Utdannings-
direktoratet

Eksamen

22.05.2020

REA3024 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Del 1

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x \cdot \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{x}$

Oppgave 2 (6 poeng)

Bestem integralene

a) $\int \left(x^2 + 3 + e^{2x}\right) dx$

b) $\int 6x \cdot \sin(x^2) dx$

c) $\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

I en aritmetisk rekke er $a_1 = 3$, og summen av de 5 første leddene er 55.

a) Hva blir summen av de 10 første leddene?

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \cdots$$

b) Begrunn at rekken konvergerer, og bestem summen.

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=2\sin(\pi x+\pi)-1 \ , \ \ x\in\langle -1,3\rangle$$

a) Bestem koordinatene til toppunktene og bunnpunktene på grafen til f.

b) Bestem skjæringspunktene mellom grafen til f og hver av koordinataksene.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 5 (6 poeng)

Vi har punktene $A(-1,3,2)$, $B(2,2,1)$, $C(0,1,0)$ og $T(5,3,8)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Vis at $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[0\,,5\,,-5]$.

b) Bestem volumet av pyramiden $ABCT$.

c) Bestem likningen for planet som inneholder punktene A, B og C.

Oppgave 6 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$2+\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+\cdots$$

a) Bestem rekkens konvergensområde.

b) Bestem x slik at summen av rekken blir 4.

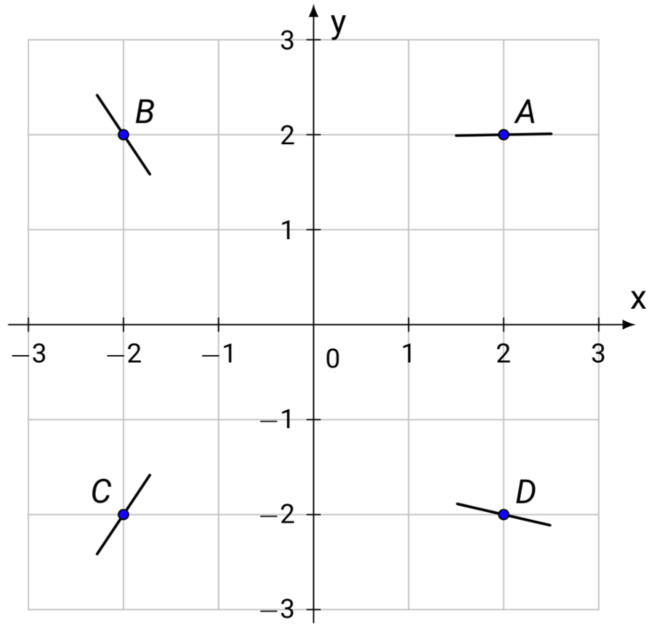
Oppgave 7 (2 poeng)

Differensiallikningen

$$2x \cdot y' - 3y = 0$$

har integralkurver som går gjennom punktene A, B, C og D på figuren til høyre. I hvert av punktene er det markert en tangentretning.

Vurder for hvert av de fire punktene om den markerte tangentretningen samsvarer med retningen til tangenten til integralkurven som går gjennom punktet. Grunngi svaret.



Oppgave 8 (3 poeng)

To plan α og β er gitt ved

$$\alpha: -2x + 2y - z = 21$$

$$\beta: -7x + 4y - 4z = 56$$

En kuleflate tangerer α i punktet $P(-3, 7, -1)$ og β i punktet $Q(-4, 5, -2)$.

Bestem en likning for kuleflaten.

Oppgave 9 (3 poeng)

En følge er gitt ved $a_1 = 2$ og $a_n = a_{n-1} + n$.

Bruk induksjon til å vise at $a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgave 1 (8 poeng)

Tabellen nedenfor viser det elektriske energiforbruket («strømforbruket») for en bolig måned for måned i 2019. Energiforbruket er målt i kWh.

Måned	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Energiforbruk (kWh)	1540	1480	1320	1050	800	750	660	730	940	1170	1300	1520

a) Bruk regresjon til å bestemme en trigonometrisk funksjon som passer godt med informasjonen i tabellen.

For en annen bolig er funksjonen f gitt ved

$$f(t) = 1300 + 730 \cdot \sin\left(0{,}52 \cdot t + 1{,}07\right)$$

en god modell for energiforbruket per måned i 2019. Her er $f(1)$ forbruket i januar, $f(2)$ forbruket i februar, og så videre.

b) Når økte forbruket raskest, ifølge modellen f?

c) Bestem $\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{dt}$. Gi en praktisk tolkning av svaret.

Energiprisen varierer også med tiden på året. Funksjonen p gitt ved

$$p(t) = 0{,}85 + 0{,}17 \cdot \sin\left(0{,}52 \cdot t + 1{,}07\right)$$

er en god modell for energiprisen i kroner per kWh. Her er $p(1)$ den gjennomsnittlige energiprisen i januar, $p(2)$ den gjennomsnittlige prisen i februar, og så videre.

d) Bestem den årlige energikostnaden til boligen dersom vi legger modellene f og p til grunn.

Oppgave 2 (8 poeng)

Ved radioaktiv stråling avtar massen til et radioaktivt stoff med en vekstfart som til enhver tid er proporsjonal med massen som er igjen av det radioaktive stoffet.

La $M(t)$ være massen til det radioaktive stoffet t timer etter et gitt tidspunkt.

a) Begrunn at differensiallikningen $M' = k \cdot M$ beskriver situasjonen.
Forklar hvorfor $k < 0$.

Ved tiden $t = 0$ timer var massen til det radioaktive stoffet 100 mg. Ved $t = 6$ timer var massen til det radioaktive stoffet 97 mg.

b) Bestem funksjonsuttrykket $M(t)$.

c) Hvor lang tid vil det gå før massen til det radioaktive stoffet er 2 mg?

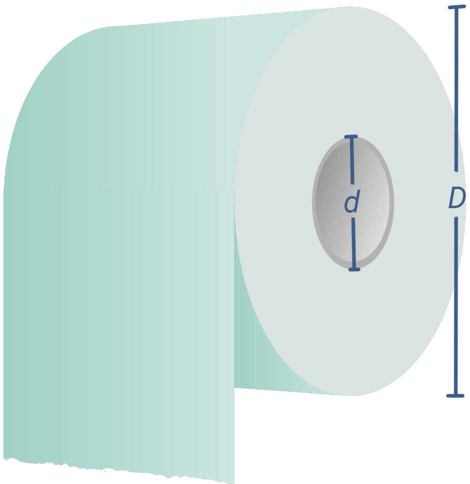
Dette radioaktive stoffet blir vurdert som ikke helsefarlig dersom massen minker med mindre enn $0{,}2$ mg per time.

d) Hvor lang tid går det før dette stoffet ikke lenger blir vurdert som helsefarlig?

Oppgave 3 (6 poeng)

Det innerste papirlaget på en tørkerull har diameter $d = 5{,}00\ \text{cm}$.

Papiret er $0{,}015\,\text{cm}$ tykt.



Lengden på papiret på den innerste runden på rullen er da $\pi \cdot 5{,}00$ cm. Den neste runden med papir har diameter $(5{,}00 + 2 \cdot 0{,}015)\ \text{cm} = 5{,}03\ \text{cm}$. Lengden på papiret i denne runden er derfor $\pi \cdot 5{,}03$ cm.

Diameteren på rullen øker med $0{,}03\ \text{cm}$ for hver ny runde med papir.

a) Hvor mange meter papir er det igjen på tørkerullen når det er 50 runder igjen før den er tom?

b) Hvor mange meter papir er det på tørkerullen når diameteren D er $20{,}00\ \text{cm}$?

c) Hva er diameteren D når det er 500 meter papir igjen på tørkerullen?

Oppgave 4 (2 poeng)

Vi har punktene $A(-1,-1,2)$, $B(3,4,-1)$, $C(5,3,1)$ og $D(5,6,4)$.

- Planet α går gjennom A, B og C.
- Linjen ℓ går gjennom A og D.

En kuleflate har radius 8 og sentrum S som ligger på ℓ. Kuleflaten tangerer α.

Bestem de mulige koordinatene til S.