Utdannings-
direktoratet

Eksamen

16.11.2021

REA3024 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.

Del 1

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \frac{1}{6} \cdot \cos(2x)$

b) $g(x) = \sin^2(x^2 + 2)$

Oppgave 2 (6 poeng)

Bestem integralene

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx$

b) $\int \frac{x}{x^2 - 9} \, dx$

c) $\int_{0}^{\ln 2} x \cdot e^{2x} \, dx$

Oppgave 3 (3 poeng)

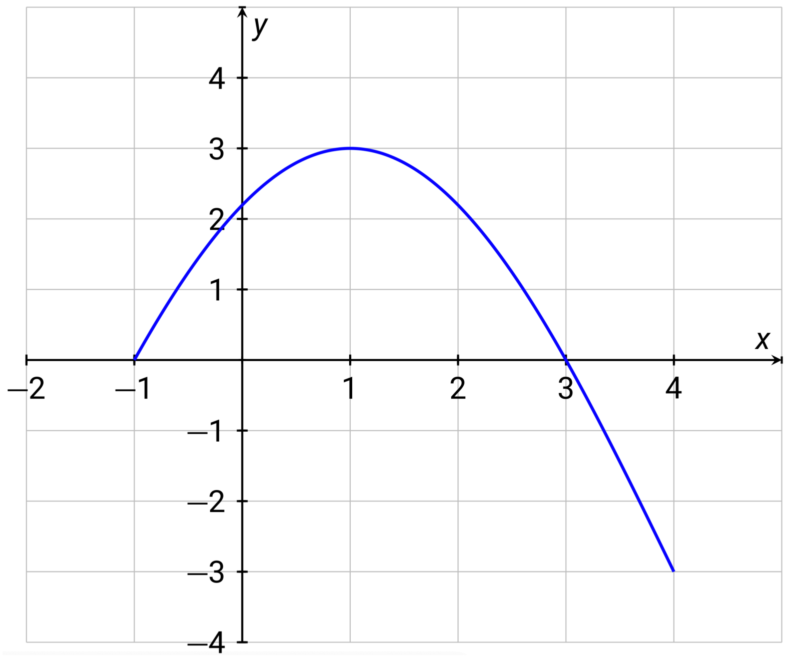
Vi har gitt differensiallikningen

$$2y \cdot y' = \cos x$$

Bestem den løsningen som oppfyller $y(0) = 2$.

Oppgave 4 (4 poeng)

Nedenfor har vi tegnet grafen til en funksjon f for $x \in [-1, 4]$.



Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = f'(x) \quad , \quad D_g = [-1, 4]$$

a) Bruk grafen til å bestemme $\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Bestem a og b slik at $\int_{a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ blir minst mulig. Begrunn svaret.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1 \qquad , \quad D_f = \langle 0, 10 \rangle$$

a) Bestem nullpunktene til f.

b) Gjør nødvendige beregninger og bruk disse til å skissere grafen til f.

Oppgave 6 (8 poeng)

Vi har gitt tre punkter $A(2,1,0)$, $B(0,1,-2)$ og $C(-3,2,1)$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b) Vis at $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ er parallell med $\vec{n}=[1,6,-1]$.

c) Bestem en likning for planet α som punktene A, B og C ligger i.

Punktet $T(2+t,t^2+4,1+t)$ danner sammen med A, B og C pyramiden $ABCT$.

d) Bestem volumet av pyramiden når $t=2$.

e) Bestem t slik at volumet blir $\dfrac{26}{3}$.

Oppgave 7 (5 poeng)

Vi har gitt den uendelige geometriske rekken

$$S(x)=2+\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+\frac{(\ln x)^3}{4}+\cdots$$

a) Bestem rekkens konvergensområde.

b) Bestem $S(\mathrm{e})$.

c) Lag en uendelig geometrisk rekke som har konvergensområde $\langle 2,4\rangle$.

Oppgave 8 (2 poeng)

Vi har gitt differensiallikningen

$$y'+\frac{1}{x}\cdot y=1$$

En av løsningene til differensiallikningen har et punkt P på grafen der tangenten i P er gitt ved $y=-x-6$.

Bestem koordinatene til P.

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser utgående datatrafikk fra et nettselskap for noen utvalgte timer i løpet av et døgn.

Time etter midnatt	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Utgående GB per time	402	251	167	286	310	460	532	711	827	908	789	692

a) Bruk regresjon til å bestemme en trigonometrisk funksjon som passer godt med informasjonen i tabellen.

Et annet nettselskap mener at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 820 + 510 \cdot \sin(0{,}26x + 3{,}2)\ , \quad D_f = [0{,}24]$$

er en god modell for deres utgående datatrafikk per time gjennom et døgn. Her er x antall timer etter midnatt.

b) Når økte datatrafikken til dette nettselskapet raskest ifølge modellen f ?

c) Bruk modellen f til å bestemme den totale utgående datatrafikken fra nettselskapet i løpet av et døgn.

Oppgave 2 (6 poeng)

For å kunne forutsi hvordan en pandemi kan utvikle seg, er R-tallet viktig. Dette tallet sier hvor mange personer en smittet person i gjennomsnitt vil smitte videre.

I resten av denne oppgaven tar vi utgangspunkt i sykdommen covid-19. Vi går ut fra at smitteperioden er 1 uke. Dersom R-tallet er $1{,}2$, så vil 100 personer som har covid-19-smitte, smitte $100 \cdot 1{,}2 = 120$ nye personer i løpet av en uke. Etter én uke vil det være 220 personer som har eller har hatt sykdommen, siden

$$100 + 100 \cdot 1{,}2 = 100 + 120 = 220$$

Den neste uken vil de 120 som ble smittet uken før, smitte $120 \cdot 1{,}2 = 100 \cdot 1{,}2^2$ nye personer.

Til en by som ikke har covid-19-smitte, kommer det 20 personer som er smittet. Dette blir ikke oppdaget, så R-tallet holder seg konstant i mange uker.

a) Forklar at antallet som har eller har hatt covid-19 etter n uker, kan beskrives med den geometriske rekken

$$20 + 20 \cdot R + 20 \cdot R^2 + \cdots + 20 \cdot R^n$$

Anta at $R = 1{,}7$ i denne byen.

b) Hvor mange personer vil det være som har eller har hatt covid-19 i denne byen i løpet av de 8 første ukene?

Det tar 8 uker før myndighetene i byen rekker å sette inn tiltak.

c) Hva må R-tallet være etter at tiltakene er satt inn, for at det totale antallet som har hatt eller får covid-19-smitte i denne byen, ikke skal overstige 10 000?

Oppgave 3 (6 poeng)

En kuleflate K har sentrum $S(-1, 3, 4)$ og radius r. En linje ℓ går gjennom punktene $A(-4, 0, 0)$ og $B(2, 0, 8)$.

a) Bestem skjæringspunktene mellom kuleflaten og linjen når $r = 5$.

b) Bruk CAS til å bestemme den minste verdien av r som gjør at det er skjæringspunkt mellom linjen ℓ og kuleflaten K.

Planet α er bestemt av punktet $C(0, 1, 0)$ og de to skjæringspunktene du fant i oppgave a.

c) Bestem en likning for planet α.

Anta nå at $r \geq 5$.

d) Begrunn at likningen for planet α er uavhengig av hvilken radius r vi valgte for kuleflaten K i oppgave a.

Oppgave 4 (6 poeng)

En dieseltank inneholder 400 liter vanlig diesel. Eieren ønsker å bytte ut dieselen med biodiesel. Samtidig som dieselen tappes ut, etterfylles det derfor med en like stor mengde biodiesel. Denne blandes godt med dieselen i tanken. Det som tappes ut, vil derfor bli en blanding av vanlig diesel og biodiesel.

La $B(x)$ være mengden biodiesel på tanken etter at vi har tappet ut x liter.

a) Forklar at differensiallikningen

$$B'(x) = 1 - 0{,}0025 \cdot B(x)$$

kan brukes til å bestemme mengden biodiesel på tanken etter at det er tappet ut x liter.

b) Hvor mange liter må tappes ut før halvparten av den vanlige dieselen er byttet ut med biodiesel?

En dieseltank inneholder V liter vanlig diesel. Vi lar m være antall liter du må tappe ut og etterfylle med biodiesel for at halvparten av den vanlige dieselen skal bli byttet ut med biodiesel.

c) Vis at $m = \ln 2 \cdot V$.