Eksamen R1
Høst 2023
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (p.)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot \ln x \\ f'(x) &= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= x(2\ln x + 1) \end{aligned}$$

Oppgave 2 (p.)

$$\begin{aligned} 2\ln e^3 &= 2 \cdot 3 \cdot \ln e \\ &= 6 \\ 3\lg 70 &= 3\lg 7 \cdot \lg 10 \\ &= 3\lg 7 \\ \lg 1 < \lg 7 &< \lg 10 \\ 0 < \lg 7 &< 1 \\ 0 < 3\lg 7 &< 3 \\ e^{3\ln 2} &= e^{\ln 2^3} \\ &= 2^3 = 8 \end{aligned}$$

Fra minst til størst : $3\lg 7$, $2\ln e^3$, $e^{3\ln 2}$

Oppgave 3 (p.)

a)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [2-(-3), -2-(-1)] = [5,-1] \\
\overrightarrow{AC} &= [5-(-3), 2-(-1)] = [8,3] \\
\overrightarrow{BC} &= [5-2), 2-(-2)] = [3,4] \\
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \\
|\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{8^2+3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} \\
|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}
\end{aligned}
$$

Korteste side er $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25}$

b)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= [5,-1] \cdot [3,4] \\
&= 15 - 4 = 11 \neq 0
\end{aligned}
$$

Vi ser av skissen at dette er den eneste vektoren som kunne ha vært $90°$, men kan også sjekke de to andre vinklene.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= [5,-1] \cdot [8,3] \\
&= 5 \cdot 8 + (-1) \cdot 3 \\
&= 40 - 3 = -37 \neq 0 \\
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= [8,3] \cdot [3,4] \\
&= 24 + 12 \\
&= 36 \neq 0
\end{aligned}
$$

Ingen av vinklene er 90 grader

Oppgave 4 (p.)

a) Jeg lager en skisse av grafen for å få oversikt over problemet.
Ser at grafen synker når $x = 0$

Egil ønsker å finne punktet der den deriverte skifter fortegn, fordi da har han funnet bunnpuntet.

(1-2) definerer funksjonen

(4-5) definerer den deriverte ved definisjonen

(7) definerer en variabel h som angir nøyaltigheten i bereging av den deriverte.

(8) definerer en variabel a som brukes i løkke for den økende verdien

(10) while-loop som kjører så lenge sen deriverte er mindre enn 0, altså så lenge grafen synker.

(11) øker variabelen med 1 hver gang løkka kjøres

(13) Skriver ut bunnpunktet

b)
I linje 11 økes a med 1 for hver runde. Dette er for store step derfor får Egil veldig unøyaktig resultat.

Hvis vi d.eks setter linje 11 til å være $a = a + 0.001$, så blir resultatet mer nøyaktig.

DEL 2

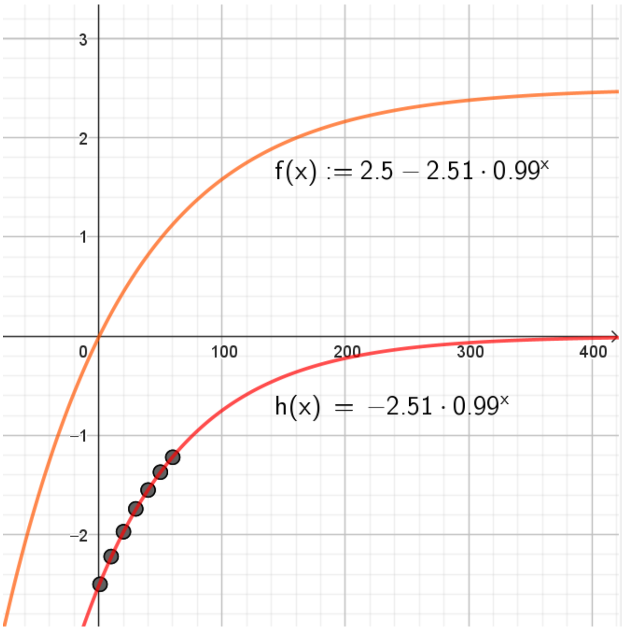
Oppgave 1 (p.)

a) Bruker nederste linja i tabellen og modellerer ved regresjon i Geogebra, en eksponentiell funksjon som flater ut mot 0.

$$\lim_{x\to\infty}\left(-2.5\cdot 0.99^x\right)=0$$

Så legger jeg til et ledd 2.5 for å løfte grafen opp slik at den flater ut mot 2.5 slik oppgaven beskriver.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2.5-2.5\cdot 0.99^x\right)=2.5$$



1	1	-2.5
2	10	-2.22
3	20	-1.97
4	30	-1.74
5	40	-1.55
6	50	-1.37
7	60	-1.22
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		

b)
Konsentrasjonen er 2.0 mmol/L etter 120 sekunder, altså 1,5 minutt.

CAS

1
f(x):=2.5 - 2.51 * 0.99^x
✓ $f(x) := 2.5 - 2.51\cdot 0.99^x$

2
NLøs(f(x)=2)
→ $\{x = 160.53\}$

c)
Konsentrasjonen øker med mindre enn 0.001 mmol/L pr sek etter 321 sek, altså ca 5 min. 20 sek.

3
NLøs(f'(x)=0.001)
→ $\{x = 321.17\}$

Oppgave 2 (p.)

a)
$f(x)$ er kontinuerlig for alle verdier av k dersom den er kontinuerlig når $x = k$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + (2+k)x \\
f(k) &= -k^2 + (2+k)k \\
&= -k^2 + 2k + k^2 \\
&= 2k \\
g(x) &= x^2 + (2-k)x \\
g(k) &= k^2 + (2-k)k \\
&= k^2 + 2k - k^2 \\
&= 2k \\
f(k) &= g(k)
\end{aligned}$$

altså er f kontinuerlig for alle verdier av k.

b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2x + (2+k) \\
\lim_{x\to k^-} f'(x) &= -2k + (2+k) \\
&= -2k + 2 + k \\
&= -k + 2 \\
g'(x) &= 2x + (2-k) \\
g'(k) &= 2k + (2-k) \\
&= 2k + 2 - k \\
&= k + 2 \\
f'(k) &= g'(k) \\
-k + 2 &= k + 2 \\
k &= 0
\end{aligned}$$

altså er $f(x)$ deriverbar for $k = 0$

c)
$f(x)$ har en omvendt funksjon dersom den er en-entydig, altså stigende eller synkende i hele intervallet.

Vi vet at grafen er kontinuerlig for alle verdier av k.

$f(x)$ stiger fram til toppunktet, så bytter den til $g(x)$ som da må stige videre.

Finner hvilke verdier av k som gjør at grafen til $f(x)$ stiger når $x <= k$:

$$\begin{align}
f'(x) &> 0 \\
-2x + (2+k) &>= 0 \\
2x &<= 2+k \\
k &= x \\
k &<= 1 + \frac{k}{2} \\
k - \frac{k}{2} &<= 1 \\
k &<= 2
\end{align}$$

Gjør tilsvarende for å finne når $f(x)$ stiger når $x > k$:

$$\begin{align}
f'(x) &> 0 \\
2x + 2 - k &> 0 \\
2x &< -2 + k \\
k &= x \\
k &< -1 + \frac{k}{2} \\
k - \frac{k}{2} &< -1 \\
\frac{k}{2} &< -1 \\
k &<= -2
\end{align}$$

Oppgave 3 (p.)

a)
$f(x)$ er en tredjegrads funksjon, da vil den deriverte være en andregrads funksjon.

Ekstremalpunktene til grafen finner vi når den deriverte er null, og en andregradsfunksjon kan eksistere uten noen gang bli null, altså kan vi ha tredjegradsfunksjoner som ikke har ekstremalpunkter.

b)
Den rette linja vil ha en fast vekst (stigningstall), men tredjegradsfunksjonen vil ha en vekst går pluss eller minus uendelig.

Da vil grafen til tredjegradsfunksjonen på ett eller annet punkt alltid krysse den rette linja.

c)
Vendepunktet vil være der den deriverte har bunnpunkt.

Dersom vendepunktet ligger i x=3 vil veksten på hver side av vendepunktet være symmetrisk om den derivertes symmetriakse.

Da stemmer det at $f'(1) = f'(5)$

Oppgave 4 (p.)

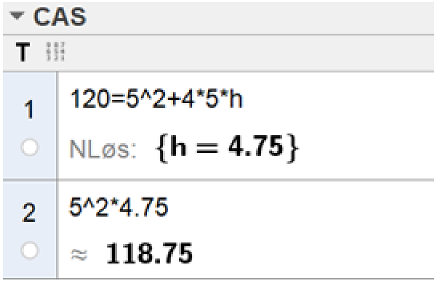
a)
Kaller sidekantene i bunnplaten for x og setter opp uttrykket for arealet til kassen:

$$A(x) = x^2 + 4xh$$

Maksimalt areal er $120m^2$ som gir:

$$120 = x^2 + 4xh$$

Får oppgitt at sidene i bunnen er 5 dm lange, setter dette inn i uttrykket for arealet på linje 1 i CAS. Finner at høyden må være 4,75 dm. Bruker dette til å finne volum av et rett prisme gitt ved V=Gh. Utregning vist på linje 2 i CAS.



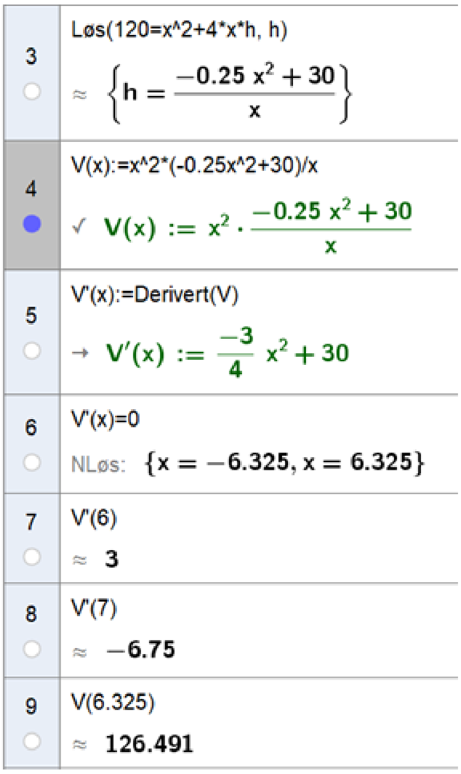
Volumet blir da $118,74\ dm^3$.

b)
Finner et uttrykk for høyden fra uttrykket for areal. Setter dette inn i formel for volum, se linje 3 og 4.

Vil finne toppunktet ved å finne nullpunktet til den deriverte, se linje 5 og 6. x er lengden av sidene i bunnen, denne kan ikke være kortere enn 0 dm så negativ løsning er ikke gyldig.

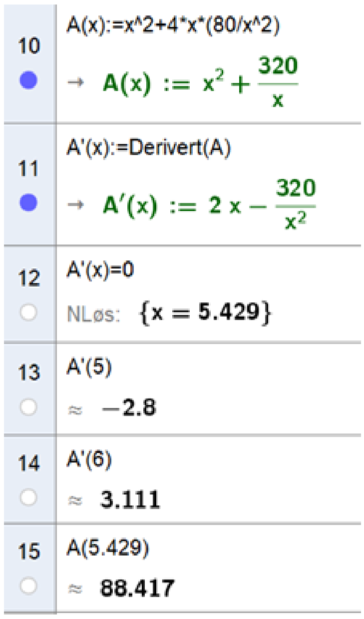
Sjekker at dette er et toppunkt ved å se på fortegn til den deriverte på linje 7 og 8.

Maksimalt volum kassen kan få, vist på linje 9, blir da $126,5\ dm^3$.



c)
Når volumet er gitt som $80\ dm^3$ får vi at høyden er gitt ved $\frac{80}{x^2}$ fra uttrykket for volum. Definerer uttrykket for arealet på linje 1. Finner bunnpunktet for funksjonsuttrykket, altså det minste arealet, på linje 11-15.

Det minste arealet platene kan ha når kassen har volum $80\ dm^3$ er $88,4\ dm^2$.



Oppgave 5 (p.)

a)
Definerer vektorfunksjonen for posisjonen på linje 1. Deriverer posisjonsvektor for å finne fartsvektor på linje 2.

Farten ved tiden 0 sekunder tilsvarer lengden av fartsvektor ved t=0. Finner denne på linje 3.

Ser at farten er $18,9\ m/s$ idet pucken sendes av gårde.

b)
Linje 4 og linje 5 er kun for å få et bilde av situasjonen idet pucken sendes av gårde. Ser da at pucken beveger seg mot venstre og nedover fordi fartskomponentene er negative.

På linje 6 setter jeg opp en likning der x-komponenten til r(t) settes lik posisjonen til vantet i x-retning.

Tilsvarende for y-retning på linje 7. Tiden er minst for bevegelsen i y-retning så pucken treffer vantet i y-retning først.

Tiden det tar før pucken treffer vantet er da 3.05 sekunder.

1	r(t):=Kurve(8(e ^(-t)-t), 5(e ^(-t)-t), t, 0, 100) → $\mathbf{r} := \left(8\left(e^{-t}-t\right), 5\left(e^{-t}-t\right)\right)$
2	v(t):=Derivert(r(t)) → $\mathbf{v(t)} := \left(-8\,e^{-t}-8, -5\,e^{-t}-5\right)$
3	Lengde(v(0)) ≈ **18.868**
4	r(0) ≈ $(8, 5)$
5	v(0) → $(-16, -10)$
6	8(e ^(-t)-t)=-30,t=1 NLøs: $\{t = 3.773\}$
7	5(e ^(-t)-t)=-15,t=1 NLøs: $\{t = 3.047\}$

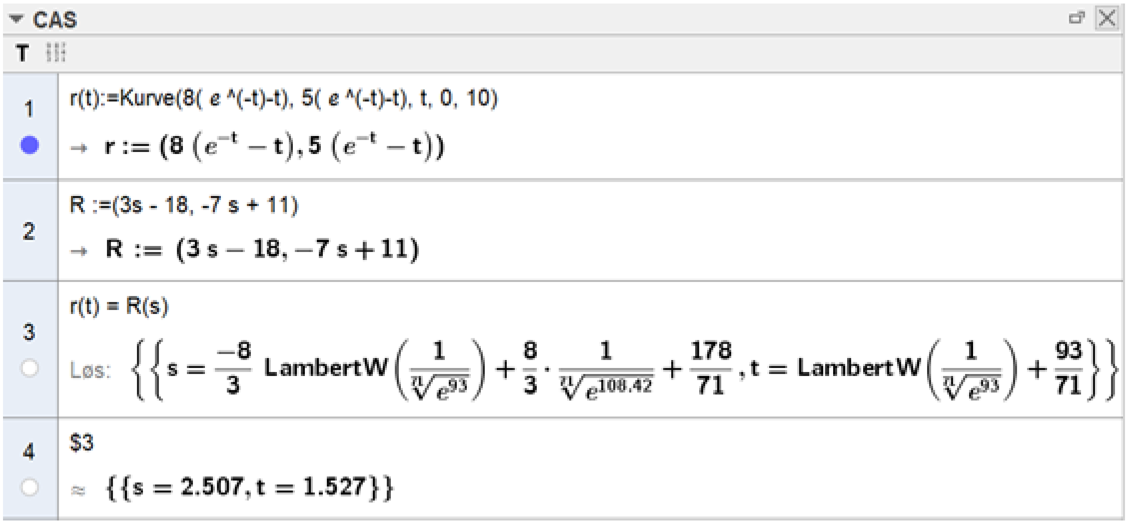
c)
Bruker utgangsposisjonen og fartsvektoren til å sette opp parameterfremstilling for bevegelsen til hockeyspilleren. Bruker her s for tid for å kunne skille tid for puck og hockeyspiller.

$$R(s) = \begin{cases} x = -18 + 3s \\ y = 11 - 7s \end{cases}$$

Som gir posisjonsvektor: $\vec{r}(t) = [8(e^{-t} - t), 5(e^{-t} - t)]$

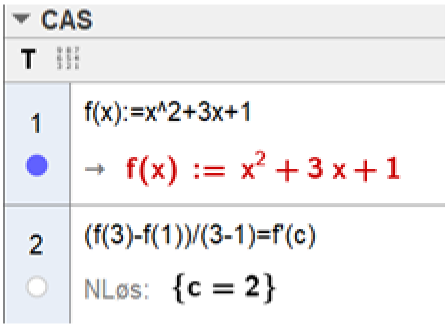
Hockeyspilleren blir truffet dersom de er i samme punkt samtidig. Setter derfor opp likningen der posisjonsvektor til pucken er lik posisjonsvektor til spilleren og løser for tiden til hver av de, s og t. Utregning vist nedenfor.

Ser at tiden de bruker til skjæringspunktet er ulik, ettersom de begge begynner bevegelsen ved tiden s=t=0 s vil dette bety at de ikke befinner seg i punktet samtidig.

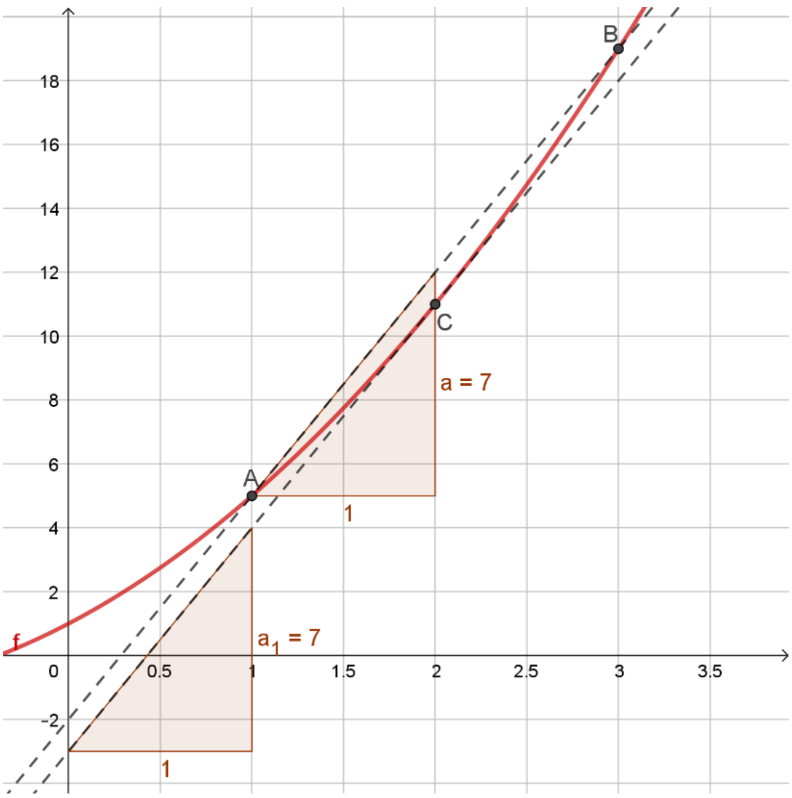


Oppgave 6 (p.)

a)
Definerer funksjonen i CAS og setter opp likningen gitt i oppgaven med oppgitte verdier. Får da at c=2 i dette tilfellet. Ser grafisk at den gjennomsnittlige stigningen mellom x=a og x=b er lik den momentane veksten i midtpunktet mellom a og b, i punktet x=c.



b)



c)
Skriver ut noen data fra programmet for å se på sammenhengen mellom verdien av a og b, og verdien c.

Ser som forventet at punktet x=c til enhver tid ligger midt mellom a og b.

```python
a=int(input("Sett inn a :")) #Ber om x-verdi a fra bruker
b=int(input("Sett inn b :")) #Ber om x-verdi b fra bruker

def f(x): #Definerer funksjonsuttrykket
    return(x**2+3*x+1)

def d(a,b): #Definerer gjennomsnittlig vekst fra a til b
    return((f(b)-f(a))/(b-a))

def derivert(x): #Definerer den deriverte av f(x)
    return(2*x+3)

i=a #Setter tellingen fra x-verdi a

while d(a,b)-derivert(i)>0: #Løkke som går så lenge gjennomsnittlig vekst
    i+=0.001                #er større enn momentan vekst, altså at differansen
                            #er positiv
def midtpunkt(a,b): #Finner x-verdien midt mellom a og b
    return((a+b)/2)

print(round(i,3)) #Skriver ut x-verdien hvor gj.snitt.vekst=momentan vekst

print(midtpunkt(a,b)) #Skriver ut midtpunktet
```

d)
Definerer det generelle uttrykket for en annengradsfunksjon. Setter igjen opp formelen gitt i oppgaven. Ser da at når det er gitt x-verdiene a=2 og b=8 vil verdien av c bli 5 uavhengig av hvilken annengradsfunksjon vi har.

1	f(x):=a*x^2+b*x+c → $f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
2	(f(8)-f(2))/(8-2)=f'(x) Løs: $\{x = 5\}$