

Eksamens R1

Høst 2022

Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (3p.)

- a) En fjerdegradsfunksjon er ikke strengt voksende eller synkende i hele \mathbb{R} , den vil starte og slutte på samme side av x -aksen.

Vi vet også at det finnes x -verdier som har samme y -verdi, f.eks er $f(1) = f(-1) = 1$

Vi kan derivere funksjonen og se at den har et ekstremalpunkt i intervallet R .

$$\begin{aligned}f(x) &= x^4 \\f'(x) &= 4x^3 \\f'(x) = 0 &\Rightarrow x = 0 \\f'(-1) = -4 &\text{ grafen synker} \\f'(1) = 4 &\text{ grafen stiger}\end{aligned}$$

Funksjonen har et bunnpunkt når $x = 0$, da er den ikke strengt synkende eller voksende, altså har den ikke en omvendt funksjon.

b) $g(x) = e^{-(x-2)^2}$, $D_g = [2, \rightarrow)$

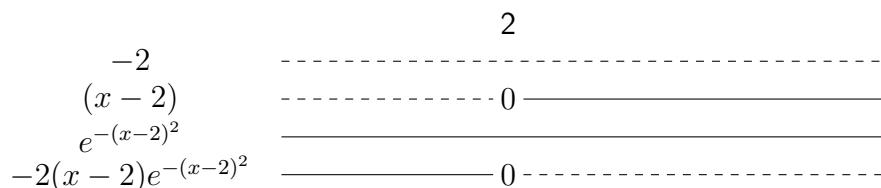
Deriverer funksjonen

$$\begin{aligned}g(x) &= e^{-(x-2)^2} \\g'(x) &= -2(x-2)e^{-(x-2)^2}\end{aligned}$$

$e^{-(x-2)^2}$ er alltid positiv.

Siden $-2(x-2)$ alltid er negativ når $x > 2$ vil $g(x)$ være strengt synkende i hele intervallet, altså har den en omvendt funksjon.

Tegner fortegnslinje for $g'(x)$, og ser at $g(x)$ er strengt voksende i intervallet.



Kommentarer fra sensorveiledningen:

Kandidater som skriver at funksjonen er strengt avtagende, men ikke argumenterer for dette, kan få 1 poeng.

Oppgave 2 (2p.)

Bestemmer grenseverdien

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} \\ &= \frac{(4+0)^2 - 4^4}{0} = 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h+4)(4+h-4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+8)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h + 8 \\ &= 8\end{aligned}$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Kandidater som multipliserer ut telleren, men gjør en liten algebraisk feil kan få 1 poeng. Det gis full uttelling for kandidater som identifiserer grensen som den deriverte til $f(x) = x^2$ i $x = 4$ og får 8 som svar.

Oppgave 3 (2p.)

$$\begin{aligned}3\sqrt{11} &= \sqrt{9}\sqrt{11} \\&= \sqrt{99} \\&\sqrt{99} < \sqrt{100} \\&\text{altså er } 3\sqrt{11} < 10 \\&\quad \text{mindre}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10 \lg 9 &< 10 \lg 10 \\&< 10 \\&\text{altså er } 10 \lg 9 < 10 \\&\quad \text{mindre}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5 \ln 9 &= 5 \cdot \ln 3^2 \\&= 10 \cdot \ln 3 \\&\ln 3 > \ln e \\&\ln 3 > 1 \\&10 \cdot \ln 3 > 10 \\&\text{altså er } 5 \ln 9 > 10 \\&\quad \text{større}\end{aligned}$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Det gis ingen uttelling for bare rett svar. Det gis 1 poeng om kandidaten har argumentert rett for ett av tallene.

Oppgave 4 (3p.)a) Vis at $\angle APB = 90^\circ$.

$$\overrightarrow{PA} = [1 - 5, 1 - 9] = [-4, -8] = -4[1, 2]$$

$$\overrightarrow{PB} = [9 - 5, 7 - 9] = [4, -2] = 2[2, -1]$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = [1, 2] \cdot [2, -1] = 2 - 2 = 0$$

$$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$$

Skalarproduktet er null, altså er $\angle APB = 90^\circ$, som vi skulle vises.

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Det gis ingen uttelling om kandidaten kun tegner opp trekanten og «ser» at vinkelen er 90°

b)

$$\overrightarrow{AB} = [9 - 1, 7 - 1] = [8, 6] = 2[4, 3]$$

$$\vec{r}_l = [4, 3]$$

Linjen : $l(t) = [5 + 4t, 9 + 3t]$

$Q = (5 + 4t, 9 + 3t)$ fordi Q ligger på l

$$\overrightarrow{QA} = [1 - (5 + 4t), 1 - (9 + 3t)]$$

$$= [-4 - 4t, -8 - 3t] = -[4 + 4t, 8 + 3t]$$

$$\overrightarrow{QB} = [9 - (5 + 4t), 7 - (9 + 3t)]$$

$$= [4 - 4t, -2 - 3t] = -[-4 + 4t, 2 + 3t]$$

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = [4 + 4t, 8 + 3t] \cdot [-4 + 4t, 2 + 3t]$$

$$= (4 + 4t)(-4 + 4t) + (8 + 3t)(2 + 3t)$$

$$= 16t^2 - 16 + 16 + 24t + 6t + 9t^2$$

$$= 25t^2 + 30t$$

$$= 5t(5t + 6)$$

$$\overrightarrow{QA} \perp \overrightarrow{QB} \Rightarrow \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 0$$

$$t = 0 \vee t = -\frac{6}{5}$$

$$t = -\frac{6}{5}$$

$$Q = \left(5 + 4\left(-\frac{6}{5}\right), 9 + 3\left(-\frac{6}{5}\right) \right)$$

$$= \left(5 - \frac{24}{5}, 9 - \frac{18}{5} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{5}, \frac{27}{5} \right)$$

$$t = 0 \Rightarrow P = (5, 9)$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Det gis 1 poeng dersom kandidaten har en framgangsmåte som kan fungere. Dersom kandidaten i tillegg klarer å bestemme koordinatene Q til gis det til sammen 2 poeng.

Oppgave 5 (3p.)

Marianne har skrevet følgende program:

```

1 def f(x):
2     return (6*x-3)/(x-1)      # Definerer funksjonen f(x) = (6x-3)/(x-1)
3
4 h = 0.00001
5 def Df(x):
6     return (f(x+h)-f(x))/h
7
8 a = 1.5                      # En startverdi
9 while Df(a)< -3:
10    a = a+0.001
11
12 b = f(a) - Df(a)*a          # Regner ut konstantleddet
13
14 print("y = -3x +", b)

```

Bestem verdien av variabelen som defineres på linje 12.

$Df(x)$ finner hvilken x -verdi som gir den deriverte lik -3 :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{(6x-3)}{x-1} \\
 f'(x) &= \frac{6(x-1) - (6x-3)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{6x-6-6x+3}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{-3}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{-3}{(x-1)^2} = -3$$

$$(x-1)^2 = 1$$

$$x-1 = \pm 1$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

($x=0$ er ikke gyldig løsning siden $x > 1.5$)

$$x = 2$$

$$f(2) = \frac{(6 \cdot 2 - 3)}{2 - 1} = 9$$

$$(2, f(2)) = (2, 9)$$

Da vet vi at i punktet $(2, 9)$, er stigningstallet til tangenten -3 .

Vi skal finne likningen til tangenten som har -3 som stigningstall.

Ett punktformelen gir oss :

$$\begin{aligned}y - y_0 &= a(x - x_0) \\y &= a \cdot x - a \cdot x_0 + y_0 \\y &= a \cdot x + (y_0 - a \cdot x_0) \\b &= y_0 - a \cdot x_0 \\(x_0, y_0) &= (2, 9) \\b &= 9 - (-3) \cdot 2 = 9 + 6 \\b &= 15\end{aligned}$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

For å løse oppgaven må kandidaten :

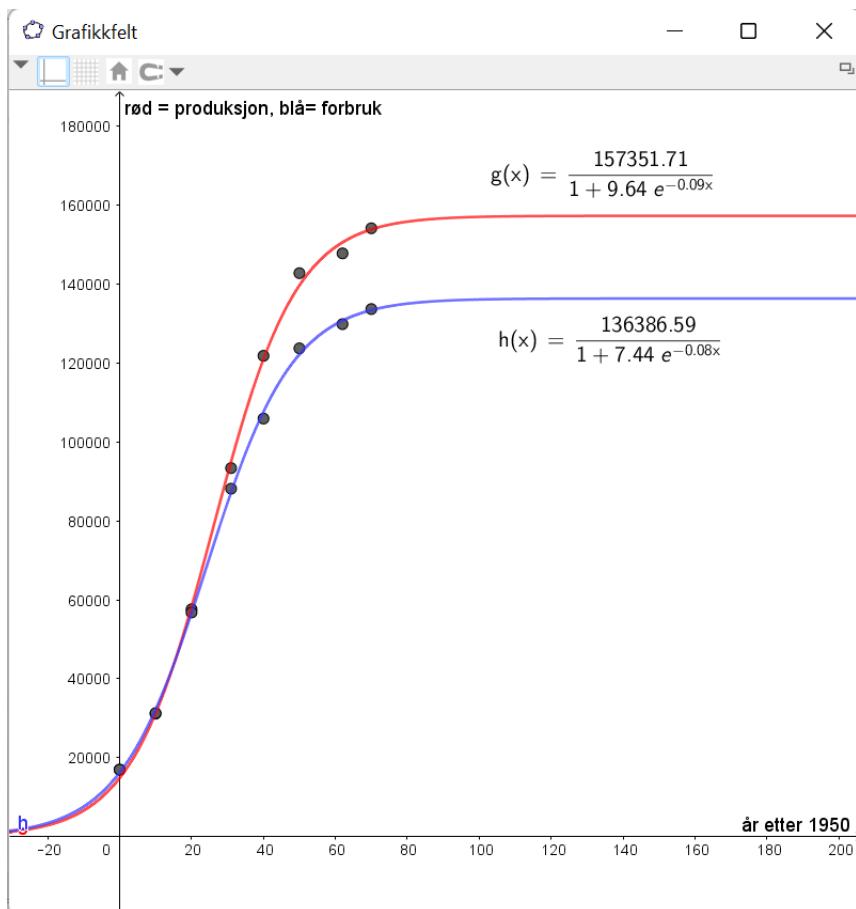
- vise forståelse for hva programmet regner ut
- klare å derivere og bestemme når den deriverte er -3
- bestemme verdien til b .

De tre poengene fordeles likt på de tre kulepunktene.

DEL 2**Oppgave 1 (6p.)**

- a) Legger tallene fra tabellen inn i regnearket Geogebra, velger regresjonsanalyse og lager en logistisk modell for produksjonen av elektrisk energi i Norge. Da får vi funksjonen

$$g(x) = \frac{157351,7}{1 + 9,64e^{-0,09x}}$$



Kommentarer fra sensorveiledningen:

Det gis full uttelling dersom kandidaten har funnet en logistisk modell ved hjelp av regresjon og at denne løsningen er godt kommunisert (for eksempel med skjermbilder eller beskrivelse av framgangsmåte). Kun riktig modell (uten beskrivelse av framgangsmåte) kan gi 1 poeng.

b)

$g(x)$ er strengt voksende fordi det er en logistisk modell. Da er veksten raskest i vendepunktet : $g''(x) = 0 \Rightarrow x = 25,2$,
det vil si at produksjonen øker mest ca. 25 år etter 1950, altså i 1975.
(ved bruk av flere desimaler kan dette endre seg til 1976)

c)

Logistisk modell passer også her best til verdiene i tabellen over forbruket av elektrisk

energi. (Bruker regresjon)

Ser at den ligger godt under den forventede produksjonen, altså vil vi være selvforsynte på sikt.

På sikt vil vi produsere ca. 21.000 GWh mer enn vi forbruker.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 157.303$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 136.387$$

Det er selvfølgelig store usikkerheter knyttet til dette, vi skal redusere utslipp ved produksjon av energi, og da vil vi kanskje kunne produsere mindre. Samtidig skal vi innføre tiltak for å redusere bruken av energi.

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Det gis 1 poeng dersom kandidaten klarer å bestemme en fornuftig modell. Det gis i tillegg 1 poeng dersom kandidaten argumenterer godt for modellen.

Oppgave 2 (4p.)

Når du bruker blitsen på et fotokamera, vil batteriet lade den opp igjen. Ladningen Q i blitsen t sekunder etter at den går av, er gitt ved

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-2,3t}), \quad t \geq 0$$

Her er Q_0 den maksimale ladningen i blitsen.

- a) Bestem den omvendte funksjonen til Q .
- b) Hvor lang tid tar det før blitsen har fått 90 prosent av den maksimale ladningen?

a)

Q = ladningen etter t sekunder, Q_0 er maksimal ladning.

Finner t uttrykt ved Q (invers funksjon).

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0(1 - e^{-2,3t}) \\ \frac{Q}{Q_0} &= 1 - e^{-2,3t} \\ e^{-2,3t} &= 1 - \frac{Q}{Q_0} \\ -2,3t &= \ln\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) \\ t(Q) &= -\frac{1}{2,3} \ln\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right) \end{aligned}$$

Det vil si at den omvendte funksjonen til

$$Q(x) = Q_0(1 - e^{-2,3t}), \quad [0, Q_0]$$

Definisjonsområdet er fra helt utladet $Q = 0$ til fulladet $Q = Q_0$

$$t(Q) = -\frac{1}{2,3} \ln\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)$$

Kommentarer fra sensorveilederen:

Det gis 1 poeng for rett strategi for å bestemme den omvendte funksjonen og 1 poeng for å finne den.

b)

Når blitsen er 90 prosent oppladet er $Q = 0,9 \cdot Q_0$

$$t(0,9 \cdot Q_0) = -\frac{1}{2,3} \ln\left(1 - \frac{0,9Q_0}{Q_0}\right) = 1,00011$$

dvs. at blitsen er 90 prosent ladet etter ca. 1 sekund.

	$t(Q) := -1/(2.3) \ln(1-Q/Q_0)$
5	$\rightarrow t(Q) := \frac{-10}{23} \ln\left(\frac{-Q}{Q_0} + 1\right)$
6	$t(0.9 Q_0)$
	≈ 1.0011

Oppgave 3 (3p.)

$$A = (0, 0), B = (9, 1), C = (24, 10)$$

$$l : [12t, 5t], t > 0$$

a)

► CAS	
1	A:=(0,0)
●	→ A := (0, 0)
2	B:=(9,1)
●	→ B := (9, 1)
3	C:=(24,10)
●	→ C := (24, 10)
4	I(t):=(12 t,5 t)
●	→ I(t) := (12 t, 5 t)
5	Løs(C=I(t))
○	→ {t = 2}

Setter inn koordinatene til C i parameterframstillingen til linja :

$$12t = 24 \Rightarrow t = 2$$

$$5t = 10 \Rightarrow t = 2$$

Lik t-verdi, altså ligger C på linja.

b)

6	AB:=Vektor(A,B)
●	→ AB := $\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$
7	AC:=Vektor(A,C)
●	→ AC := $\begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix}$
8	Vinkel(AB,AC)/°
○	≈ 16.28

Siden a ligger i origo får vi at :

Altså er vinkelen $\angle BAC = 16,3^\circ$.

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Kandidater som løser oppgaven ved å tegne inn punktene i et koordinatsystem og så måler vinklene (enten med gradskive eller med et verktøy i for eksempel GeoGebra) får ingen uttelling. Dersom kandidaten finner feil vinkel, for eksempel ved å se på skalarproduktet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, kan det gis 1 poeng.

c)

$$D = (12t, 5t)$$

$$\overrightarrow{DA} = [0 - 12t, 0 - 5t] = [-12t, -5t]$$

$$\overrightarrow{DB} = [9 - 12t, 1 - 5t]$$

$$\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = [-12t, -5t] \cdot$$

► CAS	
1	A:=(0,0) → A := (0, 0)
2	B:=(9,1) → B := (9, 1)
3	C:=(24,10) → C := (24, 10)
4	I(t):=(12 t,5 t) → I(t) := (12 t, 5 t)
5	Løs(C=I(t)) → {t = 2}

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Det gis 1 poeng dersom ideen er rett, men det er satt opp for eksempel feil skalarprodukt (som for eksempel $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$)

d)

Finner \overrightarrow{BE} uttrykt ved t .

Finner arealet med arealsetningen $F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AE}| \cdot \sin(\angle(AB, AE))$
 løser likingen der arealet $F = 11 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$.

Da får vi at

$$\begin{aligned} E &= (12t, 5t) \\ &= \left(4, \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Dersom kandidaten finner tilnærmet verdi, kan det gis 1 poeng.

Oppgave 4 (3p.)

a)

Påstand : Hvis $f(a) = f(b)$ for en funksjon f , så er $a = b$.

Påstanden er ikke sann. 2 ulike x-verdier kan ha samme y-verdi, f.eks. nullpunktene til en 2.gradsfunksjon.

b)

Påstand : Hvis $0 < a < b$ så er $\ln a < \ln b$.

Påstanden er sann fordi grafen til $\ln x$ er strengt voksende i hele intervallet.

c)

Påstand : Hvis $a > 0$ og $x > 0$, så er $(\ln x)' = (\ln(a \cdot x))'$

Påstanden er sann.

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= (\ln(a \cdot x))' \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{ax} \cdot (ax)' \\ \frac{1}{x} &= \frac{a}{ax} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} \text{ altså sann.}\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}(\ln(a \cdot x))' &= (\ln a + \ln x)' \\ &= \ln x \text{ altså sann.}\end{aligned}$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

For å få uttelling, må kandidaten begrunne svarene.

Oppgave 5 (5p.)

$$f(x) = 1 - x^2, \quad D_f = [0, 1]$$

a) $P = \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

Finner stigningstallet til tangenten:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x^2 \\ f'(x) &= -2x \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

Likningen til tangenten :

$$y = -2x + b$$

Finner konstantleddet ved å sette inn kjent punkt $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= -1 \cdot \frac{1}{2} + b \\ b &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Likningen til tangenten : $t(x) = -x + \frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} t(x) &= -x + \frac{5}{4} \\ t(x) &= 0 \\ x &= \frac{5}{4} \\ T(0) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Da blir arealet :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{1 \cdot 5^2}{2 \cdot 4^2} \\ &= \frac{25}{32} \end{aligned}$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

En grafisk løsning med for eksempel GeoGebra kan gi full uttelling.

b)

Finner tangenten $T(x)$ i punktet $P(a, f(a))$

$$\begin{aligned} t(x) &:= \text{tangent}(a, f) \\ &\rightarrow -2ax + a^2 + 1 \end{aligned}$$

Finner nullpunktet til linja, dette er grunnlinjen i trekanten :

$$\begin{aligned} t(x) &= 0 \\ &\rightarrow x = \frac{a^2 + 1}{2a} \end{aligned}$$

Finner skjæringspunkt mellom linja og y-aksen, dette er høyden i trekanten :

$$\begin{aligned} t(0) & \\ &\rightarrow a^2 + 1 \end{aligned}$$

Finner et uttrykk for arealet til trekanten :

$$A(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 1}{2x} \cdot (x^2 + 1)$$

Finner når arealet er minst:

$$\begin{aligned} Løs(A'(x) = 0) & \\ &\rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Trekanten har minst areal når $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, da er arealet : Areal = $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Det kan gis 1 poeng for å finne rett uttrykk for tangenten, 1 poeng for å finne et generelt uttrykk for arealet til trekanten og 1 poeng for å bestemme det minste arealet. Kandidater som utforsker situasjonen og kommer fram til det rette svaret, for eksempel ved å flytte på tangeringspunktet, kan få 2 poeng.

Oppgave 6 (2p.)

Kommentarer fra sensorveiledningen:

Kandidaten behøver ikke å bruke input-funksjon for å få full uttelling. Dersom grunnideen i koden er korrekt, men har noen små mangler, kan det gis 1 poeng.

```
1  xA=int(input("x-koordinat til A = "))
2  yA=int(input("y-koordinat til A = "))
3  xB=int(input("x-koordinat til B = "))
4  yB=int(input("y-koordinat til B = "))
5  xC=int(input("x-koordinat til C = "))
6  yC=int(input("y-koordinat til C = "))
7
8
9  xT=1/3*(xA+xB+xC)
10 yT=1/3*(yA+yB+yC)
11
12 print(f"Koordinatene til tyngdepunktet er : T({xT:.2f},{yT:.2f})")
13
```

Running: R1-ex-22-h-2-6.py

```
x-koordinat til A = 1
y-koordinat til A = 3
x-koordinat til B = 2
y-koordinat til B = 4
x-koordinat til C = 3
y-koordinat til C = 1
Koordinatene til tyngdepunktet er : T(2.00,2.67)
>>>
```

Oppgave 7 (10p.)

a) Løser likningen $f'(x) = k$ i CAS.

Ser at løsningen ikke er gyldig for $k = 2$, fordi vi ikke kan dele på null.

Den er heller ikke gyldig dersom vi får negativ verdi under rottegnet, $k < 2$.

Atså er gydighetsområdet $k < 2$

Hvis vi ser på den opprinnelige funksjonen vil heller ikke $x = 1$ være gyldig verdi. Vi kan ikke finne den deriverte i et punkt som ikke eksisterer.

The screenshot shows a CAS interface with two steps:

- Step 1:** Shows the function $f(x) := 2x + 5 + 1/(x-1)$ and its derivative $f'(x) := 2x + 5 + \frac{1}{x-1}$.
- Step 2:** Shows the equation $f'(x) = k$ and its solution:
$$\left\{ x = \frac{k-2 - \sqrt{-k+2}}{k-2}, x = \frac{k-2 + \sqrt{-k+2}}{k-2} \right\}$$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

7a) - En begrunnelse ut fra egenskaper til grafen til f kan gis full uttelling. En løsning med CAS der det argumenteres ut fra at $2 - k$ står under rottegn, kan også gis full uttelling. Dersom kandidaten argumenterer ut fra grafen til den deriverte, kan det gis full uttelling.

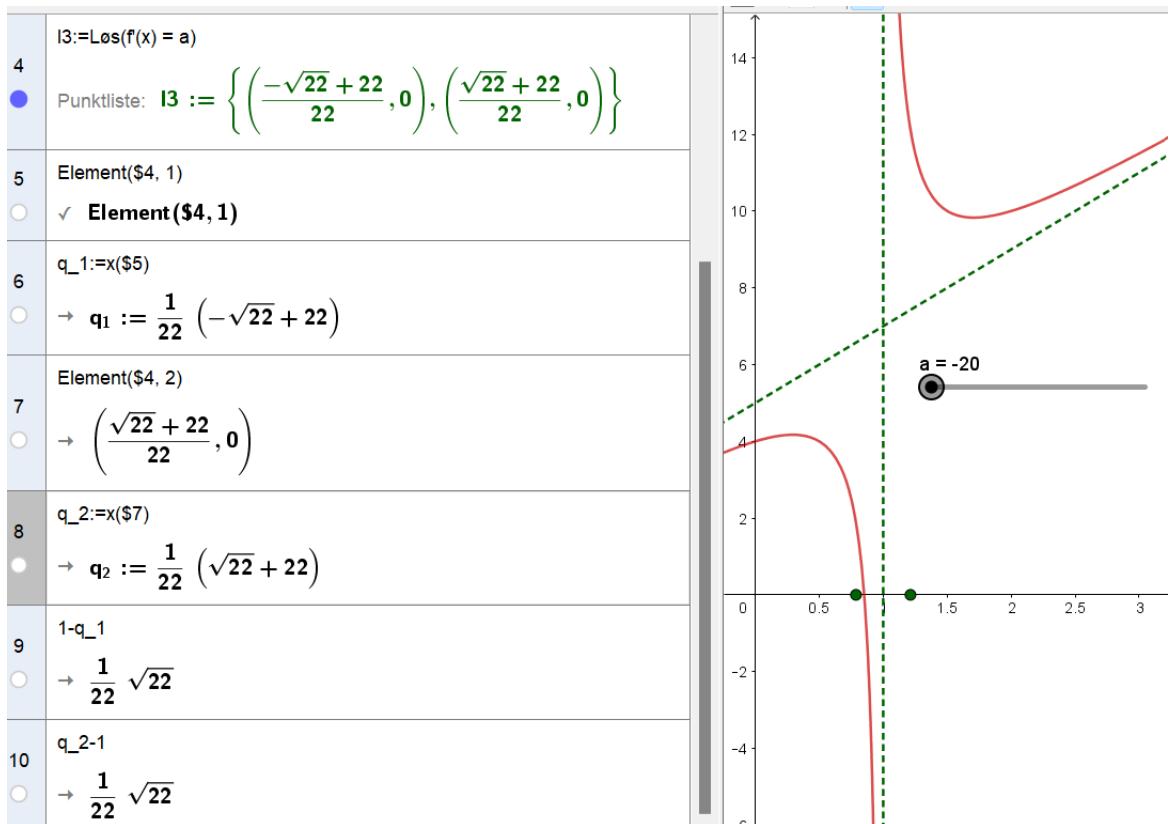
- b) Legger inn noen ulike verdier for k ved hjelp av en glider
(fra -10 til 2 , step 1/2) (Linje 4)

Observerer at de to løsningene ser ut til å være like langt fra den vertikale asymptoten $x = 1$ på hver sin side, uansett hvilken verdi jeg velger for a .

Legger inn formler i CAS for å sjekke at min hypotese er riktig, og det er den (hvertfall for de verdiene jeg tester) (Linje 9-10)

$$f'(x) = k :$$

Avstanden fra q_1 og q_2 til $x = 1$ (vertikal asymptote) er like stor for alle verdier av k , og er på formen $\frac{\sqrt{r}}{r}$



Systematiserte verdiene i en tabell for å få oversikt :

k	q_1	q_2	$1 - q_1$	$q_2 - 1$	r
$\frac{3}{2}$	$-\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	2	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{6}+3}{3}$	$\frac{\sqrt{6}+3}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{3}{2}$
0	$\frac{-\sqrt{2}+2}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+2}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2
-1	$\frac{-\sqrt{3}+3}{3}$	$\frac{\sqrt{3}+3}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	3
-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
-3	$\frac{-\sqrt{5}+5}{5}$	$\frac{\sqrt{5}+5}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	5

Kommentarer fra sensorveiledningen:

7b) - Det gis 1 poeng for rett framgangsmåte og 1 poeng for å finne symmetrien. Kandidater som klarer å løse oppgaven direkte ved å bruke generell verdi for k , kan få full uttelling.

c)

T	
1	$g(x) := a x + b + 1/(x+d)$
2	$\rightarrow g(x) := a x + b + \frac{1}{d+x}$ $Løs(g'(x)=4)$ $\rightarrow \left\{ x = \frac{-(\sqrt{a-4} d + 1)}{\sqrt{a-4}}, x = \frac{-(a-4) d + \sqrt{a-4}}{a-4} \right\}$

Ser at disse løsningene er gyldige for $a > 4$, når $k = 4$.

Ser også at løsningene er uavhengige av b , det er fordi b forsvinner i derivasjonen.

(I Oppg. a) var $k < 2$, der $a = 2$. Det kan være en sammenheng : $k < a$)

Kommentarer fra sensorveiledningen:

7 c) - Det gis full uttelling for en argumentasjon basert på egenskapene til grafen til g (skråasymptote). En løsning med CAS der det argumenteres ut fra at $a - 4$ står under rottegn, kan også gis full uttelling.

d)

	$h(x) := 3x + b + 1 / (d + x)$
3	$\rightarrow h(x) := b + 3x + \frac{1}{d+x}$
	Løs($h'(x)=c$)
4	$\rightarrow \left\{ x = -d - \frac{\sqrt{7}}{7}, x = -d + \frac{\sqrt{7}}{7} \right\}$

Asymptoten vil her være $x = -d$

Kommentarer fra sensorveiledningen:

7d) - Det kan gis 1 poeng for selve utforskingen og 1 poeng for rett konklusjon.

e)

Kommentarer fra sensorveiledningen:

7e) - Det kan gis 1 poeng for å finne rette verdi for d og 1 poeng for rette verdi for b .

Skriver inn forutsetningene fra oppgaven og løser som likningssett i CAS.

$$\underline{b = 5} \text{ og } \underline{d = -2}$$

	$h'(-1)=h'(5)$
5	$\rightarrow \frac{3d^2 - 6d + 2}{d^2 - 2d + 1} = \frac{3d^2 + 30d + 74}{d^2 + 10d + 25}$
	$h(1)=7$
6	$\rightarrow b + 3 + \frac{1}{d+1} = 7$
7	$\{\$5, \$6\}$
	Løs: $\{\{b = 5, d = -2\}\}$

Oppsummering av oppgave 7

$$f(x) = 2x + 5 + \frac{1}{x - 1}$$

Skrå asymptote : $y = 2x + 5$

Vertikal asymptote : $x = 1$

$$f'(x) = k \Rightarrow k < 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{1}{(x-1)^2} = k \\ 2 - \frac{1}{(x-1)^2} &= k \\ x &= \frac{k-2 \pm \sqrt{-k+2}}{k-2} \\ x &= \frac{-k+2 \pm \sqrt{-k+2}}{-k+2} \end{aligned}$$

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{1}{x+d}$$

Skrå asymptote : $y = ax + b$

Vertikal asymptote : $x = -d$

$$f'(x) = k \Rightarrow a > 4$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a - \frac{1}{(x+d)^2} = 4 \\ a - \frac{1}{(x+d)^2} &= 4 \\ x &= \frac{-d(a-4) \pm \sqrt{a-4}}{a-4} \end{aligned}$$

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{1}{x+d}$$

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{1}{x+d}$$

Skrå asymptote : $y = ax + b$

Vertikal asymptote : $x = -d$

$$f'(x) = k \Rightarrow k < a$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a - \frac{1}{(x+d)^2} \\ x &= \frac{-d(a-k) \pm \sqrt{a-k}}{a-k} \end{aligned}$$

Veiledende karaktergrenser

Karakter	1	2	3	4	5	6
Poeng		10	20	30	37	46