4n \lor x = \frac{2}{3} + 4n \\
x &= \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 4\right\}
\end{aligned}
$$

## 2.6 Enhetsformelen

**Trigonometri**

### 2.6.1 Oppgave

Finn de eksakte løsningene av likningene når $x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $5\sin^2 x + \cos^2 x = 2$

b) $6\sin^2 x + 2\cos^2 x = 5$

c) $4\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3$

a)

$$
\begin{aligned}
5\sin^2 x + \cos^2 x &= 2 \\
4\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x &= 2 \\
4\sin^2 x + 1 &= 2 \\
\sin^2 x &= \frac{1}{4} \\
\sin x &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\
\sin x &= \pm\frac{1}{2} \\
x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \lor x = \frac{5\pi}{6} \lor x &= \frac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi \lor x = \frac{11\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\
x &= \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned}
6\sin^2 x + 2\cos^2 x &= 5\\
4\sin^2 x + 2\sin^2 x + 2\cos^2 x &= 5\\
4\sin^2 x &= 3\\
\sin^2 x &= \frac{3}{4}\\
\sin x &= \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\\
x = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi \vee x &= \frac{4\pi}{3} + n\cdot 2\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + n\cdot 2\pi\\
x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x &= \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
4\sin^2 x + 2\cos^2 x &= 3\\
2\sin^2 x &= 1\\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}\\
\sin x &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
x &= \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}
\end{aligned}$$

## Trigonometri

### 2.6.2 Oppgave

Finn de eksakte løsningene av likningene når $x \in [0, 2\pi\rangle$

a) $4\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 3$

b) $8\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 11\cos^2 x = 7$

c) $4\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = -5$

a)

$$\begin{aligned}
4\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x &= 3\\
4\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x &= 3\sin^2 + 3\cos^2 x\\
\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x &= 0\\
\tan^2 x - 3\tan x + 2 &= 0\\
(\tan x - 2)(\tan x - 1) &= 0\\
\tan x &= 2 \vee \tan x = 1\\
x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi \vee x = 1{,}11 + n\cdot\pi
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
8\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 11\cos^2 x &= 7 \\
8\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 11\cos^2 x &= 7\sin^2 x + 7\cos^2 x \\
\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x &= 0 \\
\tan^2 x + 5\tan x + 4 &= 0 \\
(\tan x - 1)(\tan x - 4) &= 0 \\
\tan x &= 1 \lor \tan x = 4 \\
x &= \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi \lor x = 1.33 + n\cdot\pi \\
x &\in \left\{\frac{\pi}{4}, 1.33, \frac{5\pi}{4}, 4.47\right\}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
4\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x &= -5 \\
4\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x &= -5\sin^2 x - 5\cos^2 x \\
9\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x &= 0 \\
9\tan^2 x - 3\tan x + 1 &= 0 \\
x &= 0.96 + n\cdot\pi \lor x = -0.61 + n\cdot\pi
\end{aligned}
$$

# 3 Trigonometriske funksjoner

## 3.1 Sinus, cosinus, tangens

### 3.1.1 Oppgave

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = 2 + 4\sin(x)\ ,\ \ x \in [0, 2\pi]$$

a) Hva er den største og minste verdien til $f$?

b) Finn grafens toppunkter og bunnpunkter.

c) Tegn en skisse av grafen til $f(x)$.

### 3.1.2 Oppgave

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = 2 - 3\sin(2\pi x)\ ,\ \ x \in [0, 1]$$

a) Hva er den største og minste verdien til $f$?

b) Finn grafens toppunkter og bunnpunkter.

c) Tegn en skisse av grafen til $f(x)$.

## 3.2 Amplitude, periode og likevektslinje

### 3.2.1 Oppgave

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = 2\cos(2\pi x) + 3$$

a) Bestem amplituden

b) Besten likevektslinja

c) Bestem perioden

### 3.2.2 Oppgave

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = -3\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

a) Bestem amplituden, likevektslinja og perioden.

b) Finn den største verdien til $f$.

c) Bestem x-verdiene til toppunktene.

## 3.3 Trigonometriske funksjoner

### 3.3.1 Oppgave

a) .

### 3.3.2 Oppgave

a) .

## 3.4 Derivasjon av de trigonometriske funksjonene

### 3.4.1 Oppgave

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\sin x + 2\cos x$

b) $g(x) = 7\tan x + 3$

### 3.4.2 Oppgave

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 5\sin(x^2) - 3\cos(4x + 1)$

b) $g(x) = 3\tan(3x^2 + 6x + 1)$

### 3.4.3 Oppgave

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^3 \cdot \sin(\pi x - 4)$

b) $g(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

## 3.5 Sum og differanse av vinkler

### 3.5.1 Oppgave

Skriv uttrykkene enklere

a) $\sin(x + 3) + \sin(x - 3) =$

b) $2\cos(x - \frac{\pi}{3}) + 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) =$

b)

$$
\begin{aligned}
2\cos(x - \frac{\pi}{3}) + 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) &= 2(\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(x + \frac{\pi}{3})) \\
&= 2(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}) \\
&= 2(2 \cdot \cos x \cos \frac{\pi}{3}) \\
&= 2(2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{2}) \\
&= 2\cos x
\end{aligned}
$$

### 3.5.2 Oppgave

Uttrykk disse ved $\sin x$, $\cos x$ og/eller $\tan x$

a) $\sin(2x) =$

b) $\cos(2x) =$

c) $\tan(2x) =$

## 3.6 Funksjonen $f(x) = a\sin kx + b\cos kx$

### 3.6.1 Oppgave

Skriv på formen $A\sin(x+\phi)$

a) $3\cos x + 3\sin x =$

b) $5\sqrt{3}\sin x + 5\cos x =$

a)

$$\begin{aligned} 3\cos x + 3\sin x &= 3(\sin x + \cos x) \\ &= 3\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3}\sin x + 5\cos x &= 5(\sqrt{3}\sin x + \cos x) \\ &= 5\cdot 2\sin(x+\frac{\pi}{6}) \\ &= 10\sin(x+\frac{\pi}{6}) \\ &------------ \\ \text{MR}: \sqrt{3}\sin x + \cos x &= 2(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad A = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2 \\ &= 2(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}) \\ &= 2\sin(x+\frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

### 3.6.2 Oppgave

Skriv på formen $A\sin(x+\phi)$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}\cos(7x)} =$

b) $\sin(5x) - \sqrt{3}\cos(5x) =$

## 3.7 Likningen $a\sin kx + b\cos kx = c$

### 3.7.1 Oppgave

Løs likningene

a) $3\cos x + 4\sin x = \frac{3}{\sqrt{2}} + \sin x$ , $x \in [0, 2\pi\rangle$

b) $5\sqrt{3}\sin x + 7\cos x + 3 = 13 + 2\cos x$

a)

$$\begin{aligned}
3\cos x + 4\sin x &= \frac{3}{\sqrt{2}} + \sin x \\
3\cos x + 3\sin x &= \frac{3}{\sqrt{2}} \\
\cos x + \sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\text{MR}: \ \cos x + \sin x \quad , \quad A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
&\qquad \sqrt{2}(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \\
&\qquad \sqrt{2}(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4}) \\
&\qquad \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \\
&- - - - - - - - \\
\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\sin(x + \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{2} \\
x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \vee x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\
x &= \frac{2\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{10\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + n \cdot 2\pi \\
x &= -\frac{\pi}{12} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + n \cdot 2\pi \\
x &= \{\frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\}
\end{aligned}$$

### 3.7.2 Oppgave

Skriv på formen $A\sin(kx + \phi)$

a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3 + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 4 + 3\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ , $x \in (0, 4\pi\rangle$

b) $\cos\left(\frac{x}{12}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{12}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{x}{12}\right)$ , $x \in [0, 24\pi\rangle$

# 4 Vektorer

## 4.1 Vektorkoordinater

**Vektorkoordinater**

### 4.1.1 Oppgave

Regn ut

a) $6(2\vec{u} + 3\vec{v}) + \frac{1}{2}(4\vec{u} + \vec{v})$

b) $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b}) - (3\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a})$

a)

$$\begin{aligned} 6(2\vec{u} + 3\vec{v}) + \frac{1}{2}(4\vec{u} + \vec{v}) &= 12\vec{u} + 18\vec{v} + 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \\ &= 14\vec{u} + \frac{37}{2}\vec{v} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b}) - (3\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}) &= \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} - 2\vec{b} \end{aligned}$$

**Vektorkoordinater**

### 4.1.2 Oppgave

Bestem $a$ og $b$ slik at vektorene er parallelle

a) $\vec{u} = [3a, 2, 3], \vec{v} = [7, 6, 5b]$

b) $\vec{u} = [4a + b, 4, 9], \vec{v} = [6, 2, 2b - a]$

a)

$$\begin{aligned} \vec{u} &= k \cdot \vec{v} \\ [3a, 2, 3] &= k \cdot [7, 6, 5b] \\ 2 &= 6k \Rightarrow k = \frac{1}{3} \\ 3a &= 7k \\ 3a &= \frac{7}{3} \Rightarrow a = \frac{7}{9} \\ 3 &= 5kb \\ b \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} &= 3 \Rightarrow b = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

## 4.2 Lengden av en vektor

**Lengden av en vektor**

### 4.2.1 Oppgave

a) Finn lengden av vektoren $\vec{u} = [3, 8, 1]$

b) Finn avstanden mellom punktene $A(2, 8, 1)$ og $B(-4, 5, 3)$

a)

$$\begin{aligned}|\vec{u}| &= |[3, 8, 1]| \\ &= \sqrt{3^2 + 8^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 64 + 1} = \sqrt{74}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [-4 - 2, 5 - 8, 3 - 1] \\ &= [-6, -3, 2] \\ |\overrightarrow{AB}| &= |[-6, -3, 2]| \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7\end{aligned}$$

## Lengden av en vektor

### 4.2.2 Oppgave

Et parallellepiped har grunnflate $ABCD$ og toppflate $EFGH$, der $A$ og $E$ er endepunkter på samme sidekant. Punktene $A(1,2,1)$, $B(2,6,2)$ , $C(7,7,3)$ og $E(2,8,2)$ er gitt.

a) Finn koordinatene til punkt $D$

b) Finn avstanden mellom $D$ og $G$

a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \\
[2-1, 6-2, 2-1] &= [7-x, 7-y, 3-z] \\
[1,4,1] &= [7-x, 7-y, 3-z] \\
1 &= 7-x \Rightarrow x = 6 \\
4 &= 7-y \Rightarrow y = 3 \\
1 &= 3-z \Rightarrow z = 2 \\
D &= (6,3,2)
\end{aligned}$$

b)
Vi vet at toppflaten er lik grunnflaten i et parallellepiped. Da må $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= [7-1, 7-2, 3-1] = [6,5,2] \\
\overrightarrow{EG} &= [x-2, y-8, z-2] = [6,5,2] \\
x-2 &= 6 \Rightarrow x = 8 \\
y-8 &= 5 \Rightarrow y = 13 \\
z-2 &= 2 \Rightarrow z = 4 \\
G &= (8,13,4) \\
\overrightarrow{DG} &= [8-6, 13-3, 4-2] = [2,10,2] \\
|\overrightarrow{DG}| &= |[2,10,2]| \\
&= \sqrt{2^2+10^2+2^2} \\
&= \sqrt{108}
\end{aligned}$$

## 4.3 Skalarprodukt

**Skalarprodukt**

### 4.3.1 Oppgave

La $\vec{u} = [3, 1, -3]$ og $\vec{v} = [2, -3, 1]$.

a) Finn $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) Finn vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$

a)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [3, 1, -3] \cdot [2, -3, 1] = 6 - 3 - 3 = 0$$

b)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

**Skalarprodukt**

### 4.3.2 Oppgave

La $\vec{u} = [2, 1, -4]$ og $\vec{v} = [2, -3, 1]$

a) Finn $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

b) Finn vinkelen mellom $(\vec{u} + \vec{v})$ og $(\vec{u} - \vec{v})$

a)

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^4}^2 - \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \\ &= (4 + 1 + 16) - (4 + 9 + 1) \\ &= 21 - 14 = 7\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) &= [2, 1, -4] + [2, -3, 1] \\ &= [4, -2, -3] \\ |(\vec{u} + \vec{v})| &= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29} \\ (\vec{u} - \vec{v}) &= [2, 1, -4] - [2, -3, 1] \\ &= [0, 4, -5] \\ |(\vec{u} - \vec{v})| &= \sqrt{0^2 + 4^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}\end{aligned}$$

## 4.4 Determinanter

**Determinanter**

### 4.4.1 Oppgave

a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

a)

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 7 = 10 - 21 = -11$$

b)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 3(2-6) - 2(10-9) + 2(10-3) \\ &= -12 - 2 + 14 \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Determinanter**

### 4.4.2 Oppgave

En trekant har hjørner i $A(4,2,3)$, $B(2,6,4)$ og $C(1,3,5)$

a) Finn arealet av trekanten

b) Finn høyden fra $A$ ned på $BC$

## 4.5 Vektorprodukt

**Vektorprodukt**

### 4.5.1 Oppgave

Finn vektorproduktet av vektorene

a) $[4, 2, 1]$ og $[3, -2, 1]$

b) $[3, -4, -2]$ og $[-4, -1, 2]$

**Vektorprodukt**

### 4.5.2 Oppgave

En trekant har hjørner i $A(4, 2, 3)$, $B(2, 6, 4)$ og $C(1, 3, 5)$

a) Finn arealet av trekanten

b) Finn høyden fra $A$ ned på $BC$

## 4.6 Volum

**Volum**

### 4.6.1 Oppgave

I parallellepipedet $ABCDEFGH$ er $A(3,2,1)$, $B(5,-1,1)$, $D(-2,1,3)$ og $E(4,3,5)$ gitt. $AE$ er en sidekant

a) Finn koordinatene til $C$

b) Finn volumet av parallellepipedet.

**Volum**

### 4.6.2 Oppgave

I tetraederet $ABCT$ er $A(2,3,1)$, $B(2,-2,2)$, $C(3,2,0)$ og $T(4,-3,5)$ gitt.

a) Finn volumet av tetraederet

b) Finn høyden fra $A$ til flaten $BCT$

a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [2-2, -2-3, 2-1] = [0,-5,1] \\
\overrightarrow{AC} &= [3-2, 2-3, 0-1] = [1,-1,-1] \\
\overrightarrow{AT} &= [4-2, -3-3, 5-1] = [2,-6,4] \\
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \big[(-5)\cdot(-1) - (-1)\cdot 1, -(0\cdot(-1) - 1\cdot 1), 0\cdot(-1) - (-5)\cdot 1\big] \\
&= \big[5+1, -(0-1), 0+5\big] \\
&= \big[6,1,5\big] \\
(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT} &= \big[6,1,5\big] \cdot \big[2,-6,4\big] \\
&= 12 - 6 + 20 \\
&= 26 \\
V &= \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT}| \\
&= \frac{1}{6} \cdot 26 = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

b)
Volumet beregnet med klassisk geometri :

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Areal av grunnflaten:

$$G = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BT}|$$

# 5 Romgeometri

## 5.1 Plan

**Plan**

### 5.1.1 Oppgave

Et plan går gjennom punktene $A(3,1,2)$, $B(3,4,1)$ og $C(1,8,1)$

a) Finn en normalvektor for planet.

b) Finn likningen til planet

c) Avgjør om $D(3,7,0)$ ligger i planet

a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [3-3, 4-1, 1-2] = [0,3,-1] \\
\overrightarrow{AC} &= [1-3, 8-1, 1-2] = [-2,7,-1] \\
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} &= \left[\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\right] \\
&= [-3-(-7), -(0-2), 0-(-6)] \\
&= [4,2,6] = 2[2,1,3] \\
\vec{n_\alpha} &= [2,1,3]
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\alpha \ : \ 2(x-3)+(y-1)+3(z-2) &= 0 \\
2x-6+y-1+3z-6 &= 0 \\
2x+y+3z-13 &= 0
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
2\cdot 3+7+3\cdot 0-13 &= 6+7-13 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Altså ligger punktet D i planet.

**Plan**

### 5.1.2 Oppgave

Finn vinkelen mellom planene $\alpha$ og $\beta$

a) $\alpha : 2x - 4y + z = 7$ og $\beta : x - 2y + 3z = 5$

b) $\alpha : 3x + 2y - 5z = 7$ og $\beta : 2x - 3y + 7z = 4$

a)

$$
\begin{aligned}
n_\alpha &= [2, -4, 1] \\
n_\beta &= [1, -2, 3] \\
n_\alpha \cdot n_\beta &= [2, -4, 1] \cdot [1, -2, 3] \\
&= 2 + 8 + 3 = 13 \\
|n_\alpha| &= |[2, -4, 1]| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21} \\
|n_\beta| &= [1, -2, 3]| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \\
\cos v &= \frac{n_\alpha \cdot n_\beta}{|n_\alpha| \cdot |n_\beta|} \\
&= \frac{13}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = \frac{13}{7\sqrt{6}} \\
v &= 40,7^\circ
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
n_\alpha &= [3, 2, -5] \\
n_\beta &= [2, -3, 7] \\
n_\alpha \cdot n_\beta &= [3, 2, -5] \cdot [2, -3, 7] \\
&= 6 - 6 - 35 = -35 \\
|n_\alpha| &= |[3, 2, -5]| = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38} \\
|n_\beta| &= [2, -3, 7]| = \sqrt{4 + 9 + 49} = \sqrt{62} \\
\cos v &= \frac{n_\alpha \cdot n_\beta}{|n_\alpha| \cdot |n_\beta|} \\
&= \frac{-35}{\sqrt{62}\sqrt{38}} \\
v &= 136,1^\circ \Rightarrow v = 180^\circ - 136,1^\circ = 43,9^\circ
\end{aligned}
$$

## 5.2 Rette linjer

**Rette linjer**

### 5.2.1 Oppgave

En linje går gjennom punktene $A(3, 1, 0)$ og $B(4, -2, 1)$

a) Finn en parameterframstilling for linja

b) Finn skjæringspunktet $S$ mellom linja og et plan med likningen

$$\alpha \ : \ 2x + 3y - z = 5$$

a)
Finner retningsvektoren til linja ved å finne $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [4 - 3, -2 - 1, 1 - 0] \\
\vec{r_l} &= [1, -3, 1] \\
l : &\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}
\end{aligned}$$

b)
Setter inn koordinatene til linja inn i likningen til planet.

$$\begin{aligned}
2x + 3y - z &= 5 \\
2(3 + t) + 3(1 - 3t) - t &= 5 \\
6 + 2t + 3 - 9t - t &= 5 \\
-8t &= -4 \\
t &= \frac{1}{2} \\
S &= \left(3 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(4, -2, -1\right)
\end{aligned}$$

c)

## Rette linjer

### 5.2.2 Oppgave 5.2.2

Gitt fire punkter $A(3,1,5), B(3,2,1), C(-2,-3,1)$ og $D(-2,-5,2)$

a) Finn en parameterframstilling for linja gjennom A og B.

b) Finn likningen for planer $\alpha$ gjennom A, C og D

c) Finn vinkelen mellom $l$ og $\alpha$.

a)
Finner retningsvektoren ved å finne $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = [3-3, 2-1, 1-5] = [0, 1, -4]$$

$$l : \begin{cases} x & = 3 \\ y & = 1 + t \\ z & = 5 - 4t \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= [-2-3, -3-1, 1-5] = [-5, -4, -4] = -[5, 4, 4] \\ \overrightarrow{AD} &= [-2-3, -5-1, 2-5] = [-5, -6, -3] = -[5, 6, 3] \\ \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} &= [-12, 5, 10] \\ \alpha &: -12(x-3) + 5(y-1) + 10(z-5) = 0 \\ &: -12x + 5y + 10z - 19 = 0 \end{aligned}$$

c)
Finner vinkel mellom normalvektor og retningsvektor :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_l} &= [0, 1, -4] \\ \overrightarrow{n_\alpha} &= [-12, 5, 10] \\ \overrightarrow{r_l} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} &= 5 - 40 = -35 \\ |\overrightarrow{r_l}| &= |[0, 1, -4]| = \sqrt{1^2 + 4^4} = \sqrt{17} \\ |\overrightarrow{n_\alpha}| &= |[-12, 5, 10]| = \sqrt{144 + 25 + 100} = \sqrt{269} \\ \cos v &= \frac{-35}{\sqrt{17}\sqrt{269}} \\ v &= 121,2^\circ \Rightarrow v = 180^\circ - 121,2^\circ = 58,8^\circ \end{aligned}$$

## 5.3 Parameterframstilling for et plan

**Parameterframstilling for et plan**

### 5.3.1 Oppgave 5.3.1

Et plan $\alpha$ går gjennom punktene $A(3,1,5)$ , $B(3,2,1)$ og $C(-2,-3,1)$

a) Finn en parameterframstilling for planet

b) Undersøk om $D(-3,-4,1)$ ligger i planet.

a)

$$\overrightarrow{AB} = [3-3, 2-1, 1-5] = [0,1,-4]$$
$$\overrightarrow{AC} = [-2-3, -3-1, 1-5] = [-5,-4,-4]$$

$$\alpha : \begin{cases} x &= x_0 + a_x s + b_x t \\ y &= y_0 + a_y s + b_y t \\ z &= z_0 + a_z s + b_z t \end{cases}$$
$$\alpha : \begin{cases} x &= 3 + 5t \\ y &= 1 + s - 4t \\ z &= 5 - 4s - 4t \end{cases}$$

b)
Setter koordinatene til punktet $D$ inn i parameterframstillingen

$$\alpha : \begin{cases} -3 &= 3 + 5t \\ -4 &= 1 + s - 4t \\ 1 &= 5 - 4s - 4t \end{cases}$$
$$-3 = 3 - 5t$$
$$t = \frac{6}{5}$$
$$s = -4 - 1 + 4t = -\frac{1}{5}$$

## Parameterframstilling for et plan

### 5.3.2 Oppgave 5.3.2

Finn en parameterframstilling for planet som går gjennom punktet $A(3,4,1)$ og som inneholder linja

$$l : \begin{cases} x &= 3-5t \\ y &= -2-t \\ z &= 2+t \end{cases}$$

Vi trenger 2 vektorer og et punkt i planet for lage parameterframstillingen.
Linjen $l$ gir oss $P(3,-2,2)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_l} &= [-5,-1,1] \\ \overrightarrow{AP} &= [3-3,-2-4,2-1] = [0,-6,1] \end{aligned}$$

Da blir parameterframstilling av planet :

$$l : \begin{cases} x &= 3-5s \\ y &= 4-s-6t \\ z &= 1+s+t \end{cases}$$

## 5.4 Likningen for en kule

**Likningen for en kule**

### 5.4.1 Oppgave 5.4.1

En kule har senter i $S(3, 1, 2)$ og radius 4. En linje $l$ er gitt ved parameterframstillingen

$$l : \begin{cases} x & = 3 \\ y & = 1 + 4t \\ z & = -2 + 4t \end{cases}$$

a) Finn likningen til kula

b) Finn skjæringspunktene mellom kula og linjen.

a)

$$\begin{aligned}(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= r^2 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 &= 4^2 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 &= 16\end{aligned}$$

b)
Setter koordinatene til linja inn i likningen til kula.

$$\begin{aligned}(3 - 3^2) + (1 + 4t - 1)^2 + (-2 + 4t - 2)^2 &= 16 \\ (4t)^2 + (4t - 4)^2 &= 16 \\ 16t^2 + 16t^2 - 32t + 16 &= 16 \\ 32t(t - 1) &= 0 \\ t &= 0 \\ t &= 1 \\ t = 0 : S_1 &= (3, 1, -2) \\ t = 1 : S_2 &= (3, 5, 2)\end{aligned}$$

## Likningen for en kule

### 5.4.2 Oppgave 5.4.2

Finn radien og sentrum i kula med likningen

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 7$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 6z = 30$

a)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z &= 7 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 &= 7 + 4 + 1 + 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 &= 4^2 \\ S &= (2, 1, 2) \\ r &= 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 6z &= 30 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 &= 30 + 9 + 1 + 9 \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 &= 7^2 \\ S &= (-3, -1, 3) \\ r &= 7 \end{aligned}$$

# 6 Følger og rekker

## 6.1 Tallfølger

**Tallfølger**

### 6.1.1 Oppgave

I en følge er ledd nr $n$ gitt ved $a_n = 2n^2 + 3$

a) Finn $a_3$

b) Finn $a_5$

**Tallfølger**

### 6.1.2 Oppgave

I en aritmetisk følge er det andre leddet $11$ og differansen $d = 3$

a) Finne det første leddet

b) Finn en formel for ledd nummer $n$

c) Finn ledd nr 52

**Tallfølger**

### 6.1.3 Oppgave

I en følge er $a_i = 3a_{i-1} + 1, i > 1$

a) Bestem $a_{i-1}$ når $a_i = 4009$

b) Bestem $a_1$ når $a_4 = 4009$

## 6.2 Rekker

**Rekker**

### 6.2.1 Oppgave

Gitt rekken $16 + 24 + 36 + 54 + \ldots$

a) Hva slags rekke er dette?

b) Finn $a_5$

c) Finn$s_8$

## Rekker

### 6.2.2 Oppgave

I en aritmetisk rekke er $a_1 = 5$ og $d = 4$

a) Bestem $a_5$

b) Bestem $s_5$

c) Finn et uttrykk for $s_n$

d) Summen av rekka er $1224$. Hvor mange ledd er det i rekka?

a)

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n-1) \\ &= 5 + 4(n-1) \\ &= 4n + 1 \\ a_5 &= 4 \cdot 5 + 1 \\ &= 21 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \\ &= \frac{(5 + 4n + 1) \cdot n}{1} \\ &= n(2n+3) \\ s_5 &= 5 \cdot (2 \cdot 5 + 3) \\ &= 5 \cdot 13 \\ &= 65 \end{aligned}$$

c) se oppgave b)

d) CAS

$$\begin{aligned} a(x) &:= 5 + 4(n+1) \\ a(5) &= 21 \\ s(n) &:= Sum(a, n, 1, n) \\ s(5) &= 65 \\ Løs(s = 1224) \rightarrow n &= -\frac{51}{2}, n = 24 \\ n &= 24 \end{aligned}$$

## 6.3 Uendelige rekker

**Uendelige rekker**

### 6.3.1 Oppgave

Gitt en uendelig geometrisk rekke $81 + 72 + 64 + ...$

a) Bestem kvotienten $k$

b) Avgjør om rekka konvergerer

c) Finn summen av rekka

a)

$$\begin{aligned} k &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ &= \frac{72}{81} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

b)

$$|k| < 1 \Rightarrow \text{altså er rekka konvergent}$$

c)

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{81}{1-\frac{8}{9}} \\ &= 729 \end{aligned}$$

## Uendelige rekker

### 6.3.2 Oppgave

Gitt en uendelig geometrisk rekke $\frac{27}{5} - \frac{18}{5} + \frac{12}{5} - \frac{8}{5} + \ldots$

a) Bestem kvotienten $k$

b) Avgjør om rekka konvergerer

c) Finn summen av rekka

a)

$$\begin{aligned} k &= -\frac{18}{5} / \frac{27}{5} \\ &= -\frac{18}{27} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

b)

$$|-\frac{2}{3}| < 1, \text{ altså er rekka konvergent}$$

c)

$$\begin{aligned} S &= \frac{\frac{27}{5}}{1 + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{27 \cdot 3}{5 \cdot 5} \\ &= \frac{81}{25} \end{aligned}$$

## 6.4 Variabel kvotient

**Variabel kvotient**

### 6.4.1 Oppgave

Gitt den uendelige rekken $1-\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}+x^2-...$

a) Finn konvergensområdet for rekken

b) Finn summen $s(x)$ av rekken

c) Tegn grafen til s(x)

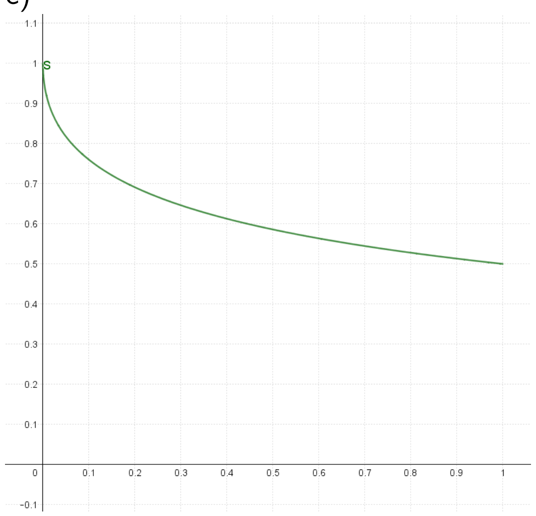
a)
Finner først $k=\frac{a_2}{a_1}=-\sqrt{x}$

Konvergensområdet finner vi når $k\in<-1,1>$

$$-\sqrt{x}>-1$$
$$\sqrt{x}<1$$
$$x<1$$

Vi vet at det ikke går an å ta roten av et negativt tall, derfor må $x>0$
Altså blir konvergensområdet : $x\in<0,1>$

b) $S(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$

c)


## 6.5 Induksjonsbevis

**Induksjonsbevis**

### 6.5.1 Oppgave

Vis ved induksjon at $12 + 16 + 20 + 24 + ... + a_n = 2n(n + 5)$

$a_n = 12 + 4(n - 1) = 12 + 4v - 4 = 4n + 8$

P(1) :
v.s. $4 \cdot 1 + 8 = 12$

h.s. $2 \cdot 1(1 + 5) = 2 \cdot 6 = 12$

altså sann for $n = 1$

P(n) :
$12 + 16 + 20 + 24 + ... + (4n + 8) = 2n(n + 5)$ , antas sann

P(n+1) :
v.s.

$$\begin{aligned} 12 + 16 + 20 + ... + a_n + a_{n+1} &= (2n(n + 5)) + a_{n+1} \\ &= 2n(n + 5) + 4(n + 1) + 8 \\ &= 2n^2 + 10n + 4n + 4 + 8 \\ &= 2n^2 + 14n + 12 \end{aligned}$$

h.s.

$$\begin{aligned} 2(n + 1)((n + 1) + 5) &= (2n + 2)(n + 6) \\ &= 2n^2 + 2n + 12n + 12 \\ &= 2n^2 + 14n + 12 \end{aligned}$$

v.s.=h.s., altså er påstande sann for alle $n \in N$

# 7 Integrasjonsmetoder

## 7.1 Integrasjonsformler

**Integrasjonsformler**

#### 7.1.1 Oppgave

Regn ut

a) $\int 3\sin x - \cos x \; dx =$

b) $\int 1 + \tan^2 x \; dx =$

a)

$$\int 3\sin x - \cos x \; dx = -3\cos x + \sin x + C$$

b)

$$\int 1 + \tan^2 x \; dx = \tan x + C$$

$$\text{fordi}: (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

**Integrasjonsformler**

#### 7.1.2 Oppgave

Regn ut

a) $\int \frac{6}{3x-2} \; dx =$

b) $\int 1 + \tan^2(3x+2) \; dx =$

a)

$$\int \frac{6}{3x-2} \; dx = 2\ln(3x-2) + C$$

$$(2\ln(3x-2))' = \frac{6}{3x-2}$$

b)

$$\int 1 + \tan^2(3x+2) \; dx = \frac{1}{3}\tan(3x+2) + C$$

$$\left(\frac{1}{3}\tan(3x+2)\right)' = 1 + \tan^2(3x+2)$$

## 7.2 Variabelskifte

**Variabelskifte**

### 7.2.1 Oppgave

Regn ut

a) $\int 6x^2\ e^{x^3}\ dx =$

b) $\int \frac{4x^5}{x^6+3}\ dx =$

a)

$$\begin{aligned}\int 6x^2\ e^{x^3}\ dx &= \int 6x^2\ e^u \frac{1}{3x^2}\ du \\ \text{MR}\ :\ u = x^3,\ u' &= 3x^2,\ dx = \frac{1}{3x^2}\ du \\ &= 2\int e^u\ du \\ &= 2e^u + C \\ &= 2e^{x^3}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^5}{x^6+3}\ dx &= \int \frac{4x^5}{u}\cdot\frac{1}{6x^5}du \\ \text{MR}\ :\ u = x^6+3,\ u' &= 6x^5,\ dx = \frac{1}{6x^5}du \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{u}\ du \\ &= \frac{2}{3}\ln u + C \\ &= \frac{2}{3}\ln|x^6+3| + C\end{aligned}$$

## Variabelskifte

### 7.2.2 Oppgave

Regn ut

a) $\int e^{-2\sin x} \cdot \cos x \; dx =$

b) $\int \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+4x} \; dx =$

a)

$$\int e^{-2\sin x} \cdot \cos x \; dx = \int e^{u} \cdot \cos x \cdot \frac{1}{-2\cos x} \; du$$

$$\text{MR} \; : \; u = -2\sin x, \; u' = -2\cos x, \; dx = \frac{1}{-2\cos x} du$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^{u} \; du$$

$$= -\frac{1}{2} \; e^{u} + C$$

$$= -\frac{1}{2} \; e^{-2\sin x} + C$$

b)

$$\int \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+4x} \; dx = \int \frac{e^{2x}+2}{u} \frac{1}{2(e^{2x}+2)} du$$

$$\text{MR} \; : \; u = e^{2x} + 4x, \; u' = 2e^{2x} + 4 = 2(e^{2x}+2), dx = \frac{1}{2(e^{2x}+2)} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \; du$$

$$= \frac{1}{2} \ln u + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 4x) + C$$

## 7.3 Delvis integral

**Delvis integral**

### 7.3.1 Oppgave

Regn ut

a) $\int (x+3)e^{x+3}\ dx =$

b) $\int (4x-2)\ln x\ dx =$

a)

$$\begin{aligned}\int (x+3)e^{x+3}\ dx &= (x+3)e^{x+3} - \int e^{x+3}\ dx\\ \text{MR}:\quad u &= x+3, u' = 1\\ v &= e^{x+3}, v' = e^{x+3}\\ &= (x+3)e^{x+3} - e^{x+3} + C\\ &= e^{x+3}(x+3-1) + C\\ &= e^{x+3}(x+2) + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int (4x-2)\ln x\ dx &= 2x(x-2)\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot 2x(x-1)\ dx\\ \text{MR}:\quad u &= \ln x, u' = \frac{1}{x}\\ v &= 2x^2 - 2x, v' = 4x-2\\ &= 2x(x-1)\ln x - \int 2x-2\ dx\\ &= 2x(x-1)\ln x - x^2 + 2x + C\end{aligned}$$

## Delvis integral

### 7.3.2 Oppgave

Regn ut

a) $\int (x^2 - 5)e^x \ dx =$

b) $\int \cos x \cdot e^x \ dx =$

a)

$$
\begin{aligned}
\int (x^2 - 5)e^x \ dx &= (x^2 - 5)e^x - \int 2x \cdot e^x \ dx \\
\text{MR} \ : \ & u = x^2 - 5, \ u' = 2x \\
& v = e^x, \ v' = e^x \\
&= (x^2 - 5)e^x - (2xe^x - 2\int e^x \ dx) \\
\text{MR} \ : \ & u = 2x, \ u' = 2 \\
& v = e^x, \ v' = e^x \\
&= (x^2 - 5)e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\
&= e^x(x^2 - 2x - 3) + C \\
&= e^x(x - 3)(x + 1) + C
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int \cos x \cdot e^x \ dx &= e^x \cos x - \int e^x(-\sin x) \ dx \\
\text{MR} \ : \ & u = \cos x, \ u' = -\sin x \\
& v = e^x, \ v' = e^x \\
\int \cos x \cdot e^x \ dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \ dx \\
\text{MR} \ : \ & u = \sin x, \ u' = \cos x \\
& v = e^x, \ v' = e^x \\
\int \cos x \cdot e^x \ dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \ dx \\
2\int \cos x \cdot e^x \ dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\
\int \cos x \cdot e^x \ dx &= \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C
\end{aligned}
$$

## 7.4 Bestemt integral

**Bestemt integral**

### 7.4.1 Oppgave

Regn ut

a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} 6x \ \sin(3x^2 + 2) \ dx =$

b) $\int_0^1 3x \cdot e^{3x} \ dx =$

a)

$$
\begin{aligned}
\int 6x \ \sin(3x^2+2) \ dx &= \int \sin u \ du \\
\text{MR} \ : \ u &= 3x^2 + 2, \ u' = 6x \\
&= -\cos u + C \\
&= -\cos(3x^2+2) + C \\
\int_0^{\sqrt{\pi}} 6x \ \sin(3x^2+2) \ dx &= \Big[ -\cos(3x^2+2) \Big]_0^{\sqrt{\pi}} \\
&= (-\cos(3\pi+2)) - (-\cos(0+2)) \\
&= \cos(2) - \cos(3\pi+2) \\
\text{MR} \ : \ \cos(2\pi+v) &= \cos(v) \\
\cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v \\
\cos(\pi + (2\pi+2)) &= \cos(\pi)\cos(2\pi+2) - \sin(\pi)\sin(2\pi+2) \\
&= -\cos(2) \\
- - - - - - - - - \\
\cos(2) - \cos(3\pi+2) &= \cos(2) - (-\cos(2)) \\
&= 2\cos(2)
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned}
\int 3x \cdot e^{3x}\ dx &= \frac{1}{3}\int u \cdot e^{u}\ du \\
\text{MR}\ :\ u &= 3x,\ u' = 3 \\
\text{MR}\ :\ \int x \cdot e^{x}\ dx &= \\
u &= x,\ u' = 1 \\
v &= e^{x},\ v' = e^{x} \\
&= x \cdot e^{x} - e^{x} + C \\
\frac{1}{3}\int u \cdot e^{u}\ du &= \frac{1}{3}e^{u}(u-1) + C \\
&= \frac{1}{3}e^{3x}(3x-1) + C \\
\int_0^1 3x \cdot e^{3x}\ dx &= \left[\frac{1}{3}e^{3x}(3x-1)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\big((e^{3}(3-1)) - (e^{0}(0-1))\big) \\
&= \frac{1}{3}(2e^{3} + 1)
\end{aligned}$$

## Bestemt integral

### 7.4.2 Oppgave

Regn ut

a) $\int\limits_{1}^{2} \frac{3x}{4x^2+2}\ dx =$

b) $\int\limits_{2}^{3} 4x^2\ e^{2x}\ dx =$

a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x}{4x^2+2}\ dx &= \int \frac{3x}{u}\frac{1}{8x}du \\
\text{MR}\ :\ u = 4x^2+2,\ u' &= 8x,\ dx = \frac{1}{8x}du \\
&= \frac{3}{8}\int \frac{1}{u}\ du \\
&= \frac{3}{8}\ln(4x^2+2)+C \\
\int\limits_{1}^{2} \frac{3x}{4x^2+2}\ dx &= \left[\frac{3}{8}\ln(4x^2+2)\right]_1^2 \\
&= \frac{3}{8}\Big((\ln(4\cdot 2^2+2)-(\ln(4\cdot 1^2+2))\Big) \\
&= \frac{3}{8}\big(\ln 18-\ln 6\big) \\
&= \frac{3}{8}\big(\ln 3+\ln 6-\ln 6\big) \\
&= \frac{3\ln 3}{8}
\end{aligned}$$

b)

$$\int 4x^2\ e^{2x}\ dx = \int (2x)^2\ e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}\int u^2 \cdot e^u du$$

$$\text{MR}\ :\ u = 2x, u' = 2, dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{aligned} \text{MR}\ :\ \int u^2\ e^u\ du &= u^2e^u - 2\int u \cdot e^u\ du \\ &= u^2e^u - 2(ue^u - \int e^u\ du) \\ &= u^2e^u - 2ue^u + 2e^u + C \end{aligned}$$

$$-----------------$$

$$\begin{aligned} \int 4x^2\ e^{2x}\ dx &= \frac{1}{2}(e^{(2x)}((2x)^2 - 2(2x) + 2)) + C \\ &= e^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 4x^2\ e^{2x}\ dx &= \left[e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)\right]_2^3 \\ &= e^6(18 - 6 + 1) - e^4(8 - 4 + 1) \\ &= 13e^6 - 5e^4 \end{aligned}$$

## 7.5 Delbrøkoppspalting

**Delbrøkoppspalting**

### 7.5.1 Oppgave

Regn ut

a) $\int \frac{4x-2}{x^2-1}\,dx =$

b) $\int \frac{5x-9}{x^2-3x}\,dx =$

a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x-2}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \\
\text{MR} \;:\; \frac{4x-2}{x^2-1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \\
4x-2 &= A(x-1) + B(x+1) \\
x=-1 \;:\; 4\cdot(-1)-2 &= A(-1-1) \\
-2A &= -6 \\
A &= 3 \\
x=1 \;:\; 4\cdot 1-2 &= B(1+1) \\
2 &= 2B \\
B &= 1 \\
\int \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= 3\ln|x+1| + \ln|x-1| + C
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-9}{x^2-3x}\,dx &= \int \frac{5x-9}{x(x-3)}\,dx \\
&= \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}\,dx \\
\text{MR} \;:\; \frac{5x-9}{x^2-3x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} \\
5x-9 &= A(x-3) + Bx \\
x=0 \;:\; 0-9 &= -3A \\
A &= 3 \\
x=3 \;:\; 3-9 &= 3B \\
B &= -2 \\
\int \frac{3}{x} + \frac{-2}{x-3}\,dx &= 3\ln|x| - 2\ln|x-3| + C
\end{aligned}$$

## Delbrøkoppspalting

### 7.5.2 Oppgave

Regn ut

a) $\int \frac{x+11}{x^2+x-2}\,dx =$

b) $\int \frac{x+22}{x^2-x-20}\,dx =$

a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+11}{x^2+x-2}\,dx &= \int \frac{x+11}{(x+2)(x-1)}\,dx \\
\text{MR} \ : \ \frac{x+11}{x^2+x-2} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \\
x+11 &= A(x-1) + B(x+2) \\
x=-2\ ;\ -2+11 &= A(-2-1) \\
-3A &= 9 \\
A &= -3 \\
x=1\ :\ 1+11 &= B(1+2) \\
3B &= 12 \\
B &= 4 \\
\int \frac{x+11}{(x+2)(x-1)}\,dx &= \int \frac{-3}{x+2} + \frac{4}{x-1}\,dx \\
&= 4\ln|x-1| - 3\ln|x+2| + C
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+22}{x^2-x-20}\,dx &= \int \frac{x+22}{(x-5)(x+4)}\,dx \\
\text{MR} \ : \ \frac{x+22}{x^2-x-20}\,dx &= \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+4} \\
x+22 &= A(x+4) + B(x-5) \\
x=5\ :\ 5+22 &= A(5+4) \\
9A &= 27 \\
A &= 3 \\
x=-4\ :\ -4+22 &= B(-4-5) \\
18 &= -9B \\
B &= -2 \\
\int \frac{x+22}{(x-5)(x+4)}\,dx &= \int \frac{3}{x-5} + \frac{-2}{x+4} \\
&= 3\ln|x-5| - 2\ln|x+4| + C
\end{aligned}$$

# 8 Differensiallikninger

## 8.1 Differensiallikninger

### 8.1.1 Oppgave

Finn minst en løsning av differensiallikningen ved å šešvaret.

1. $y' = y$
2. $y'' = -y$

### 8.1.2 Oppgave

Løs differensiallikningen.

1. $y' + 3y = 9$
2. $y' + 2xy = 0$

## 8.2 Separable diff.likn.

### 8.2.1 Oppgave

Løs differensiallikningen.

1. $y' = 3xy \ , \ y(0) = 5.$
2. $xy' - 2x = 3y \ , \ y(1) = 7$

## 8.3 Logistisk vekst

### 8.3.1 Oppgave

1.

## 8.4 Retningsdiagram

**Retningsdiagram**

### 8.4.1 Oppgave

1.

## 8.5 2.ordens diff.likn.

**2.ordens diff.likn.**

### 8.5.1 Oppgave

1. $y'' - 3y' = 0$
2. $y'' + 6y' + 9y = 0$
3. $y'' + 4y' + 3y = 0$

a)

$$\begin{aligned} y'' - 3y' &= 0 \\ r^2 - 3r &= 0 \\ r(r-3) &= 0 \\ r = 0 &\vee r = 3 \\ y &= C \cdot e^{0 \cdot x} + D \cdot e^{3x} \\ &= C + D \cdot e^{3x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y'' + 6y' + 9y &= 0 \\ r^2 + 6r + 9 &= 0 \\ (r-3)^2 &= 0 \\ r_1 &= r_2 = 3 \\ y &= e^{3x}(C + Dx) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 3y &= 0 \\ r^2 + 4r + 3 &= 0 \\ r &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{-4}{2} \pm \frac{2i}{2} \\ &= -2 \pm i \\ y &= e^{-2x}(C \sin x + D \cos x) \end{aligned}$$

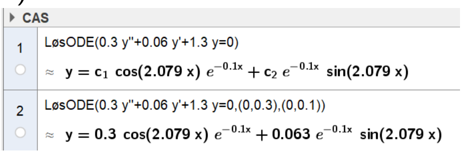
## 2.ordens diff.likn.

### 8.5.2 Oppgave

Et lodd med massen $m = 0.3$ kg henger i en fjær med fjærkonstant $k = 1.3$ N/m og friksjonstall $q = 0.06$ Ns/m. Ved tiden $t = 0$ er utslaget $0.3$ m og farten $v(0) = 0.1$ m/s oppover.

1. Finn den generelle løsningen av diff.likningen.
2. Finn posisjonen $y$ til loddet etter $t$ sekunder.
3. Tegn grafen til $y$ for $0 < t < 30$.

a)




$$y = e^{-0.1x}(C\cos(2.08x) + D\sin 2.08x$$

b)

$$y = e^{-0.1x}(0.3\cos(2.08x) + 0.06\sin 2.08x$$

c)