Eksamen R1
Høst 2021
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (5 poeng)

a) $f(x) = \ln x + x^2 + 2$
$f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{x} + 2x}}$

b) $g(x) = (x^2+2)^7$
$g'(x) = 7(x^2+2)^6 \cdot 2x = \underline{\underline{14x(x^2+2)^6}}$

c) $h(x) = 3x \cdot e^{2x}$
$h'(x) = 3 \cdot e^{2x} + 3x \cdot e^{2x} \cdot 2 = \underline{\underline{3e^{2x}(1+2x)}}$

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
\frac{2x+2}{x^2-x} - \frac{2x+2}{x^2-1} + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+x} &= \frac{2(x+1)}{x(x-1)} - \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x(x+1)} \\
&= \frac{2(x+1)}{x(x-1)} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\
&= \frac{2(x+1)}{x(x-1)} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{2}{x} \\
&= \frac{2(x+1)}{x(x-1)} - \frac{2x}{x(x-1)} + \frac{2(x-1)}{x(x-1)} \\
&= \frac{2x+2-2x+2x-2}{x(x-1)} \\
&= \frac{2x}{x(x-1)} \\
&= \frac{2}{x-1}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\ln(4x) + 3\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(2x^2) &= \ln 2^2 + \ln x + 3(\ln x - \ln 2) + \ln 2 + \ln x^2 \\
&= 2\ln 2 + \ln x + 3\ln x - 3\ln 2 + \ln 2 + 2\ln x \\
&= 6\ln x
\end{aligned}$$

Oppgave 3 (6 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= [6-2, 5-2] = [4,3] \\
l &= \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 2+3t \end{cases} \\
\overrightarrow{BD} &= [2-6, 6-1] = [-4,5] \\
m &= \begin{cases} x = 6-4s \\ y = 1+5s \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Skjæringspunktet er der koordinatene er like :

$$\begin{aligned}
2+4t = 6-4s &\wedge 2+3t = 1+5s \\
4t+4s = 4 &\wedge 3t-5s = -1 \\
t = (1-s) &\wedge 3(1-s)-5s = -1 \\
&\wedge 3-3s-5s = -1 \\
&\wedge -8s = -4 \\
t = \frac{1}{2} &\wedge s = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$x = 2+2 = 4, y = 2+\frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$
$$x = 6-2 = 4, y = 1+\frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

Skjæringspunktet er altså $S\left(4, \frac{7}{2}\right)$

c)
Dersom l og m står normalt på hverandre må retningsvektorene stå normalt på hverandre:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &\perp \overrightarrow{BD} \\
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \\
[4,3] \cdot [-4,5] &\neq 0
\end{aligned}$$

altså står ikke linjene normalt på hverandre.

Oppgave 4 (4 poeng)

Hvis t=x, vil bredden av rektangelet være 2x.
Høyden vil alltid være f(x)
Arealet av rektangelet er : bredde x høyde : $F(x) = 2x \cdot f(x)$
Da har vi en funksjon som viser arealet i forhold til x.
For å finne det største arealet må vi finne toppunktet til denne grafen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{5}{x^2+4} \\
F(x) &= 2x \cdot \frac{5}{x^2+4} \\
&= \frac{10x}{x^2+4} \\
F'(x) &= \frac{10(x^2+4) - 10x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{10x^2 + 40 - 20x^2}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{10(4-x^2)}{(x^2+4)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 0 \\
(2+x)(2-x) &= 0 \\
x &= \pm 2, t > 0 \Rightarrow x = 2 \\
F(2) &= \frac{10 \cdot 2}{2^2+4} \\
&= \frac{20}{8} = \frac{5}{2}, \text{ altså er max.areal} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Oppgave 5 (3 poeng)

a) ¿

$$\begin{aligned}
\lg x^2 &= 2 \\
2 \lg x &= 2 \\
\lg x &= 1 \\
x &= 10
\end{aligned}$$

Ser at løsningen her kan være ± 10, altså er ikke utsagnet utfyllende fra venstre mot høyre, men fra hayre mot venstre.

$$\lg x^2 = 2 \Leftarrow x = 10$$

b)

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x &< 0 \\
x(x-2) &< 0 \\
x &\in \langle 0, 2 \rangle
\end{aligned}
$$

Ikke utfyllende fra venstre mot høyre, men siden $< 0, 1 >$ ligger innenfor $< 0, 2 >$ er den utfyllende fra høyre mor venstre

$$x^2 - 2x < 0 \Leftarrow x \in \langle 0, 1 \rangle$$

Oppgave 6 (6 poeng)

a)
Dersom de står på linje er antall kombinasjoner

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Siden de står i ring vil det ikke være en start eller slutt, da vil antall kombinasjoner være :

$$\frac{6!}{6} = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

som skulle vises.

b)
Av de 120 kombinasjonene kan Audun stå på venstre eller høyre side av Siv. De andre fire kan da ha $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ antall kombinasjoner, da blir sannsynligheten for at Siv får holde Audun i hånda :

$$P(A) = \frac{2 \cdot 24}{120} = \frac{4}{10} = 0,4$$

c)
Her står de på rekke slik at antall mulige kombinasjoner blir $6! = 6 \cdot 120 = 720$.

Audun og Siv kan stå ved siden av hverandre på 10 ulike måter. De 4 andre kan plasseres på $4! = 24$ ulike måter.

Antall gunstige kombinasjoner blir da $10 \cdot 24 = 240$.
Da får vi at $P = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$.

Oppgave 7 (8 poeng)

a)
$\angle BAC = \angle BDC$ fordi de begge er perifervinkler til buen BC.

b)
$\triangle ABC$ inneholder $\angle BAC$ og $\angle BCA$
$\triangle DEC$ inneholder $\angle EDC$ og $\angle ECD$
Vi vet at $\angle BAC = \angle BDC$ og $\angle ACB = \angle BCE$, da har trekantene to like vinkler altså er de formlike.

Da får vi :

$$\frac{ED}{AB} = \frac{DC}{AC}$$
$$ED \cdot AC = AB \cdot DC$$

c)
$u = \angle BCA = \angle ECD$
$v = \angle ACE$
Da blir $\angle BCE = \angle ACD = u + v$

$w = \angle CAD = \angle CBE$ fordi begge er perifervinkel til buen CD

Da ser vi at begge trkantene inneholder w og $u + v$, altså er de formlike.

Da får vi :

$$\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}$$
$$BE \cdot AC = BC \cdot AD$$

d)

$$BD = BE + ED$$
$$BE = \frac{BC \cdot AD}{AC}$$
$$ED = \frac{AB \cdot DC}{AC}$$
$$BD = \frac{BC \cdot AD}{AC} + \frac{AB \cdot DC}{AC}$$
$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

e)
Dette er et rektangel derfor vet vi at :

$$AC = DB$$
$$DC = AB$$
$$AD = BC$$

Ptolemaios' setning :

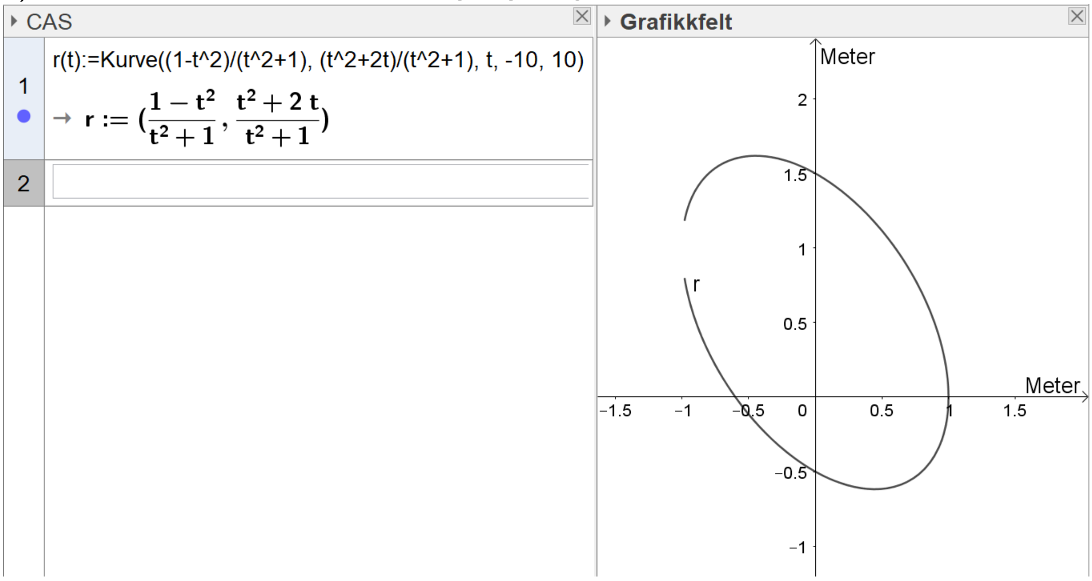
$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$
$$AC \cdot AC = AB \cdot AB + BC \cdot BC$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Da har vi bevist Pythagoras' setning ved hjelp av Ptolemaios' setning og figuren.

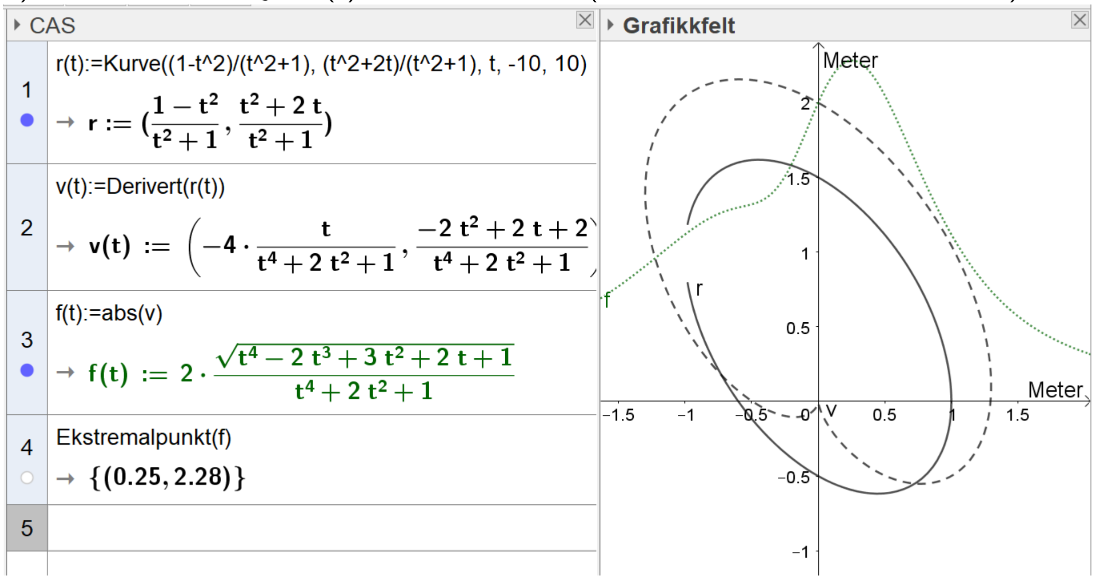
DEL2

Oppgave 1 (6 poeng)

a) Bruker kommandoen Kurve, og tegner grafen

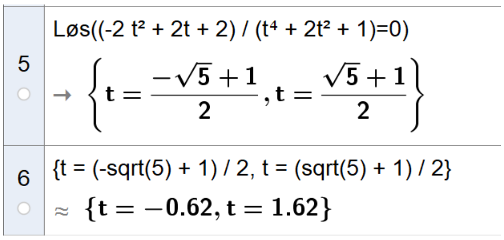


b) Finner en funksjon f(t) som viser farten (absoluttverdien til fartsvektoren).



Farten var størst når $t = 0,25$ sekunder.

c) Fartsretningen er paralell med x-aksen når y-koordinatet er null.



Tidspunktet der partikkelen beveger seg parallelt med x-aksen når $t = -0.62$ og $t = 1.62$.

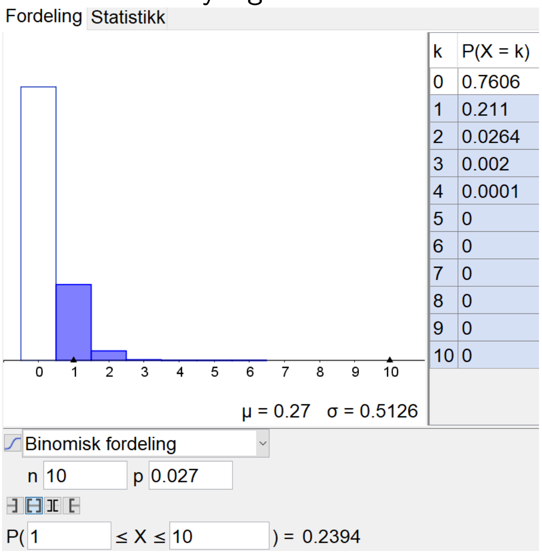
Oppgave 2 (7 poeng)

a)
Sannsynligheten for at kulen havner på det grønne feltet én gang er : $p = \frac{1}{37}$
Sannsynligheten for at kulen IKKE havner på det grønne feltet én gang er da : $\frac{36}{37}$

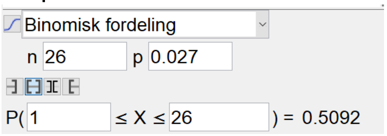
Sannsynligheten for at den ikke havner på grønt noen av de 10 gangene er : $\left(\frac{36}{37}\right)^{10}$
Sannsynligheten for at den havner på grønt minst én gang blir da :

$$\underline{\underline{P(X > 0) = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^{10} = 0,2397}}$$

Vi bruker sannsynlighetskalkulatoren :

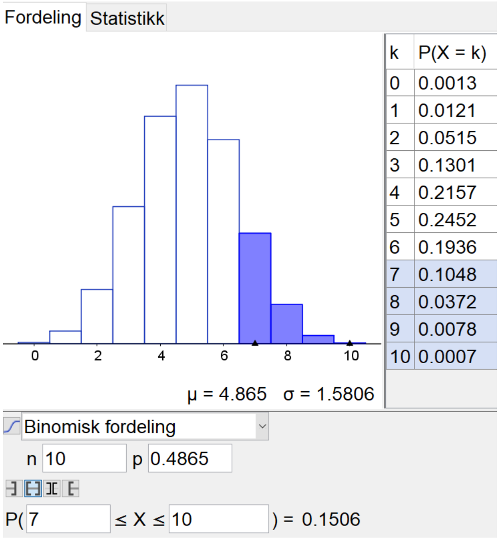


b)
Vi prøver oss fram med ulike verdier av n, til vi får at P er mer enn 50%.



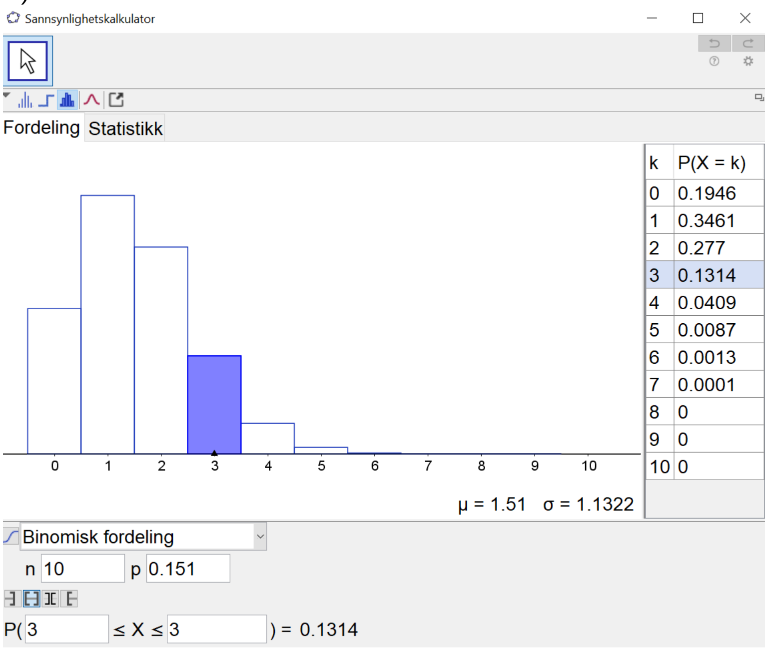
Vi må spille minst $\underline{\underline{26 \text{ ganger}}}$ dersom sannsynligheten skal være over 50% for at kulen havner på grønt minst én gang.

c)
Sannsynligheten for rødt : $p = \frac{18}{37}$ i hvert delforsøk.
Delforsøkene er uavhengige av hverandre.



$$\underline{\underline{P(X \geq 7) = 0,151}}$$

d)



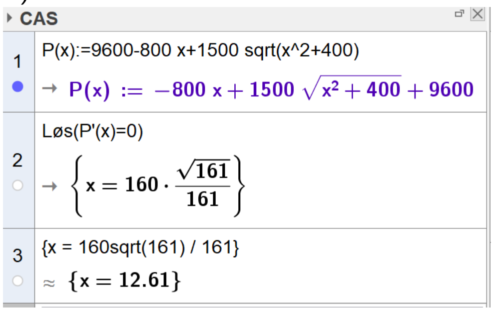
Altså er sannsynligheten for at akkurat 3 av dem får rødt på minst 7 av spilleomgangene er : $\underline{\underline{0,1314}}$

Oppgave 3 (6 poeng)

a)
Langs veien : $(120 - x) \cdot 800$
I terrenget : $\sqrt{x^2 + 20^2} \cdot 1500$

Total pris blir da :

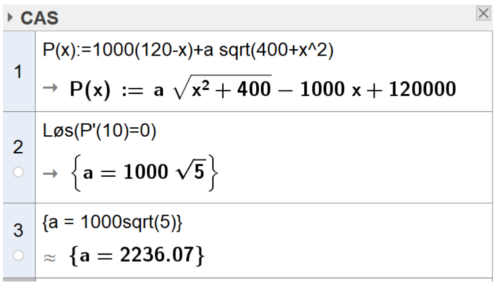
$$\begin{aligned} P(x) &= (120 - x) \cdot 800 + \sqrt{x^2 + 20^2} \cdot 1500 \\ &= 9600 - 800x + 1500\sqrt{x^2 + 400} \\ &\text{som skulle vises} \end{aligned}$$

b)


Den optimale løsningen er altså at $\underline{\underline{x = 12,6 \text{ meter}}}$.

c)

$$Q(x) = (120 - x) \cdot 1000 + \sqrt{x^2 + 20^2} \cdot a$$



Altså er prisen for grøft i terreng $\underline{\underline{\text{kr. } 2.236,-}}$

Oppgave 4 (5 poeng)

$$f(x) = x^3 - 2b \cdot x^2 + (b^2 + 3) \cdot x$$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 - 2b \cdot x^2 + (b^2+3) \cdot x &= 0 \\ x(x^2 - 2bx + (b^2+3)) &= 0 \\ x &= \frac{-(-2b) \pm \sqrt{(2b)^2 - 4 \cdot (b^2+3)}}{2} \\ &= \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4b^2 - 12)}}{2} \\ &= \frac{2b \pm \sqrt{-12}}{2} \end{aligned}$$

Siden vi får negativ verdi under rottegnet vil det si at $x(x^2 - 2bx + (b^2+3)) = 0$ bare har én løsning.

1	f(x):=x^3-2 b x^2+(b^2+3) x → $f(x) := x^3 - 2\,b\,x^2 + b^2\,x + 3\,x$
2	Nullpunkt(f) → $\{x = 0\}$
3	Løs(f=0) → $\{x = 0\}$

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 2b \cdot x^2 + (b^2+3) \cdot x \\
f'(x) &= 3x^2 - 4b \cdot x + (b^2+3) \\
f'(x) &= 0 \\
3x^2 - 4b \cdot x + (b^2+3) &= 0 \\
x &= \frac{-(-4b) \pm \sqrt{(-4b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (b^2+3)}}{3 \cdot 2} \\
&= \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 12b^2 - 36}}{6} \\
&= \frac{4b \pm \sqrt{4b^2 - 36}}{6}
\end{aligned}
$$

For at grafen skal ha både topp og bunn, må vi ha 2 løsninger altså må $(4b^2 - 36) > 0$

$$
\begin{aligned}
4b^2 - 36 &> 0 \\
4(b^2 - 9) &> 0 \\
(b+3)(b-3) &> 0 \\
&\underline{\underline{b \in \langle \leftarrow, -3\rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle}}
\end{aligned}
$$

4	d(x):=Derivert(f) $\rightarrow \mathbf{d(x) := b^2 + 3\,x^2 - 4\,b\,x + 3}$
5	Løs(d=0,x) $\rightarrow \left\{\mathbf{x = \frac{2\,b + \sqrt{b^2-9}}{3}, x = \frac{2\,b - \sqrt{b^2-9}}{3}}\right\}$
6	Løs(b^2-9>0) $\rightarrow \{\mathbf{b < -3, b > 3}\}$

c)
Finner punktet på $f(x)$ som har tangenten $y = 3x$.

Setter $g(x) = 3x$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
x^3 - 2b \cdot x^2 + (b^2 + 3) \cdot x &= 3x \\
x^3 - 2b \cdot x^2 + b^2 x + 3x - 3x &= 0 \\
x^3 - 2b \cdot x^2 + b^2 x &= 0 \\
x(x^2 - 2bx + b^2) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2bx + b^2 = 0 \\
x &= \frac{2b \pm \sqrt{(-2b)^2 - 4 \cdot b^2}}{2} \\
&= \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4b^2}}{2} \\
x &= b \\
f(b) &= b^3 - 2b \cdot b^2 + b^2 \cdot b + 3b = 3b \\
f'(b) &= 3
\end{aligned}
$$

$f(x)$ og $g(x)$ har altså et felles punkt uansett hvilken verdi b har.
Tangeringspunktet er $(b, 3b)$
og tangenten er : $y = 3x$