

Eksamen

10.11.2021

REA3022 Matematikk R1



Se eksamenstips på baksiden!

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	<p>Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.)</p> <p>Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.</p> <p>Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.</p>
Informasjon om oppgaven	<p>Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.</p> <p>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen.</p> <p>Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.</p>
Kilder	<p>Rulett: Ralf Roletschek. Lisens: CC BY-SA 3.0</p> <p>Alle andre grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet</p>
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \ln x + x^2 + 2$

b) $g(x) = (x^2 + 2)^7$

c) $h(x) = 3x \cdot e^{2x}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a) $\frac{2x+2}{x^2-x} - \frac{2x+2}{x^2-1} + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+x}$

b) $\ln(4x) + 3\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \ln(2x^2)$

Oppgave 3 (6 poeng)

Punktene $A(2, 2)$, $B(6, 1)$, $C(6, 5)$ og $D(2, 6)$ er gitt.

Linjen ℓ går gjennom A og C , og linjen m går gjennom B og D .

a) Bestem en parameterframstilling for ℓ og en parameterframstilling for m .

b) Bestem ved regning skjæringspunktet mellom ℓ og m .

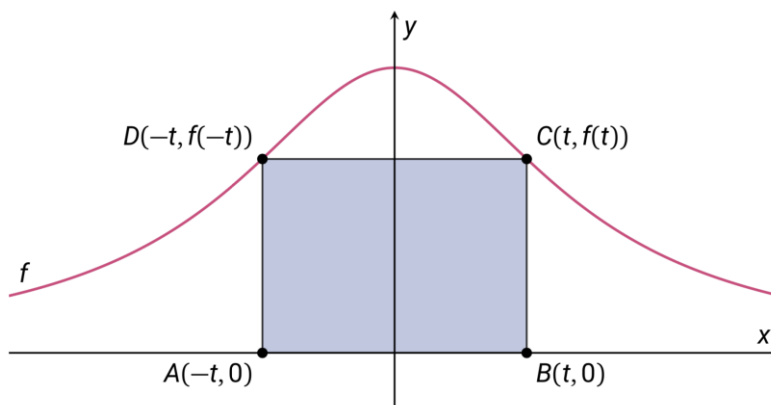
c) Avgjør om ℓ og m står normalt på hverandre.

Oppgave 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 4}$$

Et rektangel $ABCD$ er gitt ved $A(-t, 0)$, $B(t, 0)$ og at punktene C og D ligger på grafen til f , slik figuren nedenfor viser. Her er $t > 0$.



Hva er det største arealet rektangelet kan ha?

Oppgave 5 (3 poeng)

Nedenfor er det gitt noen utsagn. Avgjør hvilket av symbolene \Leftarrow , \Rightarrow eller \Leftrightarrow som skal stå i hver av de to rutene. Husk å begrunne svarene.

a) $\lg x^2 = 2$ $x = 10$

b) $x^2 - 2x < 0$ $x \in (0, 1)$

Oppgave 6 (6 poeng)

Siv, Audun og fire venner skal gå hånd i hånd i ring rundt juletreet.

a) Begrunn at det er 120 ulike måter de seks kan plassere seg på i ringen.

Siv er hemmelig forelsket i Audun.

b) Bestem sannsynligheten for at hun får holde Audun i hånden dersom plasseringene i ringen er tilfeldige.

Etter at de har gått rundt juletreet, skal de ta et bilde. De skal stille seg ved siden av hverandre på en linje.

c) Bestem sannsynligheten for at Audun og Siv får stå ved siden av hverandre på bildet dersom de blir plassert tilfeldig.

Oppgave 7 (8 poeng)

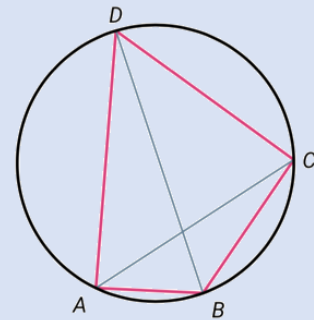
En firkant som kan innskrives i en sirkel, kaller vi en *syklisk firkant*.

Ptolemaios' setning

I en syklisk firkant er produktet av lengdene til de to diagonalene lik summen av produktene av lengdene til de motstående sidene.

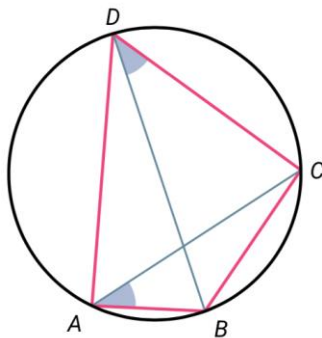
I firkanten $ABCD$ på figuren er

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

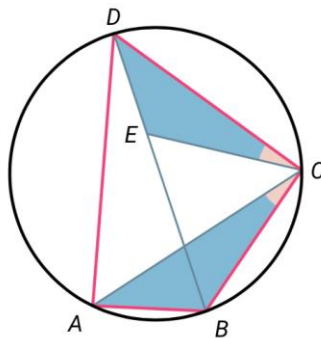


Vi skal i denne oppgaven bevise Ptolemaios' setning.

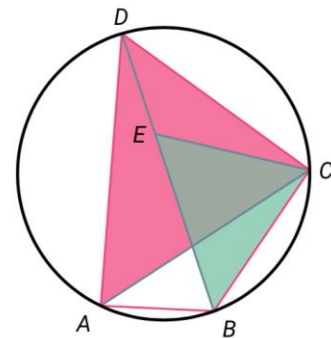
La $ABCD$ være en syklisk firkant, som vist på figur 1 nedenfor.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

a) Forklar at $\angle BAC = \angle BDC$.

Plasser punktet E på BD slik at $\angle DCE = \angle ACB$. Se figur 2.

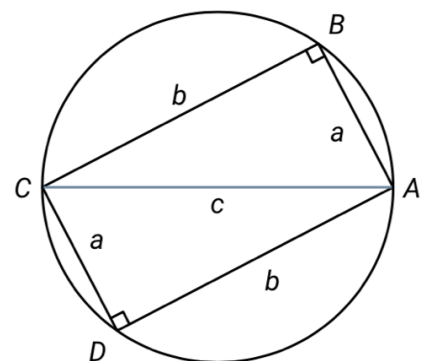
b) Forklar at $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Bruk dette til å vise at $ED \cdot AC = AB \cdot DC$

c) Forklar at $\triangle ACD \sim \triangle BCE$. Bruk dette til å vise at $BE \cdot AC = BC \cdot AD$

d) Bruk resultatene fra oppgave b og c til å vise at

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

e) Bruk Ptolemaios' setning og figuren til høyre til å bevise Pytagoras' setning.



Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Posisjonsvektoren \vec{r} til en partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{t^2+2t}{t^2+1} \right], \quad -10 \leq t \leq 10$$

Her er enheten langs aksene meter, og t er målt i sekunder.

- Tegn grafen til \vec{r} .
- Ved hvilket tidspunkt var farten til partikkelen størst?
- Ved hvilke tidspunkt beveget partikkelen seg parallelt med x -aksen?

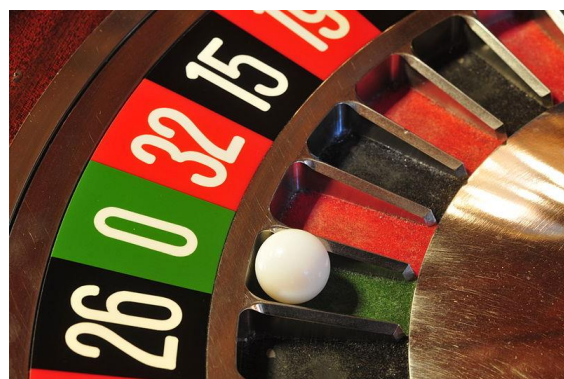
Oppgave 2 (7 poeng)

Når vi spiller med et ruletthjul, havner en kule på et av 37 tall. Av disse tallene er 18 røde, 18 svarte og ett grønt. Sannsynligheten er den samme for at kulen havner på hvert av de 37 tallene.

- Bestem sannsynligheten for at kulen havner på det grønne tallet i minst 1 av 10 spilleomganger.
- Hvor mange ganger må vi minst spille med ruletthjulet dersom sannsynligheten for at kulen skal havne på det grønne tallet minst 1 gang, skal være mer enn 50 prosent?
- Forklar hvordan du kan komme fram til at sannsynligheten er $p \approx 0,151$ for at kulen havner på et rødt tall i minst 7 av 10 spilleomganger.

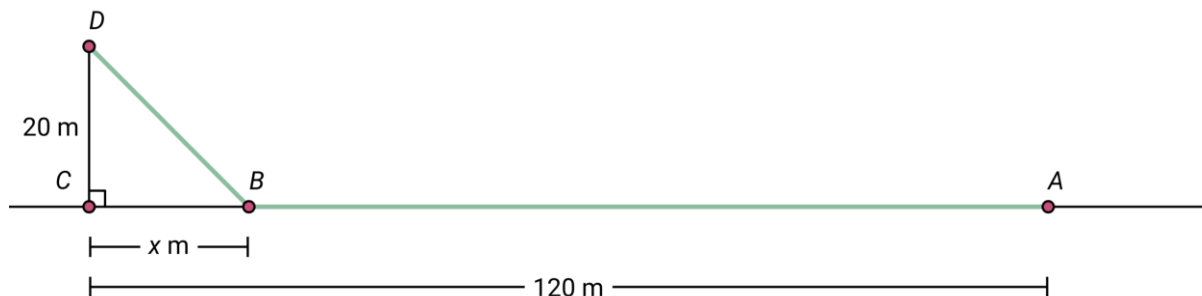
Åtte venner skal spille med ruletthjulet. Alle spiller 10 ganger hver.

- Bestem sannsynligheten for at nøyaktig 3 av dem får rødt tall i minst 7 av de 10 spilleomgangene.



Oppgave 3 (6 poeng)

Terje skal lage en grøft som han skal legge et rør i. Grøften skal starte i punktet A ved en rettlinjert vei og ende ved en hytte i punktet D , slik figuren nedenfor viser. Avstanden fra D til punktet C på veien er 20 meter. Punktet C er 120 meter fra A .



Et firma tar 800 kroner per meter for å lage grøft langs veien og 1500 kroner per meter for å lage grøft i terrenget. De graver grøften fra A til et punkt B langs veien. Så går de rett mot hytten fra B til D .

Sett $BC = x$ m.

- a) Vis at prisen P som Terje må betale for grøften, er gitt ved

$$P(x) = 96000 - 800x + 1500\sqrt{x^2 + 400}$$

- b) Hvor må Terje sette punktet B for at prisen for grøften skal bli lavest mulig?
Hva er den laveste prisen?

Et annet firma oppgir andre priser for å lage grøften. De tar 1000 kroner per meter for å lage grøft langs veien. I et tilbud oppgir de at den billigste løsningen er å plassere B 10 meter fra C .

- c) Hvor mye tar dette firmaet per meter for å lage grøft i terrenget?

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 2b \cdot x^2 + (b^2 + 3) \cdot x, \quad b \in \mathbb{R}$$

- a) Forklar at f kun har ett nullpunkt, uavhengig av verdien av b .
- b) For hvilke verdier av b har grafen til f både toppunkt og bunnpunkt?
- c) Vis at grafen til f tangerer linjen $y = 3x$ uavhengig av hvilken verdi b har.
Bestem koordinatene til tangeringspunktet.