Eksamen R2
Høst 2021
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{6}\cos(2x) \\ f'(x) &= \frac{1}{6}\cdot(-\sin(2x))\cdot 2 \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{3}\sin(2x)}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin^2(x^2+2) \\ &= (\sin(x^2+2))^2 \\ g'(x) &= 2(\sin(x^2+2))\cdot\cos(x^2+2)\cdot 2x \\ &\underline{\underline{= 4x\sin(x^2+2)\cos(x^2+2)}} \end{aligned}$$

Oppgave 2 (6 poeng)

a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \; dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\begin{aligned} &= -\cos(-\pi) - (-\cos(\pi)) \\ &= -(-1) - (-(-1)) \\ &= 1 - 1 \\ &\underline{\underline{= 0}} \end{aligned}$$

b) Ved substitusjon :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2-9}\ dx &= \int \frac{x}{u}\cdot\frac{1}{2x}\ du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln|x^2-9| + C}}
\end{aligned}$$

$$\text{MR : } u = x^2 - 9 \ u' = 2x \ dx = \frac{1}{2x}\ du$$

Ved delbrøkoppspalting :

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2-9}\ dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x+3} + \frac{\frac{1}{2}}{x-3}\ dx \\
&= \frac{1}{2}(\ln|x+3| + \ln|x-3|) + C \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln|x^2-9| + C}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{MR : } \frac{x}{(x+3)(x-3)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} \\
x &= A(x-3) + B(x+3) \\
x = -3 \ : \ -3 &= -6A \\
A &= \frac{1}{2} \\
x = 3 \ : \ 3 &= 6B \\
B &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int x \cdot e^{2x}\ dx &= x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \\
\text{Delvis integral :} u &= x\ ,\ \ u' = 1 \\
v &= \frac{1}{2}e^{2x}\ ,\ \ v' = e^{2x} \\
&= x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C \\
&= \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) \\
\int_0^{\ln 2} x \cdot e^{2x}\ dx &= \left[\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)\right]_0^{\ln 2} \\
&= \frac{1}{4}((e^{2\ln 2}(2\ln 2 - 1)) - (e^0(-1))) \\
&= \frac{1}{4}(4(2\ln 2 - 1) + 1 \\
&= \frac{1}{4}(8\ln 2 - 3) \\
&\underline{\underline{= 2\ln 2 - \frac{3}{4}}} \\
&\underline{\underline{= \frac{8\ln 2 - 3}{4}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3 (3 poeng)

$$\begin{aligned}
2y \cdot y' &= \cos x \\
\int 2y\ dy &= \int \cos x dx \\
y^2 &= \sin x + C \\
y &= \pm\sqrt{\sin x + C} \\
y(0) &= 2 \\
\text{Kun positiv løsning fordi } y > 0 &: \\
2 &= \sqrt{\sin 0 + C} \\
2 &= \sqrt{C} \\
y &\underline{\underline{= \sqrt{\sin x + 4}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

$$g(x) = f'(x) \Rightarrow \int g(x)dx = f(x) + C$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)\ dx &= [f(x)]_{-1}^{1} \\ &= f(1) - f(-1) \\ &= 3 - 0 \\ &\underline{\underline{= 3}}\end{aligned}$$

b)
Grafen til $f(x)$ er en 2.gradsfunksjon, da vil $f'(x) = g(x)$ være en lineær funksjon. Veksten til $f'(x)$ er null når $x = 1$, den er positiv fram til $x = 1$ (grafen stiger), og negativ etter $x = 1$ (grafen synker).
$\int g(x)\ dx$ vil være negativt fra $x = 1$ til $x = 4$.
Da vil integralet bli minst mulig (størst mulig negativ verdi) i intervallet $x \in \langle 1, 4 \rangle$
Altså er $a = 1$ og $b = 4$.

Oppgave 5 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}f(x) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1\ ,\ D_f = \langle 0, 10 \rangle \\ f(x) &= 0 \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1 &= 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) &= -\frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2}x - \pi = -\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi &\vee \frac{\pi}{2}x - \pi = \frac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ \frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{6} + 2n &\vee \frac{1}{2}x - 1 = \frac{7}{6} + 2n \\ x = 2 - \frac{1}{3} + 4n &\vee x = 2 + \frac{7}{3} + 4n \\ x = \frac{5}{3} + 4n &\vee x = \frac{13}{3} + 4n \\ & \underline{\underline{x = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{13}{3}, \frac{17}{3}, \frac{25}{3}, \frac{29}{3} \right\}}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1 \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right) + 1 \\ d &= 1 \\ A &= 2 \\ p &= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \\ \phi &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 6 (8 poeng)

a)

$$\overrightarrow{AB} = [0-2, 1-1, -2-0] = \underline{\underline{[-2, 0, -2]}}$$

$$\overrightarrow{AC} = [-3-2, 2-1, 1-0] = \underline{\underline{[-5, 1, 1]}}$$

b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [-2, 0, -2] \times [-5, 1, 1] \\ &= [0-(-2), -(-2-10), -2-0] \\ &= [2, 12, -2] \\ &\underline{\underline{= 2[1, 6, -1]}} \end{aligned}$$

Da harvi vist at $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} || \vec{n}$.

c)
$\vec{n_\alpha} = [1, 6, -1]$ og punkt i planet $A = (2, 1, 0)$
Da får vi planet :

$$\begin{aligned} \alpha \ : \ (x-2) + 6(y-1) - z = 0 \\ \underline{\underline{x + 6y - z - 8 = 0}} \end{aligned}$$

d) Når $t = 2$ får vi :

$$\begin{aligned} T &= (4, 8, 3) \\ \overrightarrow{AT} &= [4-2, 8-1, 3-0] = [2, 7, 3] \\ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT} &= [2, 12, -2] \cdot [2, 7, 3] \\ &= 4 + 84 - 6 = 82 \\ V &= \frac{82}{6} = \underline{\underline{\frac{41}{3}}} \end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
T &= (2+t, t^2+4, 1+t) \\
\overrightarrow{AT} &= [2+t-2, t^2+4-1, 1+t-0] = [t, t^2+3, 1+t] \\
(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT} &= [2, 12, -2] \cdot [t, t^2+3, 1+t] \\
&= 2t + 12(t^2+3) - 2(t+1) \\
&= 2t + 12t^2 + 36 - 2t - 2 \\
&= 12t^2 + 34 \\
V &= \frac{26}{3} \\
\frac{1}{6}(12t^2+34) &= \frac{26}{3} \\
12t^2 + 34 &= 52 \\
12t^2 + 34 - 52 &= 0 \\
12t^2 - 18 &= 0 \\
t &= \pm\sqrt{\frac{18}{12}} \\
t &= \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\
t &= \pm\frac{\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}
$$

Volumet er $\frac{26}{2}$ når $t = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Oppgave 7 (5 poeng)

a) Finner k, finner for hvilken verdi av x denne rekka konvergerer.

$$S(x) = 2 + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{(\ln x)^3}{4} + \ldots$$
$$k = \frac{\ln x}{2}$$

Konvergensområdet er da :

$$-1 < k < 1$$
$$-1 > \frac{\ln x}{2} \qquad < 1$$
$$-2 < \ln x < 2$$
$$e^{-2} < x < e^2$$

$$\frac{1}{e^2} < x < e^2$$

Konvergensområde : $x \in \left\langle \frac{1}{e^2}, e^2 \right\rangle$

b)

$$S(x) = \frac{a_1}{1-k} \text{uendelig konvergent}$$
$$= \frac{2}{1 - \frac{\ln x}{2}}$$
$$= \frac{4}{2 - \ln x}$$
$$S(e) = \frac{2}{1 - \frac{\ln e}{2}}$$
$$= \frac{4}{2-1}$$
$$= 4$$

c)

$$2 < x < 4$$
$$-1 < x - 3 < 1$$
$$k = x - 3$$

$$1 + (x-3) + (x-3)^2 + \ldots.$$

En annen løsning er:

$$2 < x < 4$$
$$-1 < 3 - x < 1$$
$$k = 3 - x$$

Oppgave 8 (2 poeng)

I punktet P er veksten $y' = -1$, det får vi fra tangenten.

$$\begin{aligned}
y' + \frac{1}{x} \cdot y &= 1 \\
-1 + \frac{1}{x} \cdot y &= 1 \\
\frac{1}{x} \cdot y &= 2 \\
y &= 2x
\end{aligned}$$

Dvs. at i punktet P er $y = 2x$. Da kan vi sette dette inn i likningen for tangenten.

$$\begin{aligned}
\text{Tangent : } y &= -x - 6 \\
2x &= -x - 6 \\
3x &= -6 \\
x &= -2 \\
y &= 2 - 6 = -4
\end{aligned}$$

Koordinatene er $P = (-2, -4)$

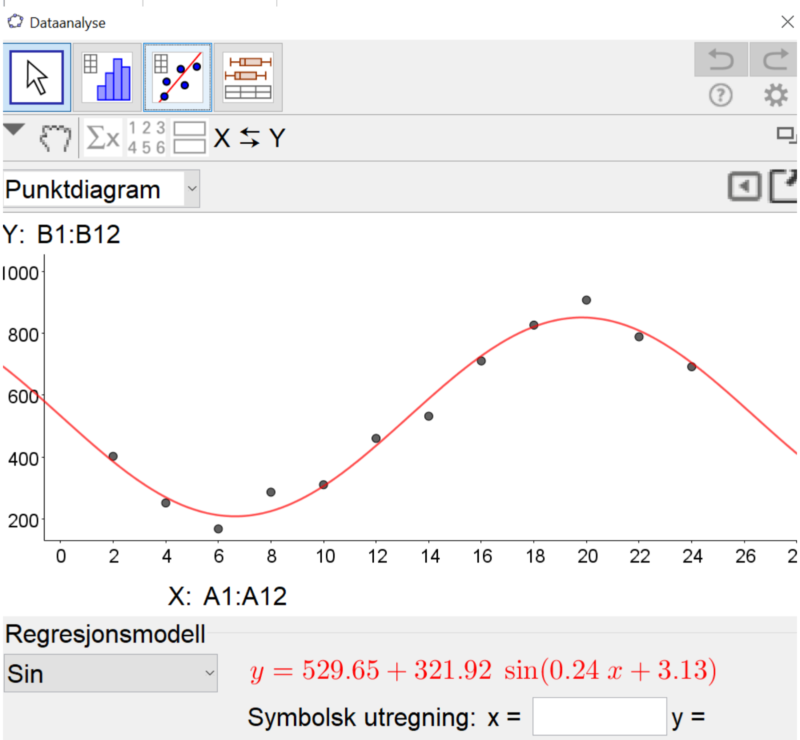
DEL 2

Oppgave 1 (6 poeng)

a)

Regresjon i Geogebra :
Vi skriver inn verdiene i regnearket,
merker verdiene og velger regresjonsanalyse.
Det står i oppgaven at vi skal lage en trigonometrisk modell, så vi velger sin som modell.

A	B
2	402
4	251
6	167
8	286
10	310
12	460
14	532
16	711
18	827
20	908
22	789
24	692

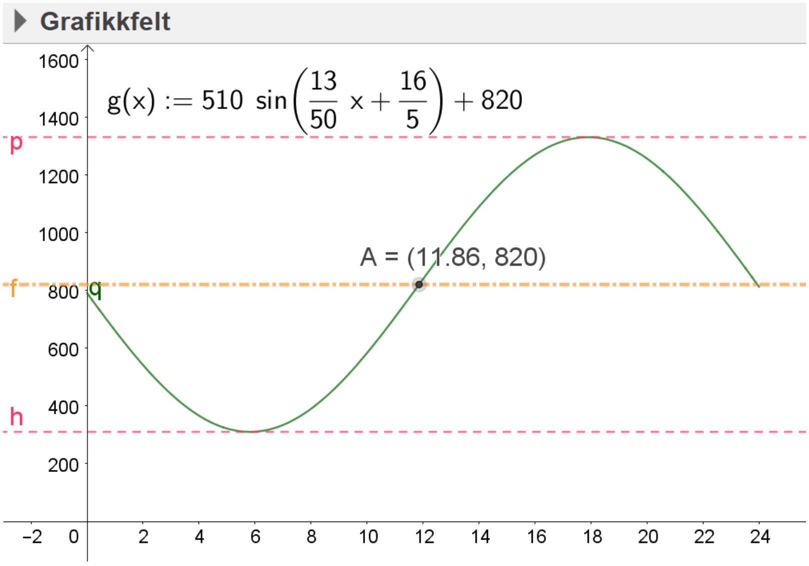


En sinusfunksjon som passer godt med dataene i tabellen er :

$$f(x) = 530 + 322\sin(0.24x + 3.13)$$

b)

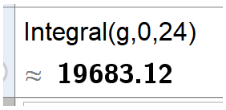
$$g(x) = 820 + 510\sin(0.26x + 3.2)$$



Grafen stiger mest når den krysser likevektslinja, fordi dette er en harmonisk svingning. Altså øker datatrafikken mest når x=11.86, det er rett før kl.12.00.

c)
Modellen viser datatrafikken pr.time, vi kan da finne den totale trafikken i løpet av et døgn ved å finne arealet under grafen.

$$\int_0^{24} g(x)\ dx$$



Altså er den totale datatrafikken i løpet av et døgn 19683 GB

Oppgave 2 (6 poeng)

a)
Det 20 personer som har covid-19, de vil smitte $20 \cdot R$ første uka. Etter 1 uke er det $20 + 20 \cdot R$ personer som har/har hatt covid-19, de siste $20 \cdot R$ vil smitte $(20 \cdot R) \cdot R$ nye personer. Dette gir rekka :

$$20 + 20R + 20R^2 + 20R^3 + ... + 20R^{n-1}$$

som skulle forklares.

b)

$$20 + 20 \cdot 1,7 + 20 \cdot 1,7^2 + 20 \cdot 1,7^3 + ... + 20 \cdot 1,7^{n-1}$$

Etter 1 uke : $20 + 20 \cdot 1,7$
Etter 2 uker : $20 + 20 \cdot 1,7 + 20 \cdot 1,7^2$
Etter 8 uker : $20 + 20 \cdot 1,7 + 20 \cdot 1,7^2 + 20 \cdot 1,7^3 + ... + 20 \cdot 1,7^8$
altså er det 9 ledd i rekka.
Summen av de som er eller har vært smittet i løpet av de første 8 ukene blir da :

Sum(20 1.7^(x-1),x,1,9)
≈ **3359.65**

c)
Når myndighetene setter inn tiltak er det altså 3360 personer som har eller har hatt covid-19.
Siste uka (uke 8) var antallet som ble smittet 1395 personer.
deretter må R-tallet være mindre enn 1, slik at antallet synker og over tid flater ut.

Sum(20 1.7^(x-1),x,9,9)
≈ **1395.15**
Løs(3360+Sum(1395*x^(n-1),n,1,∞)=10000)
≈ **{x = 0.79}**

Da må altså R-tallet være 0,79.

Oppgave 3 (6 poeng)

$S(-1,3,4)$, $A(-4,0,0)$, $B(2,0,8)$

Observasjon : Både A og B ligger i xz-planet (fordi y=0).
Vi kan tegne xz-planet : y=0

a)
Føst bør vi tenke litt på papiret :
En linje gjennom A og B - Retningsvektoren til linja :
$r_l = [2-(-4), 0-0, 8-0] = [6,0,8] = 2[3,0,4]$

Parameterframstilling til linja :

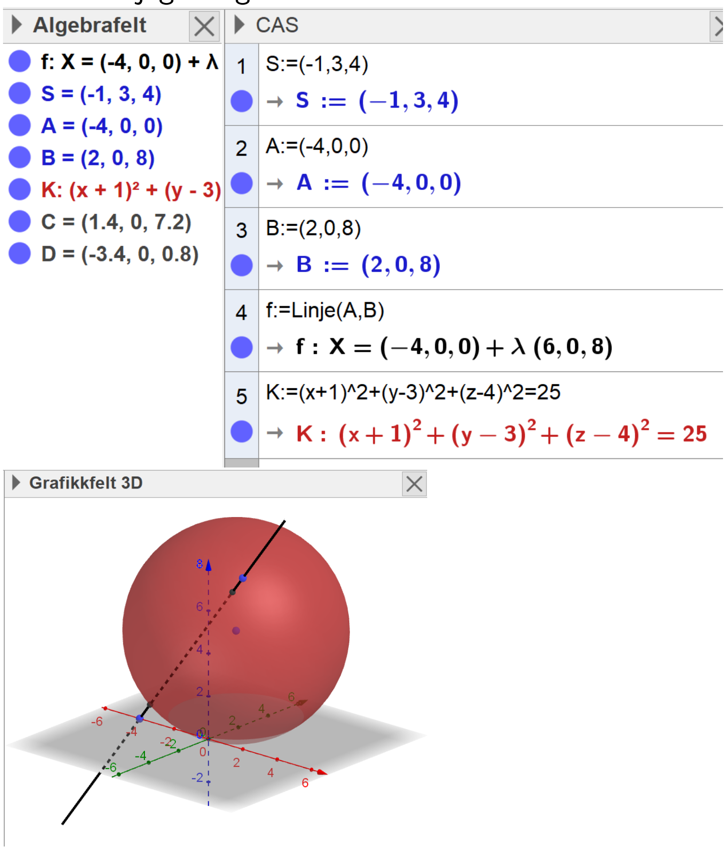
$$l : \begin{cases} x &= & -4+3t \\ y &= & 0 \\ z &= & 4t \end{cases}$$

Når $r=5$ får vi likningen til kula :

$$K_1 \ : \ (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 5^2$$

Da kan vi finne skjæringspunktene ved å sette koordinatene fra parameterframstillingen til linja inn i likningen for kula.

Så bruker jeg Geogebra :



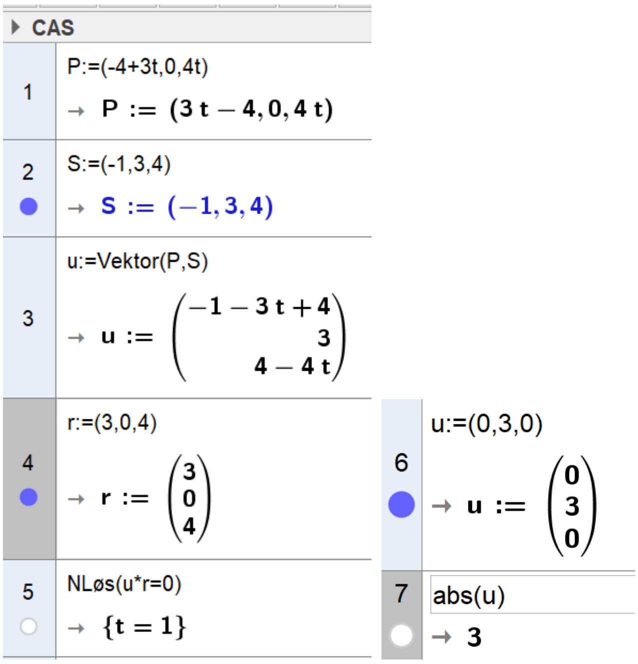
Vi skal finne skjæringspunktene mellom linja og kula :

Alternativ 1 :
Bruke grafikkdelen : (Skriv inn feltet) : Skjæring(K,f)

Alternativ 2 :
Bruke CAS :
Definerer generelt punkt på linja : $P := (-4+6t, 0, 8t)$
For å finnr t setter jeg koordinatene til P inn i likningen til K:
$Løs(Byttut(K, x = -4+6t, y = 0, z = 8t)) \rightarrow t = 1/10, t = 9/10$
Da finner jeg skjæringspunktene ved å sette disse t-verdiene inn i koordinatene til P.
$P_1 : ByttUt(P, t = 1/10)$ og $P_2 : ByttUt(P, t = 9/10)$

Alternativ 3 :
Finner skjæringspunktene i grafikkfeltet ved å dra et punkt langs linja til de snappertil kuleflaten.
Skjæring mellom linja og kula blir da: $P_1 = (1.4, 0, 7.2)$ og $P_2 = (-3.4, 0, 0.8)$

b)
Alternativ 1 :
Vi lager et punkt på linja : $P = (3t-4, 0, 4t)$
Deretter en vektor $\vec{u}$ fra senter i kula S til punktet P på linja.
Når $\vec{u} \perp \vec{r}$, der $\vec{r}$ er retningsvektoren til linja, har vi den minste verdien av avstanden.
Da vil $|\vec{u}|$ være avstanden fra senter i kula til linja, og linja vil tangere kula.



Alternativ 2 :
Vi kan også resonnere oss fram til dette:
Både A og B ligger i xz-planet, da vil linja l også ligge i xz-planet.
Da vil den korteste avstanden være gitt av y-koordinatet til S, altså 3.

c)
$C(0,1,0)$, $P_1(1.4,0,7.2)$ og $P_2(-3.4,0,0.8)$

5	C:=(0,1,0) $\rightarrow$ $\mathbf{C := (0,1,0)}$
6	P_1:=(1.4,0,7.2) $\rightarrow$ $\mathbf{P_1 := \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{36}{5}\right)}$
7	P_2:=(-3.4,0,0.8) $\rightarrow$ $\mathbf{P_2 := \left(\frac{-17}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)}$
8	Plan(C,P_1,P_2) $\rightarrow$ $\mathbf{x \cdot 6.4 + y\,(-25.6) + z\,(-4.8) = -25.6}$

Likningen til planet blir altså :

$$\alpha \ : \ 6.4x - 25.6y - 4.8z + 25.6 = 0$$

d)
Antar at $r \geq 5$, dvs. linja skjærer gjennom kula.
Planet kan defineres av 2 vektorer : $\overrightarrow{CP_1}$ og $\overrightarrow{P_1P_2}$. $P_1P_2 || \vec{r_l}$, altså kan planet defineres av retningsvektoren til linja og punktet C, da spiller det ingen rolle hvor på linja skjæringspunktene ligger.

Oppgave 4 (6 poeng)

a)
B(x) = liter biodiesel som er blandet ut til enhver tid
x= ant liter som er tappet ut

Når vi starter er det 400 liter vanlig diesel i tanken, altså får vi : B(0)=0

INN : 1 liter ren biodiesel inn pr. liter ut
UT : B(x)/400 liter biodiesel ut pr. liter ut

Endringen i biodiesel pr. liter som tappes ut blir da :

$$B'(x) = 1 - B(x)/400 = 1 - 0,0025B(x)$$

b)
Når halvparten av vanlig diesel er byttet ut er mengden biodiesel 200 ltr., : $B(x) = 200$

CAS

1	B(x):=LøsODE(y'=1-0.0025 y,(0,0))
	→ $B(x) := -400\, e^{\frac{-1}{400}x} + 400$
2	Løs(B(x)=200)
	≈ $\{x = 277.26\}$

Det må altså tappes ut 277,3 liter før halvparten er biodiesel.

c)
Vi gjør samme utregning som over, men nå er volumet av tanken V istedetfor 400 ltr.

3	A(x):=LøsODE(y'=1-1/V y,(0,0))
	→ $A(x) := -V\, e^{\frac{-x}{V}} + V$
4	m:=Løs(A(x)=V/2)
	→ $m := \{x = V\, \ln(2)\}$

Da har vi vist at $m = \ln 2 \cdot V$