# Eksamen R1 Vår 2019
Løsningsforslag

## DEL 1

## Oppgave 1 (5 poeng)

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2\cdot 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3x^2 + 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x\cdot \ln(2x-1) + x^2 \cdot \frac{1}{2x-1}\cdot 2 \\ &= 2x\Big(\ln(2x-1) + \frac{x}{x-1}\Big) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{4\cdot e^{2x} - 4x\cdot e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x})^2} \\ &= \frac{4e^{2x}(1-2x)}{(e^{2x})^2} \\ &= \frac{4(1-2x)}{e^{2x}} \end{aligned}$$

## Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)} &= \frac{(x+1)+(x-1)-x}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

b)

$$\frac{(\ln e^3 + 1)^2}{(e^{\ln 3}+1)^3} = \frac{(3+1)^2}{(3+1)^3} = \frac{4^2}{4^3} = \frac{1}{4}$$

# Oppgave 3 (6 poeng)

a) Divisjonen går opp dersom $(2x-1)$ er en faktor. Da er $x = \frac{1}{2}$ et nullpunkt.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 11\cdot\frac{1}{2} + 6 \\ &= \frac{2}{2^3} - \frac{3}{2^2} - \frac{11}{2} + 6 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{22}{4} + \frac{24}{4} \\ &= \frac{0}{4} = 0 \end{aligned}$$

altså er $(2x-1)$ en faktor i $f(x)$
b) Polynomdivisjon :

$$\begin{aligned} (2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (2x-1) &= x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \\ -2x^3 + x^2 ..... & \end{aligned}$$

$$f(x) = (x+2)(x-3)(2x-1)$$

c)

$$\begin{aligned} (x+2)(x-3)(2x-1) &\geq (2x-1)(x+2) \\ x-3 &\geq 1 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

# Oppgave 4 (6 poeng)

a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [5-1, -1-3] = [4, -4] \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) Senter av sirkelen (S) ligger midt på AB : $\overrightarrow{AS} = [2, -2]$
Bruker veien om origo for å finne koordinatene til S :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} \\ &= [1,3] + [2,-2] \\ &= [3,1] \end{aligned}$$

Da vet vi at senter av sirkelen er i S(3,1).
Halvparten av legden til $AB$ er radien av sirkelen $r = 2\sqrt{2}$
Da blir likningen til sirkelen ::

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$$

c) Siden AB er diameteren i en sirkel så må $C$ ligge på sirkelen fra b), iflg. Thales' setning.
Da må avstanden fra S til $C$ være mindre enn $2\sqrt{2}$.

Avstanden fra S til linja $x = 6$ er 3 $(6 - 3 = 3)$, $2\sqrt{2} < 3$,
altså er det ikke mulig å plassere C slik at vinkelen i C er rett.

$$(3^2 = 9) > ((2\sqrt{2})^2 = 8)$$

# Oppgave 5 (4 poeng)

a) På hvor mange måter kan 3 deltakere velges ut av de 10 deltakerene :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

b) På hvor mange måter kan de 120 resultatene ha 2 eller 3 kvinner :

$$P(X = 3) + P(X = 2) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \cdot 1}{120} + \frac{10 \cdot 5}{120} = \frac{60}{120} = 0,5$$

Det vil si at det er 60 av 120 grupper som inneholder flere kvinner enn menn.

# Oppgave 6 (4 poeng)

a) Dersom A er den deriverte så måtte B ha steget i området fram til ca.-1.
Det gjør den ikke, dermed vet vi at A er funksjonen (og B er den deriverte).

b)

# Oppgave 7 (4 poeng)

a) Perifervinklene CAB=CDB , toppvinklene APC=BPD.
Da vet vi at trekantene APC og BPD er formlike, 2 like vinkler.

b) Siden trekantene er formlike så vet vi at :

$$\frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PB}$$
$$AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

# Oppgave 8 (3 poeng)

a) Dersom grafen til f har et toppunkt i $(2, f(2))$ så må $f'(2) = 0$
Dersom $f'(2) = 0$ så vet vi at den har et toppunkt ELLER et bunnpunkt ELLER et terrassepunkt i $(2, f(2))$.

$f'(x) = 0 \Leftarrow$ Grafen til $f$ har et toppunkt i $(2, f(2))$

b) Dersom $f'(3) = 0$ OG $f''(3) > 0$ så må grafen til f ha et bunnpunkt i $(3, f(3))$
Dersom $(3, f(3))$ er et bunnpunkt så må $f'(3) = 0$ og $f''(3) \geq 0$,
altså $f''(3)$ kan også være lik null.

$f'(3) = 0$ og $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Grafen til $f$ har et bunnpunkt i $(3, f(3))$

# DEL 2

## Oppgave 1 (6 poeng)

$$\vec{r}(t) = [28t - 3t^2, 10t - 5t^2]$$

a) Fartsvektoren : $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [28 - 6t, 10 - 10t]$

Banefarten (farten) når $x = 0$ : $|\vec{v}(0)| = \sqrt{28^2 + 10^2} = 2\sqrt{221} = 29,73$

b) Ballen treffer bakken når y=0 :

CAS

| | |
|---|---|
| 1 | r(t):=Kurve(28t - 3t², 10t - 5t², t, 0, 5)<br>→ $\mathbf{r := (28\,t - 3\,t^2, 10\,t - 5\,t^2)}$ |
| 2 | Løs(10 t-5 t^2=0,t)<br>→ $\{\mathbf{t = 0, t = 2}\}$ |
| 3 | r(2)<br>→ $\mathbf{(44, 0)}$ |

Det tok 2 sekunder fra ballen ble sparket til den traff bakken.

c)

| | |
|---|---|
| 4 | v(t):=Derivert(r(t))<br>→ $\mathbf{v(t) := (-6\,t + 28, -10\,t + 10)}$ |
| 5 | Løs(-10 t+10=0)<br>→ $\{\mathbf{t = 1}\}$ |
| 6 | fart:=abs(v(1))<br>→ $\mathbf{fart := 22}$ |

På det høyeste punktet er farten 22 m/s.

# Oppgave 2 (5 poeng)

a) X = antall menn som vinner.

$$P(X=2)=\frac{nCr(12,1)\cdot nCr(8,2)}{nCr(20,3)}$$

CAS

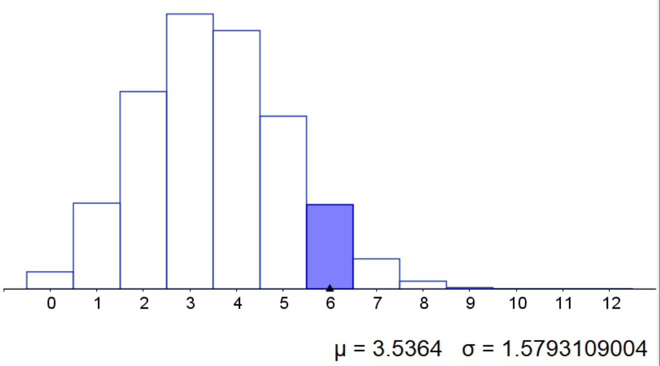
| | |
|---|---|
| 1 | nCr(12, 1)*nCr(8, 2)/nCr(20, 3) |
| | → **28/95** |
| 2 | 28 / 95 |
| | ≈ **0.2947** |

b) V=antall ganger nøyaktig 2 av 3 vinnere er menn i løpet av 12 lotterier :

$$P(X=6)=\binom{12}{6}\cdot 0,2947^6\cdot(1-0,2947)^6$$

| | |
|---|---|
| 3 | nCr(12, 6)*0.2947^6*(1-0.294)^6 |
| | ≈ **0.0749516146** |

eller vi kan benytte sannsynlighetskalkulatoren :




| k | P(X = k) |
|---|---|
| 0 | 0.0151525807 |
| 1 | 0.075975594 |
| 2 | 0.1745995201 |
| 3 | 0.2431801057 |
| 4 | 0.2286213648 |
| 5 | 0.1528421182 |
| 6 | 0.0745068306 |
| 7 | 0.0266842839 |
| 8 | 0.0069685404 |
| 9 | 0.0012940932 |
| 10 | 0.0001622158 |

Binomisk fordeling

n 12 p 0.2947

P( 6 ≤ X ≤ 6 ) = 0.0745068

c)
Sannsynligheten for at alle 3 er kvinner (linje 4) = 0.193
Sannsynligheten for at alle 3 er menn (linje 5) = 0.0491

Sannsyligheten for likt kjønn er da = 0,193+0,0491=0,2421

| | |
|---|---|
| 4 | nCr(12, 3)*nCr(8, 0)/nCr(20, 3) |
| | ≈ **0.1929824561** |
| 5 | nCr(12, 0)*nCr(8, 3)/nCr(20, 3) |
| | ≈ **0.049122807** |

Sannsynligheten for at de tre vinnerene har samme kjønn i minst ett av de tolv lotteriene blir da :

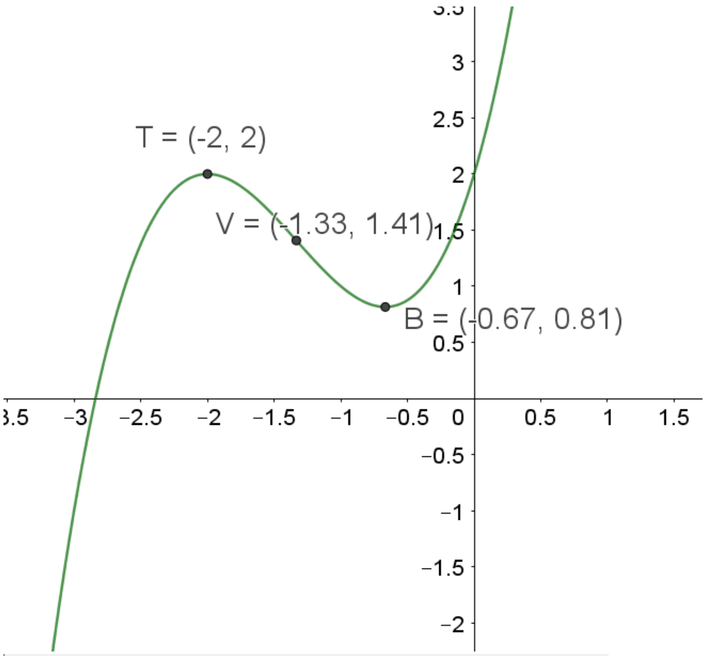
Binomisk fordeling
n 12 p 0.2421
P( 1 ≤ X ≤ 12 ) = 0.9641

$P(Z \geq 1) = 0,9641$

# Oppgave 3 (8 poeng)

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$

a) + b)




CAS

1. f(x):=x^3+4x^2+4x+2
   $\rightarrow f(x) := x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

2. Løs(Derivert(f)=0)
   $\rightarrow \left\{x = -2, x = -\frac{2}{3}\right\}$

3. T:=(-2,f(-2))
   $\rightarrow T := (-2, 2)$

4. B:=(-2/3,f(-2/3))
   $\rightarrow B := \left(-\frac{2}{3}, \frac{22}{27}\right)$

5. Løs(Derivert(Derivert(f)))
   $\rightarrow \left\{x = -\frac{4}{3}\right\}$

6. V:=(-4/3,f(-4/3))
   $\rightarrow V := \left(-\frac{4}{3}, \frac{38}{27}\right)$

c)

$$g(x) = x^3 + a \cdot x + 4 \cdot x + 2$$

**CAS**

| | |
|---|---|
| 1 | g(x):=x^3+a x^2 +4x+2 <br> $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := x^3 + a\, x^2 + 4\, x + 2}$ |
| 2 | Løs(Derivert(g)=0) <br> $\rightarrow \left\{ \mathbf{x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 12}}{3}, x = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 12}}{3}} \right\}$ |
| 3 | Løs(a^2-12>0) <br> $\rightarrow \left\{ \mathbf{-2\sqrt{3} > a, a > 2\sqrt{3}} \right\}$ |

Dersom grafen skal ha både et toppunkt og et bunnpunkt så må $a^2 - 12 > 0$ fordi dersom $a^2 - 12 = 0$ så blir det bare ett ekstremalpunkt, og dersom $a^2 - 12 < 0$ så blir det ingen ekstremalpunkt.

d)

$$h(x) = -2x^3 + 4x + 2$$

Vendepunktet til g ligger på grafen til h dersom x-koordinatet til vendepunktet gir samme y verdi for begge grafene:

x-verdien til vendepunktet :$g''(x) = 0$

| | |
|---|---|
| 4 | dd(x):=Derivert(Derivert(g)) <br> $\rightarrow$ $\mathbf{dd(x) := 2\, a + 6\, x}$ |
| 5 | h(x):=-2x^3+4x+2 <br> $\rightarrow$ $\mathbf{h(x) := -2\, x^3 + 4\, x + 2}$ |
| 6 | Løs(dd=0) <br> $\rightarrow \left\{ \mathbf{x = -\frac{1}{3}\, a} \right\}$ |
| 7 | g(-a/3)==h(-a/3) <br> $\rightarrow$ **true** |

De gir samme verdi dermed har vi vist at vendepunktet ligger på h(x) for alle verdier av a.

# Oppgave 4 (5 poeng)

a) Trekantene ABC og GCD er kongruente fordi de begge har en rett vinkel i C
og sidene på hver side av denne vinkelen er like,
fordi de er sidene i de samme kvadratene.

b) Dersom vi tegner en sirkel med AB som diameter og senter i H,
så vet vi at C ligger på sirkelen (Thales setning). Da er HA=HC=radius i sirkelen.
Da vet vi at trekanten AHC er likebeint.

c)