Eksamen R1
Høst 2019
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (3 poeng)

a) $f(x) = x^4 - 2x + \ln x$

$f'(x) = 4x^3 - 2 + \frac{1}{x}$

b) $g(x) = x^7 \cdot e^x$

$g'(x) = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x = x^6 e^x (7 + x)$

c) $h(x) = \frac{\ln(2x}{x^2}$

$h'(x) = \frac{\frac{2}{2x}x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

Oppgave 2 (2 poeng)

$$
\begin{aligned}
4\ln(a \cdot b^3) - 3\ln(a \cdot b^2 9 - \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= 4(\ln a + 3\ln b) - 3(\ln a + 2\ln b) - (\ln a - \ln b) \\
&= 4\ln a + 12\ln b - 3\ln a - 6\ln b - \ln a + \ln b = 7\ln b
\end{aligned}
$$

Oppgave 3 (5 poeng)

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x - 30$$

a) Hvis $(x - 2)$ er en faktor så er $P(2) = 0$

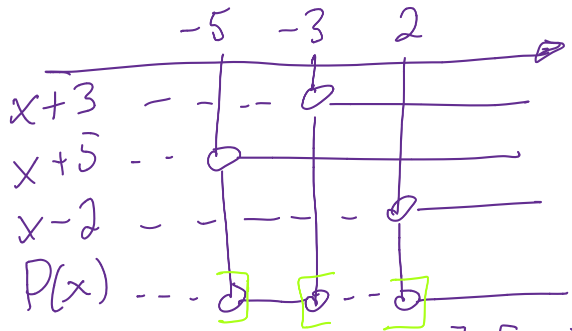
$$
\begin{aligned}
2^3 + 6 \cdot 2^2 + k \cdot 2 - 30 &= 0 \\
8 + 24 + 2k - 30 &= 0 \\
2k &= -2 \\
k &= -1
\end{aligned}
$$

b) $(x^3 + 6x^2 - x - 30) : (x - 2) = x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$

$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 3)(x + 5)(x - 2)$

c)

$$x^3 + 6x^2 \leq x + 30$$
$$x^3 + 6x^2 - x - 30 \leq 0$$
$$(x+3)(x+5)(x-2) \leq 0$$



$P(x) \leq 0$ når $x \in \langle \leftarrow, -5] \cup [-3, 2]$

Oppgave 4 (6 poeng)

a) $\overrightarrow{AB} = [2-(-2), -1-1] = [4, -2]$

$\overrightarrow{BC} = [4-2, 2-(-1)] = [2, 3]$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [4, -2] \cdot [2, 3] = 8 - 6 \neq 0$

$\overrightarrow{AB} \not\perp \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AD} = [t-(-2), 3-1] = [t+2, 2]$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = [4, -2] \cdot [t+2, 2] = 4(t+2) - 2 \cdot 2 = 4t + 8 - 4 = 4t + 4$

$4t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1$

d) $\overrightarrow{CD} = [t-4, 3-2] = [t-4, 1]$

$\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{DC}$

$$[t-4, 1] = k \cdot [4, -2]$$
$$t - 4 = 4k \wedge 1 = -2k$$
$$t - 4 = 4k \wedge k = -\frac{1}{2}$$
$$t - 4 = 4(-\frac{1}{2})$$
$$t = -2 + 4$$
$$t = 2$$

Oppgave 5 (6 poeng)

7 fra A + 5 fra B = 12 elever , vi skal velge ut 3 fra A + 2 fra B = 5

a)
3 fra A : $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35$

2 fra B : $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot !3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

3 fra A og 3 fra B : $\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 35 \cdot 10 = 350$

b)
P(både Anne og Jens)=$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$

c)
P(bare Anne)=$\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{35}$

P(bare Jens)=$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{35}$

P(bare en av dem)=$\frac{9}{35} + \frac{8}{35} = \frac{17}{35}$

Oppgave 6 (4 poeng)

a)
$O(0,0), A(x,0), B(x,f(x)), C(0,y)$

Likningen til en sirkel med senter i origo : $x^2 + y^2 = r^2$
$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$
A1 = Areal av kvartsirkel = $\frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi$

A2 = Areal av rektangelet :$x \cdot (\sqrt{4 - x^2})$

$F(x)$ =Areal av fargelagt område =A1-A2 $= \pi - x(\sqrt{4 - x^2})$ som var det vi skulle vise.

b)
Det minste fargelagte arealet får vi når rektangelet erså stort som mulig. Arealet av rektangelet er : $g(x) = x \cdot (\sqrt{4 - x^2})$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sqrt{4 - x^2} + x \cdot (\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}) \\
&= \sqrt{4 - x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{4 - x^2}} \\
&= \frac{4 - x^2 - x^2}{2\sqrt{4 - x^2}} \\
&= \frac{4 - 2x^2}{2\sqrt{4 - x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 0 \\
4 - 2x^2 &= 0 \\
x &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Oppgave 7 (8 poeng)

a)

- Trekante CDE er likebeint fordi 2 av sidene er radius i sirkelen.
- Siden vinkel DCB = vinkel DEB = 90 grader så vil vinkel ECB = vinkel CEB, da er trekanten CEB likebeint, CE=EB=a
- Da får vi : BA=BE+EA , EA=BA-BE=c-a

b)

- Begge trekantene inneholder vinkel A
- Begge trekantene har en rett vinkel
- Da er de formlike

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC}$$
$$\frac{r}{a} = \frac{(c-a)}{b}$$
$$r = \frac{a \cdot (c-a)}{b}$$

c)

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot r(2c+2a)$$
$$a \cdot b = (a+c) \cdot r$$

d)

$$r^2 + (c-a)^2 = (b-r)^2$$
$$r^2 + c^2 - 2ac + a^2 = b^2 - 2br + r^2$$
$$c^2 - 2ac + a^2 = b^2 - 2b(\frac{a(c-a)}{b})$$
$$c^2 - 2ac + a^2 = b^2 - 2a(c-a))$$
$$c^2 - 2ac + a^2 = b^2 - 2ac + 2a^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

DEL 2

Oppgave 1 (6 poeng)

80% søppelpost (S) - 86% av disse inneholder et ord fra liste.(L)
20% er annen post - 3% av disse inneholder et ord fra denne lista.

a) $P(L) = P(S) \cdot P(L|S) + P(\bar{S})P(L|\bar{S}) = 0,8 \cdot 0,85 + 0,03 \cdot 0,2 =$

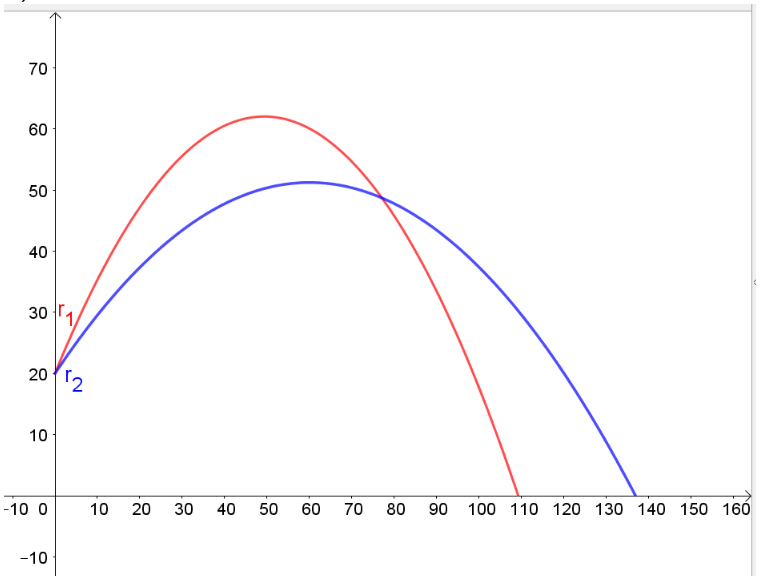
Oppgave 2 (6 poeng)

Oppgave 3 (8 poeng)

a)
Ball 1 treffer bakken etter 6.62 sekunder,
Ball 2 treffer bakken etter 5.7 sekunder.

1	r_1(t):=Kurve(17 t, -5 t^2+29 t+20, t, 0, 6.42) $\approx$ $\mathbf{r_1 := (17\,t, -5\,t^2 + 29\,t + 20)}$
2	r_2(t):=Kurve(24 t, -5t^2+25 t+20, t, 0, 5.7) $\approx$ $\mathbf{r_2 := (24\,t, -5\,t^2 + 25\,t + 20)}$
3	Løs(-5t² + 29t + 20=0) $\approx$ $\mathbf{\{t = -0.62, t = 6.42\}}$
4	Løs(-5t² + 25t + 20=0) $\approx$ $\mathbf{\{t = -0.7, t = 5.7\}}$
5	tid1:=6.42 $\approx$ **tid1 := 6.42**
6	tid2:=5.7 $\approx$ **tid2 := 5.7**

b)



c)

7	v_1(t):=Derivert(r_1(t)) $\approx$ $\mathbf{v_1(t) := (17, -10\,t + 29)}$
8	v_2(t):=Derivert(r_2(t)) $\approx$ $\mathbf{v_2(t) := (24, -10\,t + 25)}$
9	abs(v_1(0)) $\approx$ **33.62**
10	abs(v_2(0)) $\approx$ **34.66**
11	Løs(v_1(t)=k*v_2(t)) $\approx$ $\{\{k = 0.71, t = 3.87\}\}$
12	v_3:=v_2(3.87) $\rightarrow$ $v_3 := \begin{pmatrix} 24 \\ -\frac{137}{10} \end{pmatrix}$
13	v_x:=(1,0) $\rightarrow$ $v_x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
14	Vinkel(v_3,v_x)/° $\approx$ **29.72**

Oppgave 4 (4 poeng)

a)
Definerer funksjonen $f(x) = \frac{1}{4p}x^2$, og punktene P og Q
Definerer g(x) som linja gjennom P og Q
Finner x-verdien til skjæringspunktene mellom f(x) og g(x) ved å løse likningen $f = g$
Får da $x = q$ som er x-koordinatet til Q, og $x = -\frac{4p^2}{q}$ som er x-koordinatet til det andre skjæringspunktet, som var det som skulle vises.

CAS

1	$\rightarrow$ $f(x) := \frac{x^2}{4\,p}$
2	P:=(0,p) $\rightarrow$ $P := (0, p)$
3	Q:=(q,f(q)) $\rightarrow$ $Q := \left(q, \frac{q^2}{4\,p}\right)$
4	g(x):=Linje(P, Q) $\rightarrow$ $g(x) := x\,\frac{-4\,p^2 + q^2}{4\,p\,q} + p$
5	Løs(g=f) $\rightarrow$ $\left\{x = q, x = -4 \cdot \frac{p^2}{q}\right\}$

$p > 0$

b)

Definerer m(x) og n(x) som tangentene til f i Q og R.
Finner stigningstallet til tangentene, multipliserer dem og får -1, det betyr at de står normalt på hverandre, som var det som skulle vises.

6	m(x):=Tangent(q, f) $\rightarrow\ \mathbf{m(x)\ :=\ \dfrac{-q^2+2\,q\,x}{4\,p}}$
7	n(x):=Tangent(-4p² / q, f) $\rightarrow\ \mathbf{n(x)\ :=\ \dfrac{-4\,p^3-2\,p\,q\,x}{q^2}}$
8	(2 p) / q * (-2 q) /(4 p) $\rightarrow\ \mathbf{-1}$