Utdannings-
direktoratet

Eksamen

11.11.2020

REA3022 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Del 1

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^2 + e^x$

b) $g(x) = x^3 \cdot \sqrt{2x-1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Oppgave 2 (2 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

$$2\ln(a^3b^4) - 3\ln a - 3\ln(ab^2)$$

Oppgave 3 (5 poeng)

a) Vis at $x = 2$ er en løsning av likningen

$$x^3 + 2x^2 = 5x + 6$$

b) Løs ulikheten

$$x^3 + 2x^2 < 5x + 6$$

c) Lag en ulikhet som har løsningsmengden $\langle \leftarrow, -1 \rangle \cup [2, \rightarrow \rangle$

Oppgave 4 (4 poeng)

Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[4t + 2, 2t - 5t^2\right]$$

a) Bestem et uttrykk for fartsvektoren og et uttrykk for akselerasjonsvektoren til partikkelen.

b) Når står fartsvektoren vinkelrett på akselerasjonsvektoren?

Oppgave 5 (6 poeng)

Firkanten $ABCD$ er gitt ved $A(1,1)$, $B(6,2)$, $C(5,7)$ og $D(2,8)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $|\overrightarrow{AB}|$.

For en firkant $PQRS$ er det matematiske tyngdepunktet T gitt ved

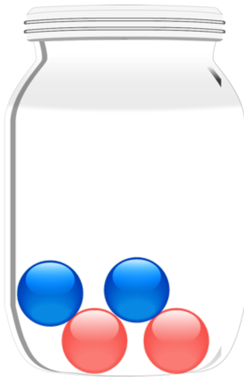
$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}\right),$$ der O er origo.

b) Bestem koordinatene til det matematiske tyngdepunktet til firkanten $ABCD$ ovenfor.

Vi har gitt punktene $E(0,3)$, $F(2,-2)$ og $G(7,3)$. Disse danner sammen med punktet H en firkant $EFGH$. Det matematiske tyngdepunktet i denne firkanten er $T(3,2)$.

c) Bestem koordinatene til H.

Oppgave 6 (4 poeng)



Tore og Mia diskuterer hvem som skal ta oppvasken. De legger 2 røde og 2 blå kuler i en krukke og skal trekke 2 kuler tilfeldig (uten tilbakelegging) fra krukken. Mia foreslår at hun må ta oppvasken dersom de 2 kulene har lik farge, mens Tore må ta oppvasken dersom de 2 kulene har ulik farge.

a) Bestem sannsynligheten for at Mia må ta oppvasken dersom de følger dette forslaget.

Tore mener at dette er urettferdig. Han foreslår at de skal legge flere røde kuler i krukken.

b) Hvor mange røde kuler må det minst ligge i krukken dersom sannsynligheten for at de to kulene har ulik farge, er mindre enn 50 %?

Oppgave 7 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x+2)(x^2+x+5)$$

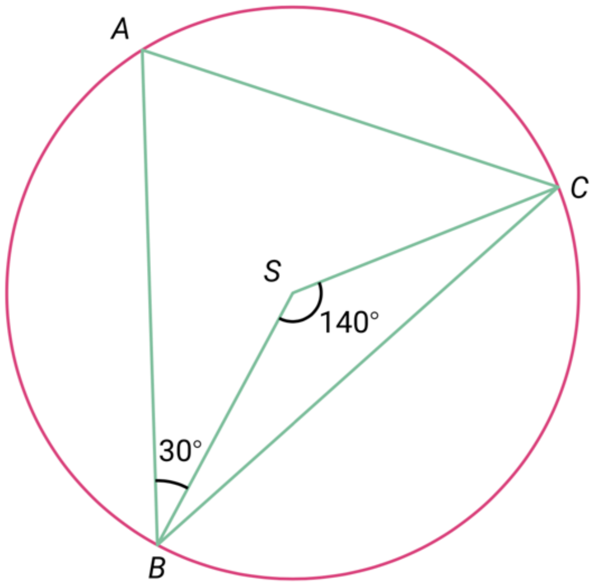
a) Vis at grafen til f er stigende for alle verdier av x.

b) Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 8 (2 poeng)

Punktene A, B og C ligger på en sirkel med sentrum i S, slik skissen til høyre viser.



Bestem vinklene i trekanten ABC.

Oppgave 9 (2 poeng)

I et trapes $ABCD$ lar vi M være midtpunktet på AD og N være midtpunktet på BC. Se skissen.

Vis at $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Agnete planlegger en 14 dagers ferietur til sørkysten av Gran Canaria. Der er det i gjennomsnitt 300 soldager i året.

Hun har gjort noen beregninger og funnet ut at sannsynligheten for at alle de 14 dagene blir soldager, er 6,4 %.

a) Forklar hvordan hun kan ha kommet fram til dette resultatet. Hvilke forutsetninger ligger til grunn for beregningene?

En familie vurderer å reise på en 14 dagers tur til sørkysten av Gran Canaria hvert år de neste 8 årene.

b) Bestem sannsynligheten for at de opplever bare soldager på minst 2 av disse 8 framtidige feriereisene. Vi forutsetter at antall soldager i året ikke endrer seg i løpet av disse åtte årene.

Ole planlegger en 4 ukers ferietur til et annet sted i verden. Et reisebyrå oppgir at sannsynligheten for minst 22 soldager på dette feriestedet i løpet av en tilfeldig fireukersperiode er minst 90 %.

c) Hvor mange soldager i året må det minst være i gjennomsnitt på dette stedet for at påstanden fra reisebyrået skal være sann?

Oppgave 2 (8 poeng)

Rikard kaster en kule. Etter t sekunder er posisjonen $\vec{r}_A$ til kulen gitt ved

$$\vec{r}_A(t) = [9t\,,\ 1 + 7t - 5t^2]$$

Enheten på aksene er meter, og *x*-aksen er langs bakken.

a) Hvor langt kaster Rikard kulen i *x*-retning?

Berit står 25 meter fra Rikard. Hun kaster en kule i retning mot Rikard samtidig som Rikard kaster sin kule. Etter t sekunder er posisjonen $\vec{r}_B$ til Berits kule gitt ved

$$\vec{r}_B = [25 - 8t,\ 1 + 7t - 5t^2]$$

b) Tegn grafene til $\vec{r}_A$ og $\vec{r}_B$ i samme koordinatsystem.

c) Vil de to kulene treffe hverandre?

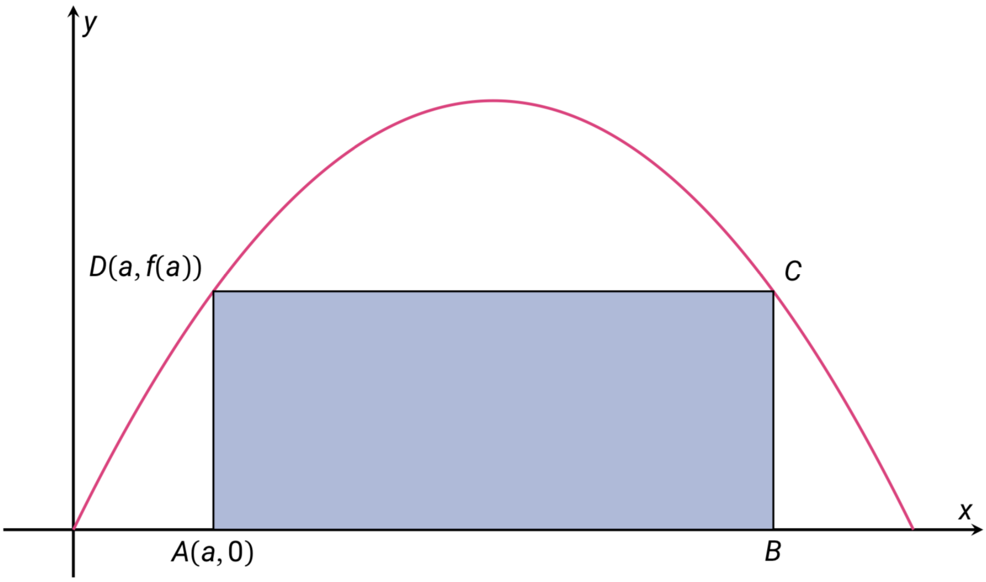
d) Ville svaret i oppgave c) blitt annerledes dersom Berit hadde stått nærmere Rikard da hun kastet kulen? (Vi går ut fra at Berit kaster kulen med samme kraft og retning som når hun står 25 meter fra Rikard.)

Oppgave 3 (3 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 6x - x^2 \quad , \quad x \in [0, 6]$$

Nedenfor har vi tegnet grafen til f sammen med rektangelet $ABCD$.
I rektangelet er $A(a,0)$ og $D(a,f(a))$, der $a \in \langle 0, 3 \rangle$. Punktet C ligger på grafen til f.

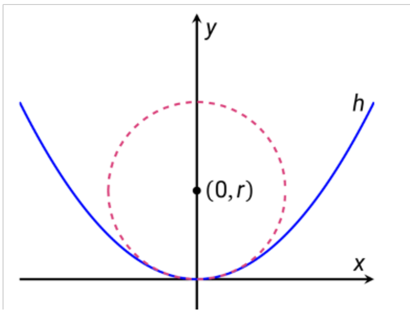


Bestem den eksakte verdien til a som gjør at rektangelet får størst mulig areal.

Oppgave 4 (7 poeng)

Funksjonen h er gitt ved

$$h(x) = x^2$$



En sirkel med radius r og sentrum $(0, r)$ tangerer grafen til h i punktet $(0, 0)$. Se skissen til høyre.

Nedre halvdel av sirkelen er grafen til funksjonen g gitt ved

$$g(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

a) Bestem r slik at $g''(0) = h''(0)$.

Tallet r som du fant i oppgave a), kalles *krumningsradiusen* til grafen til h i $(0, h(0))$.

Generelt gjelder følgende setning:

Anta at en funksjon f er dobbeltderiverbar i $x = a$, og at $f''(a) \neq 0$. Da er krumningsradiusen $r(a)$ til grafen til f i $(a, f(a))$ gitt ved

$$r(a) = \sqrt{\frac{(1 + (f'(a))^2)^3}{(f''(a))^2}}$$

b) Bruk denne formelen til å regne ut krumningsradiusen til grafen til h i $(0, h(0))$.

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \ln(x)$$

c) Bruk CAS til å bestemme hvilket punkt på grafen til f som har minst krumningsradius. Hva er den minste krumningsradiusen?