Løsningsforslag R1 H23

Erling Olbekk

November 2023

Del 1

Oppgave 1

$$f(x) = x^2 \cdot lnx$$
$$f'(x) = 2x \cdot lnx + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{f'(x) = x(2lnx + 1)}}$$

Oppgave 2

$$2lne^3 = 2 \cdot 3lne = 6$$
$$3lg70 < 3lg100 = 3 \cdot 2 = 6$$
$$e^{3ln2} = (e^{ln2})^3 = 2^3 = 8$$

$$\underline{\underline{3lg70 < 2lne^3 < e^{3ln2}}}$$

Oppgave 3

$$\vec{AB} = [2 - (-3), -2 - (-1)] = [5, -1]$$
$$\vec{AC} = [5 - (-3), 2 - (-1)] = [8, 3]$$
$$\vec{BC} = [5 - 2, 2 - (-2)] = [3, 4]$$
$$|\vec{AB}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} > 5$$
$$|\vec{AC}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$$
$$|\vec{BC}| = 5$$

3-4-5-Trekanten er velkjent, så jeg vet at lengden av BC er 5. Dette må være den korteste av sidene siden $\sqrt{26} > \sqrt{25} = 5$. <u>BC er kortest.</u>

Oppgave 4

a) Egil har skrevet et program som bruker definisjonen av den deriverte med $\Delta x = 0.001$ for å estimere den deriverte til en funksjon i et punkt. Han lager en while-løkke som begynner med $a = 0$ og øker a med 1 for hver gjennomgang av løkken. Så lenge den deriverte i punktet $x = a$ er negativ vil løkken fortsette. Tanken til Egil er vel at så snart den deriverte endrer fortegn og blir positiv må vi ha funnet et bunnpunkt.

b) Ved å løse problemet for hånd kan vi se at bunnpunktet ikke er i en heltallig verdi for x. $f'(x) = 4x - 9$.

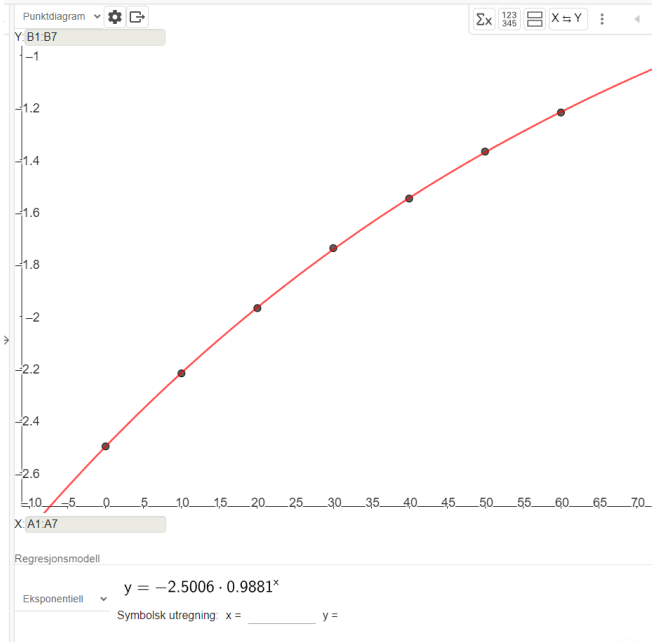
$$\begin{aligned} 4x - 9 &= 0 \\ 4x &= 9 \\ x &= \frac{9}{4} \\ x &= 1.25 \end{aligned}$$

SVAR: En mulig endring i koden er derfor å senke verdien a øker med for hver gjennomgang av løkken. F.eks. kan Egil endre linje 11 til "$a = a + 0.01$".

Del 2

Oppgave 1

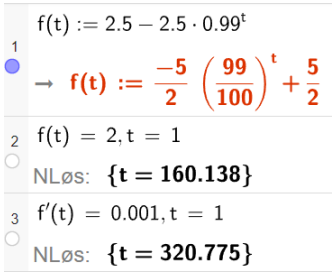
a) Jeg bruker verdiene i den nederste raden for å lage en modell for konstentrasjonen av stoffet som ligger 2.5 mmol/L under den reelle konsentrasjonen. Ved å legge til et konstantledd på 2.5 kan vi få en modell på formen som ønskes.



Jeg kan se fra bildet at tallene i oppgaven passer godt med modellen jeg fant.

$$\underline{\underline{f(t) = 2.5 - 2.5 \cdot 0.99^t}}$$

b) + c) løst i CAS



<u>Det tar 160 sekunder før konsentrasjonen er på 2 mmol/L, og det tar 320 sekunder før konsentrasjonen øker med mindre enn 0.001 mmol/L</u>

Oppgave 2

a) Dette er en polynomfunksjon, så den vil være kontinuerlig overalt så lenge den også er kontinuerlig i bruddpunktet. Jeg undersøker om grenseverdien er lik på begge sider av $x = k$.

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = -k^2 + (2+k)k = -k^2 + 2k + k^2 = 2k$$
$$\lim_{x \to k^+} f(x) = k^2 + (2-k)k = k^2 + 2k - k^2 = 2k$$

SVAR: Siden grenseverdien er lik fra begge sider (og funksjonsverdien er det samme) er funksjonen kontinuerlig for alle verdier av k.

b) Jeg undersøker hva k må være for at $f'(x)$ skal være kontinuerlig.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + (2+k) & x < k \\ 2x + (2-k) & x \geq k \end{cases}$$

$$\lim_{x \to k^-} f'(x) = -2k + 2 + k = 2 - k$$
$$\lim_{x \to k^+} f'(x) = 2k + 2 - k = 2 + k$$

<u>Disse grenseverdiene kan kun være like hvis $k = 0$. Da er funksjonen deriverbar</u>

c) Funksjonen er kontinuerlig for alle verdier av k. Dette betyr at den kun har en omvendt funksjon dersom den er strengt voksende eller strengt avtagende. Fra uttrykket for $f'(x)$ vet vi at vekstfarten vil være positiv på en av sidene av punktet $x = k$, uavhengig av hva k er.
Hvis $k > 0$ er $2 + k > 0$, hvis $k < 0$ er $2 - k > 0$. Vi må altså finne ut hvilke verdier av k som gjør at $f'(x)$ er strengt voksende.

Funksjonen f er en parabel med toppunkt for $x < k$, og en parabel med bunnpunkt for $x \geq k$. Så lenge ekstremalpunktene er på andre siden av k vil funksjonen alltid være voksende. Vi finner ekstremalpunktene på likevektslinjen.

$x < k$
Fra abc-formelen: Ekstremalpunkt når $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2+k)}{-2} = 1 + k/2$
For at funksjonen skal være voksende frem til $x = k$ må $1 + k/2 \geq k$.

$$\begin{aligned} 1 + k/2 &\geq k \\ k/2 - k &\geq -1 \\ -k/2 &\geq -1 \\ -k &\geq -2 \\ k &\leq 2 \end{aligned}$$

$x > k$
Fra abc-formelen: Ekstremalpunkt når $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2-k)}{2} = -1 + k/2$
For at funksjonen skal være voksende frem til $x = k$ må $-1 + k/2 \leq k$.

$$\begin{aligned} -1 + k/2 &\leq k \\ k/2 - k &\leq 1 \\ -k/2 &\leq 1 \\ -k &\leq 2 \\ k &\geq -2 \end{aligned}$$

<u>$f(x)$ har en omvendt funksjon hvis $-2 \leq k \leq 2$</u>

Oppgave 3

a) Påstanden er usann. Funksjonen $f(x) = x^3$ har ingen ekstremalpunkt.

b) Påstanden er sann.
Skjæringspunktene mellom linjen og grafen vil være en løsning av likningen $kx^3 + rx^2 + cx + d = ax + b \quad k, r, a, b, c, d \in R$
Dette er en tredjegradslikning, og har derfor minst én løsning. Linjen vil skjære grafen.

c) Påstanden er sann.
Vendepunktet vil være et ekstremalpunkt for $f'(x)$. Siden vi snakker om en tredjegradsfunksjon vil $f'(x)$ være en annengradsfunksjon. Av symmetrigrunner vil $f'(a-2) = f'(a+2)$ hvis $x = a$ er et ekstremalpunkt for $f'(x)$. $a = 3$ gir verdiene i oppgaven.

Oppgave 4

a) Løst i CAS. For en bestemt grunnflate vil vi gjøre høyden størst mulig for å maksimere volumet. Linje 1 finner høyden og linje 2 regner ut volumet.

1 $5^2 + 4 \cdot 5 \cdot h = 120$

NLøs: $\{h = 4.75\}$

2 $5^2 \cdot 4.75$

$\approx$ **118.75**

Det største volumet blir 118.75L

b) Løst i CAS. Linje 1+2 finner høyden som en funksjon av sidelengden i kassen. Vi vil bruke maksimalt med veggareal for å få maksimalt volum. Linje 3 definerer volumet av kassen som funksjon av sidelengden, linje 4 dobbeltsjekker bare at arealet er 120 for alle x, linje 5 finner ekstremalpunkt for volumet. Siden V er en tredjegradsfunksjon med negativt tredjegradsledd vet jeg at den siste x-verdien er et toppunkt.

1 $x^2 + 4\,x\,h = 120$

$\rightarrow$ $\mathbf{x^2 + 4\,h\,x = 120}$

2 Løs($1, h)

$\rightarrow$ $\left\{\mathbf{h = \frac{-x^2 + 120}{4\,x}}\right\}$

3 $V(x) := x^2 \cdot \frac{-x^2 + 120}{4\,x}$

$\rightarrow$ $\mathbf{V(x) := \frac{-1}{4}\,x^3 + 30\,x}$

4 $A(x) := x^2 + 4\,x\,\frac{-x^2 + 120}{4\,x}$

$\rightarrow$ $\mathbf{A(x) := 120}$

5 $V'(x) = 0$

Løs: $\left\{\mathbf{x = -2\sqrt{10}, x = 2\sqrt{10}}\right\}$

6 $V\left(2\sqrt{10}\right)$

$\approx$ **126.491**

Det maksimale volumet kassen kan ha er omtrent 126.5 liter

c) Hvis volumet skal være 80 må høyden være $80/x^2$, x er som før sidelengden av grunnflaten. Jeg løser igjen i CAS. Linje 9 definerer arealet av kassen som funksjon av sidelengden i grunnflaten. Linje 10+11 finner ekstremalpunkt for funksjonen og kontrollerer at det er et bunnpunkt. Linje 12 finner arealet.

9 $A2(x) := x^2 + 4\,x\,\frac{80}{x^2}$

$\rightarrow$ $\mathbf{A2(x) := x^2 + \frac{320}{x}}$

10 $A2'(x) = 0$

Løs: $\left\{\mathbf{x = 2\,\sqrt[3]{20}}\right\}$

11 $A2''\left(2\,\sqrt[3]{20}\right)$

$\rightarrow$ $\mathbf{6}$

12 $A2\left(2\,\sqrt[3]{20}\right)$

$\approx$ $\mathbf{88.417}$

Det minste mulige samlede arealet til kassen er omtrent $88.4dm^2$

Oppgave 5

Jeg løser oppgavene i CAS.
a) Jeg lager parameterfremstillingen og finner lengden av fartsvektoren når $t = 0$.

1 $r(t) := \text{Kurve}(8\,(e^{-t} - t), 5\,(e^{-t} - t), t, 0, 100)$

$\rightarrow$ $\mathbf{r := (8\,(e^{-t} - t), 5\,(e^{-t} - t))}$

2 $r(0)$

$\rightarrow$ $\mathbf{(8, 5)}$

3 $v(t) := \text{Derivert}(r(t), t)$

$\rightarrow$ $\mathbf{v(t) := (-8\,e^{-t} - 8, -5\,e^{-t} - 5)}$

4 $\text{Lengde}(v(0))$

$\approx$ $\mathbf{18.868}$

Farten til pucken er omtrent 18.9 m/s idet den sendes avgårde.

b) Pucken vil bevege seg nedover og mot venstre. Dette ser jeg fra fartsvektoren. Begge komponentene er negative uavhengig av t. Spørsmålet er da om den treffer vantet i $y = -15$ eller $x = -30$ først.

5 $y(r(t)) = -15, t = 1$

NLøs: $\mathbf{\{t = 3.047\}}$

6 $x(r(t)) = -30, t = 1$

NLøs: $\mathbf{\{t = 3.773\}}$

<u>Pucken treffer vantet nederst etter omtrent 3.05 sekunder.</u>

c) Jeg lager en parameterfremstilling for bevegelsen til spilleren. Likningssettet som setter deres posisjon lik har ingen løsning.

7 $r2(s) := \text{Kurve}(-18 + 3\,s, 11 - 7\,s, s, 0, 100)$

$\rightarrow$ $\mathbf{r2 := (-18 + 3\,s, 11 - 7\,s)}$

8 $x(r2(s)) = x(r(t))$

$\rightarrow$ $\mathbf{3\,s - 18 = 8\,e^{-t} - 8\,t}$

9 $y(r2(s)) = y(r(t))$

$\rightarrow$ $\mathbf{-7\,s + 11 = 5\,e^{-t} - 5\,t}$

10 $\{\$8, \$9\}$

Løs: $\{\}$

<u>Likningssettet har ingen løsning. Spilleren vil derfor ikke treffe pucken. Dette er ikke så farlig siden den uansett ikke går i mål</u>

Oppgave 6

a) Løst i CAS.

1 $f(x) := x^2 + 3x + 1$

$\rightarrow$ $f(x) := x^2 + 3x + 1$

2 $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(x)$

NLøs: $\{x = 2\}$

$\underline{\underline{c = 2}}$

b) Se vedlagt bilde. Løsningen baserer seg på å finne et nullpunkt for funksjonen $g(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

```python

def f(x): #Definerer funksjonen
    return x**2 + 3*x + 1

def fder(x): #Definerer den deriverte (Derivert for hånd)
    return 2*x + 3

Test = True
while Test: #Vi fortsetter til bruker skriver tall i riktig rekkefølge.
    a = float(input("Skriv inn a: "))
    b = float(input("Skriv inn b: "))
    if a<b:
        Test = False
    else:
        print("Ikke vær teit. Skriv inn ordentlige tall.")

c = a #Vi begynner i a
h = 0.001 #Steglengde langs x-aksen

while c<b: #Løkke for å gå gjennom tallinjen.
    test_var = fder(c) - (f(b) - f(a))/(b - a) #Alt flyttet til venstre side av likningen
    test_var_next = fder(c + h) - (f(b) - f(a))/(b - a) #Utregning for neste verdi av c

    if test_var*test_var_next < 0: #Hvis de har ulikt fortegn har vi funne et nullpunkt
        print(f"c = {c:.2f}")

    c += h #Øker c med én steglengde
```

c) Ved å prøve forskjellige verdier ser det veldig ut som om $c = (a+b)/2$, altså midt i intervallet. Se vedlagt bilde for eksempler.

```
In [1]: runfile('C:/Users/Erling/
Users/Erling/Documents/Spyder')
Skriv inn a: 2
Skriv inn b: 8
c = 5.00

In [2]: runfile('C:/Users/Erling/
Users/Erling/Documents/Spyder')
Skriv inn a: 3
Skriv inn b: 6
c = 4.50

In [3]: runfile('C:/Users/Erling/
Users/Erling/Documents/Spyder')
Skriv inn a: 0
Skriv inn b: 10
c = 5.00
```

d)

1 $f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x$

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := a\,x^2 + b\,x}$

2 $\dfrac{f(8) - f(2)}{8 - 2} \stackrel{?}{=} f'(5)$

$\rightarrow$ **true**

Påstanden stemmer