Eksamen R1 - Ny læreplan
Vår 2022
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (2 poeng)

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + \ln x \\ f'(x) &= 3x^2 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= x \cdot e^{2x} \\ g'(x) &= 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 \\ &= e^{2x} + 2xe^{2x} \\ &= e^{2x}(1 + 2x) \end{aligned}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

$$\begin{aligned} e^{2x} - e^x &= 2 \\ (e^x)^2 - e^x - 2 &= 0 \\ e^x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 3}{2} \\ e^x = \frac{4}{2} &\vee e^x = \frac{-2}{2} \\ e^x = 2 &\vee e^x = -1 \\ \underline{\underline{x = \ln 2}} &\vee \text{(ikke gyldig løsning)} \end{aligned}$$

Oppgave 3 (1 poeng)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+x-12} &= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+4)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+4}\\ &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

Oppgave 4 (3 poeng)

$A(1,2)$, $B(-1,5)$, $C(t,4)$

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [-1-1, 5-2] = [-2,3]\\ \overrightarrow{AC} &= [t-1, 4-2] = [t-1,2]\\ \angle BAC &= 90^\circ\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= 0\\ [-2,3]\cdot[t-1,2] &= 0\\ -2(t-1)+6 &= 0\\ -2t &= -8\\ t &= 4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&||\overrightarrow{AC}\\ k\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC}\\ k\cdot[-2,3] &= [t-1,2]\\ -2k = t-1 &\wedge 3k = 2\\ k &= \frac{2}{3}\\ -2\cdot\frac{2}{3} &= t-1\\ t &= 1-\frac{4}{3}\\ t &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Oppgave 5 (4 poeng)

a)
I første runde er x=0, så beregnes f(0)
i neste runde økes x med 0,001, til x=0,001, så beregnes f(0,001)
dette gjentas så lenge $f(x) \leq f(x+h)$
det betyr at løkken går så lenge f(x) øker, og bryter når vi har funnet et toppunkt.

b)
Vi kan finne toppunktet ved regning :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{1+x^2} \\
f'(x) &= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\
f'(x) &= 0 \\
1-x^2 &= 0 \\
x &= \pm 1
\end{aligned}$$

Programmet starter på $x = 0$, og vil kjøre til $x = 1$, der har vi et toppunkt.

DEL 2

Oppgave 1 (4 poeng)

a)
En kontinuerlig funksjon henger sammen , det vil si at der den bytter mellom funksjonsuttrykkene må den befinne seg i samme punkt. Da vet vi at dersom f er en kontinuerlig funksjon må :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} x^2+1 &= \lim_{x\to 2^+} x-t\\ 5 &= 2-t\\ t &= -3\end{aligned}$$

b)
$f(x)$ er deriverbar i $x=2$ dersom funksjonen er kontinuerlig i $x=2$ OG

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$$

Finner den deriverte når $x \to 2$.

$f(x) = x^2+1 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

$f(x) = x+3 \Rightarrow f'(x) = 1$

De to ensidige grensene er ulike, dvs. ikke deriverbar når $x=2$.

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2^2 = 4$$
$$\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 3^2 = 9$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= -3 \\
|\vec{u}| &= |\vec{a} + \vec{b}| \\
&= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} \\
&= \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} \\
&= \sqrt{4 + 2 \cdot (-3) + 9} \\
&= \sqrt{4 - 6 + 9} = \sqrt{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{v}| &= |\vec{a} - 6\vec{b}| \\
&= \sqrt{\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 36\vec{b}^2} \\
&= \sqrt{4 - 12 \cdot (-3) + 36 \cdot 9} \\
&= \sqrt{364} = 2\sqrt{91}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 6\vec{b}) \\
&= \vec{a}^2 - 5 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b}^2 \\
&= 4 - 5 \cdot (-3) - 6 \cdot 9 \\
&= -35 \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \\
&= \frac{-35}{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{91}} \\
\alpha &= 2.34 = 134.1^\circ
\end{aligned}$$

Oppgave 3 (3 poeng)

a)
En funksjon har en invers funksjon dersom det er en én-til-én funksjon. Da må den stige eller synke i intervallet.

Denne funksjonen har ekstremalpunkter i $x = \pm\sqrt{2}$, mellom disse verdiene synker grafen, og her finner vi også $x = 1-$.

Det største intervallet $I \in [a, b]$ slik at $1 \in I$ og f har en omvendt funksjon er : $I \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Oppgave 4 (4 poeng)

FInner først k og r :

CAS

1 Løs(ln(y-22)=-k x+r,y)
→ $\{y = e^{-kx+r} + 22\}$

2 83 = e^(-k 0 + r) + 22
→ $83 = e^{r} + 22$

3 66 = e^(-k 2 + r) + 22
→ $66 = e^{-2k+r} + 22$

4 {$2, $3},{k=1,r=1}
NLøs: $\{k = 0.16, r = 4.11\}$

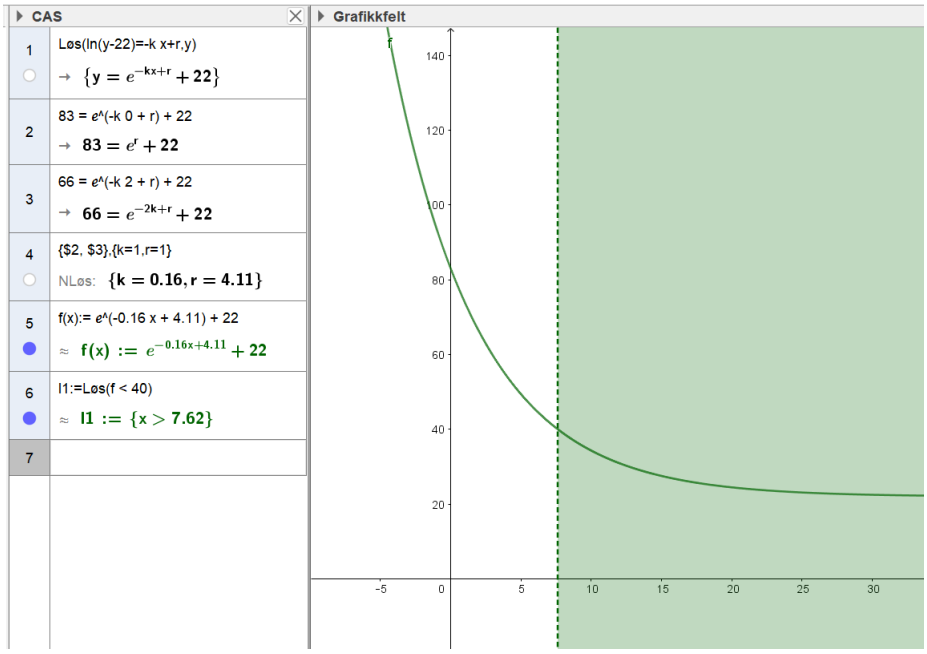
5 f(x):= e^(-0.16 x + 4.11) + 22
≈ $f(x) := e^{-0.16x+4.11} + 22$

Finner så hvor temperaturen kommer under 40 grader.

5 f(x):= e^(-0.16 x + 4.11) + 22
≈ $f(x) := e^{-0.16x+4.11} + 22$

6 Løs(f<40)
≈ $\{x > 7.62\}$

Temperaturen er under 40 grader etter ca.7,6 minutter.



Oppgave 5 (4 poeng)

a)
Algoritme

1. Dersom trekanten er rettvinklet vil et av skalarproduktene være null.
2. Leser inn koordinatene til de 3 punktene
3. regner ut skalarproduktene
4. Dersom ett av produktene er null - skriv Punktene danner en rettvinklet trekant"
5. Dersom ikke - skriv Punktene danner ikke en rettvinklet trekant"

b)
Program

1. import numpy as np
2. print Skriv inn koordinatene til punktene A, B og C."
3. AB=np.array([c-a,d-b])
4. AC=np.array([e-a,f-b])
5. np.dot(AB,AC)

Oppgave 6 (4 poeng))

1. Definerer funksjonen og punktene i CAS

2. Finner arealet av trekanten $\triangle ABP$ uttrykt ved s. $(F(s))$

3. Finner verdiene til s der arealet er størst eller minst, ved å sette $F'(s) = 0$

4. Oppgaven sier at $s \in \langle 1, 5 \rangle$, altså er den eneste gyldige verdien av $s = 2\sqrt{2} + 1$

5. Sjekker at dette er et toppunkt ved å se om $f''(s) > 0$ i dette punktet.

CAS

1	g(x):=x^3-3x^2-13 x+15 $\rightarrow g(x) := x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
2	P:=(s,g(s)) $\rightarrow P := (s, s^3 - 3s^2 - 13s + 15)$
3	A:=(1,0) $\rightarrow A := (1, 0)$
4	B:=(s,0) $\rightarrow B := (s, 0)$
5	AB:=Vektor(A,B) $\rightarrow AB := \begin{pmatrix} s-1 \\ 0 \end{pmatrix}$
6	AP:=Vektor(A,P) $\rightarrow AP := \begin{pmatrix} s-1 \\ s^3 - 3s^2 - 13s + 15 \end{pmatrix}$
7	F(s):=1/2*Vektorprodukt(AB, AP) $\rightarrow F(s) := \frac{1}{2}s^4 - 2s^3 - 5s^2 + 14s - \frac{15}{2}$
8	Løs(Derivert(F)=0) $\rightarrow \{s = -2\sqrt{2} + 1, s = 1, s = 2\sqrt{2} + 1\}$
9	{s = -2 sqrt(2) + 1, s = 1, s = 2sqrt(2) + 1} $\approx \{s = -1.83, s = 1, s = 3.83\}$

10	ss:=2*sqrt(2)+1 → $ss := 2\sqrt{2}+1$
11	F''(ss) → 32
12	F(ss) → -32

Det største arealet blir altså når $\underline{\underline{s = 2\sqrt{2}+1}}$, arealet er da $\underline{\underline{|F(2\sqrt{2}+1)| = 32}}$

Oppgave 7 (6 poeng))

a)

CAS

1 r(t):=Kurve(2+24 t, 4+20 t, t, 0, 10)
→ $\mathbf{r := (2 + 24\,t, 4 + 20\,t)}$

2 v(t):=Derivert(r(t))
→ $\mathbf{v(t) := (24, 20)}$

3 fart:=abs(v(t))
→ $\mathbf{fart := 4\sqrt{61}}$

Banefarten er $fart = 4\sqrt{61} = 31.24$

b)

Når tiden $t = 0$ er posisjonen til piratbåten $r_1(0) = [2, 4]$. Politibåten starter i $(0, 10)$

6 A:=(2,4)
≈ $\mathbf{A := (2, 4)}$

7 B := (0, 10)
≈ $\mathbf{B := (0, 10)}$

8 Løs(r1(t)=r2(s))
≈ $\mathbf{\{\{s = 0.18, t = 0.11\}\}}$

9 C:=(8,9)
≈ $\mathbf{C := (8, 9)}$

10 BC:=Vektor(B,C)
≈ $\mathbf{BC := \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}}$

11 Løs(r1(t)=C)
≈ $\mathbf{\{t = 0.25\}}$

12 NLøs(sqrt((8a)^2+a^2)=0.25)
→ $\mathbf{\{a = -0.03, a = 0.03\}}$

13 |u|
→ $\sqrt{65}$

14 sqrt(65)/0.25
→ $\mathbf{4\sqrt{65}}$

15 4sqrt(65)
≈ **32.25**

Har definert vektorfunksjonen til begge båtene, NB! ulik variabel for tiden. setter uttrykkene lik hverandre og ser at tiden er ulik, altså vil de være på dette punktet på ulike tider. (linje 8). Båtene vil ikke møtes.
Piratene er i punkt C(8,9 etter 0.25 timer (linje 11). Da må politibåten være der samtidig. Strekningen politiet må tilbakelegge er $sqrt65$ (linje 13), altså må farten være $\sqrt{65}/0.25 = 32.25$ km/h.

Oppgave 8 (8 poeng))

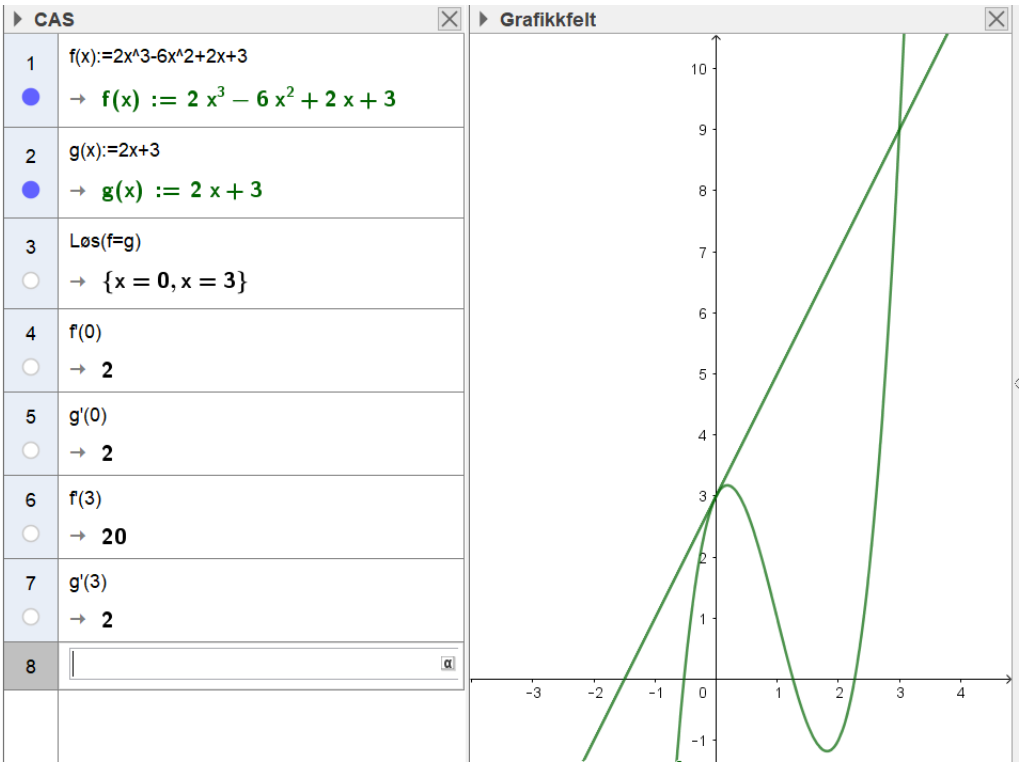
a)
Hvis grafene tangerer eller krysser vil $f(x) = g(x)$
Hvis det er et tangeringspunkt når $x = a$ vil $f'(a) = g'(a)$

Linje 1 0g 2 : Definerer funksjonene i CAS.

Linje 3 : Løser likningen $f = g$, og finner hvor grafene krysser eller tangerer.

I linje 4 og 5 : Finner at $f'(0) = g'(0)$, altså har grafene samme stigningstall, og vi vet da at dette er et tangeringspunkt.

I linje 6 og 7 : Finner at $f'(3) \neq g'(3)$, altså har grafene ikke samme stigningstall, og vi vet da at dette er et skjæringspunkt.



Vi kan også gjøre linje 4-7 slik :

4	f'(0)==g'(x) → **true**
5	f'(3)==g'(3) → **false**

b)
Linje 1 og 2 : Definerer funksjonene i CAS.

Linje 3 : Løser likningen $f = g$, og finner hvor grafene krysser eller tangerer.

I linje 4 : Finner at $f'(0) = g'(0)$, altså har grafene samme stigningstall, og vi vet da at dette er et tangeringspunkt.

I linje 5 : Finner at $f'(-b/a) \neq g'(-b/a)$, altså har grafene IKKE samme stigningstall, og vi vet da at dette er et skjæringspunkt.

Altså ser vi at vi vil få et tangeringspunkt og Einar og Llse har rett.

CAS	
1	f(x):=a x^3+b x^2+c x+d → $f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
2	g(x):=c x+d → $g(x) := c\,x + d$
3	Løs(f=g) → $\left\{x = \frac{-b}{a}, x = 0\right\}$
4	f'(0)==g'(x) → true
5	f'(-b/a)==g'(-b/a) → false

c)
Vendepunktet er når $f''(x) = 0$

Vi ser at $x_{vendepkt} = \frac{1}{3} x_{skj.pkt}$

6	xSkjPkt:=-b/a → $xSkjPkt := \frac{-b}{a}$
7	Løs(f''(x)=0) → $\left\{x = \frac{-b}{3\,a}\right\}$