Eksamen R2
Vår 2021
Løsningsforslag

Feil og mangler kan forekomme - meld fra til Marianne :)

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng)

a) $f(x) = \cos(2x+1)$
$f'(x) = \underline{\underline{-2\sin(2x+1)}}$

b) $g(x) = \cos(2x) \cdot \sin x$
$g'(x) = \underline{\underline{-2\sin(2x) \cdot \sin x + \cos(2x) \cdot \cos x}}$

Oppgave 2 (6 poeng)

a)

$$\int x^2 + 2x + \frac{1}{3x}\ dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}\ln x + C}}$$

b)

$$\begin{aligned}\int x \cdot \ln x\ dx &= \frac{1}{2} \cdot x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x}\ dx\\ MR: u = \ln x, u' = \frac{1}{x}\\ v = \frac{1}{2}x^2, v' = x\\ &= \frac{1}{2} \cdot x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + C\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C}}\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\int (\sin x + 1)^2 \cdot \cos x \ dx &= \int u^2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \ du \\
MR : u &= (\sin x + 1), u' = \cos x \\
&= \int u^2 \ du \\
&= \frac{1}{3} u^3 + C \\
&= \frac{1}{3} (\sin x + 1)^3 + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)^2 \cdot \cos x \ dx &= \left[\frac{1}{3} (\sin x + 1)^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3} \left(\left(\sin(\frac{\pi}{2} \right)^3 + 1 - (\sin 0 + 1)^3 \right) \\
&= \frac{1}{3} (8 - 1) \\
&\underline{\underline{= \frac{7}{3}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a)
Finner nullpunktene for å finne grensene for integralet : $x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 - x \; dx &= [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Arealet er } F = \frac{1}{6}}}$, og ligger under x-aksen.

b)

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^1 (x^2 - x)^2 \; dx \\ &= \pi \int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2 \; dx \\ &= \pi[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3]_0^1 \\ &= \pi(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \\ &\underline{\underline{= \frac{\pi}{30}}}\end{aligned}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
\sin(2x-\pi) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
2x-\pi = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi &\lor 2x-\pi = \frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi \\
2x = \frac{4\pi}{3} + n\cdot 2\pi &\lor 2x = \frac{5\pi}{3} + n\cdot 2\pi \\
x = \frac{2\pi}{3} + n\cdot \pi &\lor x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot \pi \\
&\underline{\underline{x = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right\}}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 & \\
\cos x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\
&= \frac{-1 \pm 3}{4} \\
\cos x = \frac{1}{2} &\lor \cos x = -1 \\
x &= \left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Oppgave 5 (2 poeng)

$$\begin{aligned} s_3 - s_2 &= (3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3) - (3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2) \\ &= (27 + 12) - (12 + 8) \\ &= 39 - 20 \\ &= 19 \end{aligned}$$

Oppgave 6 (2 poeng)

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{1-k} &= 6 \\ b_4 &= b_1 \cdot k^3 \\ b_1(k^3 - 1) &= 38(k-1) \\ s_3 = b_1 \cdot \frac{k^3-1}{k-1} &= \frac{38}{9} \end{aligned}$$

Oppgave 7 (4 poeng)

$$\begin{aligned} y' &= 2x \cdot y^2 \\ \int \frac{1}{y^2}\, dy &= \int 2x\ dx \\ \frac{1}{-2+1} y^{-2+1} &= x^2 + C \\ -\frac{1}{y} &= x^2 + C \\ y &= -\frac{1}{x^2 + C} \end{aligned}$$

Oppgave 8 (4 poeng)

a)
Av uttrykket ser vi at det blir en kompleks løsning på den karakteristiske likningen. $p = -1$ og $q = 2$ Karakteristisk likning :

$$\begin{aligned}
r^2 + br + c &= 0 \\
r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\
r &= -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\
-\frac{b}{2} &= -1 \\
b &= 2 \\
\frac{\sqrt{4 - 4c}}{2} &= 2i \\
\frac{2\sqrt{1 - c}}{2} &= 2i \\
\sqrt{1 - c} &= \sqrt{-4} \\
1 - c &= -4 \\
c &= 5
\end{aligned}$$

Oppgave 9 (6 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [1 - 1, 2 - 1, 1 - 3] = [0, 1, -2] \\
\overrightarrow{AB} &= [-1 - 1, 3 - 1, 2 - 3] = [-2, 2, -1] \\
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} &= [3, 4, 2] = \vec{n_\alpha} \\
\alpha :& 3(x - 1) + 4(y - 1) + 2(z - 3) = 0 \\
& 3x + 4y + 2z - 13 = 0
\end{aligned}$$

b)
Krysser x-aksen : $3x - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{13}{3}$

Krysser y-aksen : $4y - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{13}{4}$

Krysser z-aksen : $2z - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{13}{2}$

c)

$$|\vec{n}|_\alpha = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$$

Vinkel mellom normalvektoren og aksene :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{n} = [1,0,0]\cdot[3,4,2] = 3$$
$$\sqrt{29}\cdot\cos v_x = 3 \Rightarrow \cos v_x = \frac{3}{\sqrt{29}}$$
$$\vec{e}_y \cdot \vec{n} = [0,1,0]\cdot[3,4,2] = 4$$
$$\sqrt{29}\cdot\cos v_x = 4 \Rightarrow \cos v_y = \frac{4}{\sqrt{29}}$$
$$\vec{e}_z \cdot \vec{n} = [0,0,1]\cdot[3,4,2] = 2$$
$$\sqrt{29}\cdot\cos v_x = 2 \Rightarrow \cos v_z = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$0 < \frac{2}{\sqrt{29}} < \frac{3}{\sqrt{29}} < \frac{4}{\sqrt{29}} < 1$
$0 < v_y < v_x < v_z < 90^o \Rightarrow v_z$ har størst vinkel ift. normalvektoren , altså minst vinkel ift. planet.

DEL 2

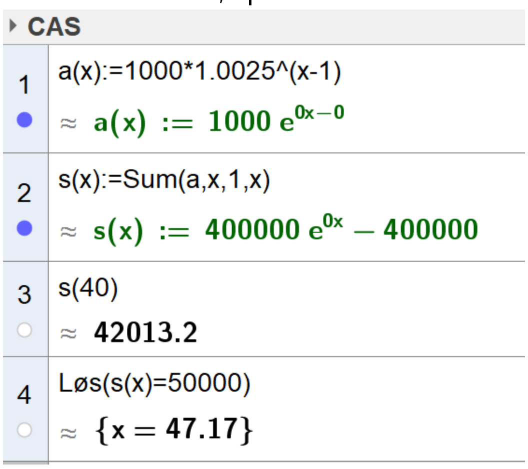
Oppgave 1

Dette kan vi framstille som en rekke :

$$1000 + 1000 \cdot 1,0025 + 1000 \cdot 1,0025^2 + ... + 1000 \cdot 1,0025^{n-1}$$

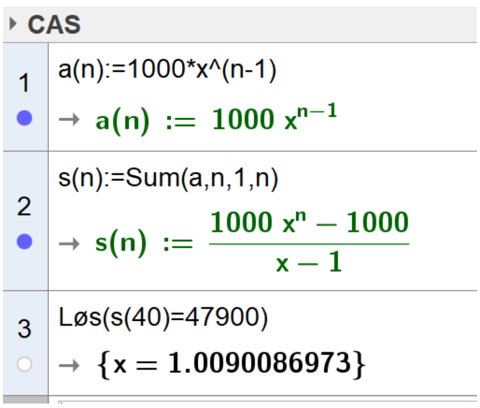
a)
Etter innskudd nummer 40 er det kr.42.013,- på kontoen.

b)
Det er kr.50.000,- på konto etter 48 måneder (47,17), dvs. 4 år.

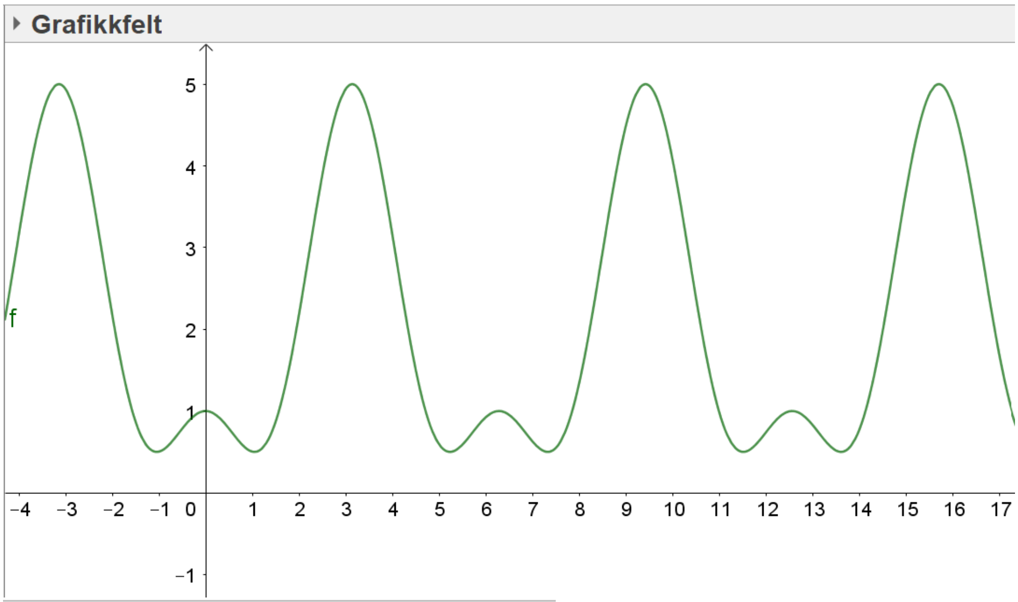


c)
Her blir $a_n = 1000x^{n-1}$, og $s_40 = 47900$.

Den månedlige renteforn må være 0,9%.



Oppgave 2



CAS

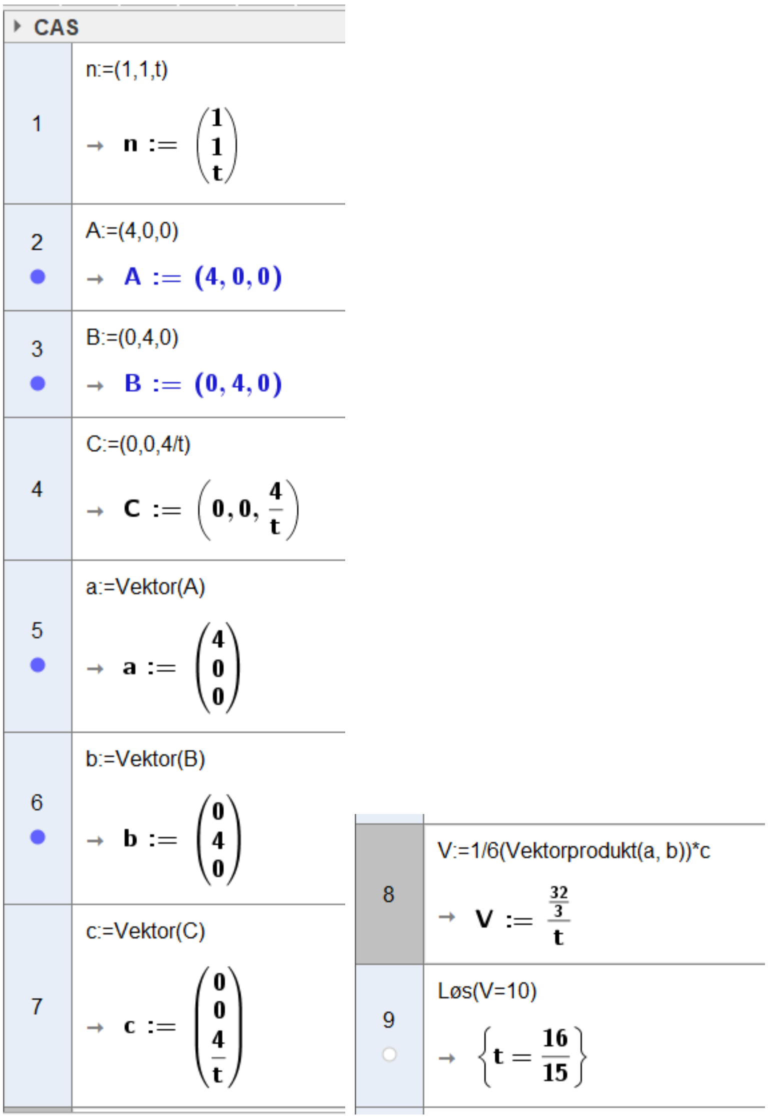
1	f(x):=cos(2x)-2 cos(x)+2 $\rightarrow\ f(x) := -2\cos(x) + \cos(2x) + 2$
2	Ekstremalpunkt(f, -1, 1) $\rightarrow\ (0, 1)$
3	Ekstremalpunkt(f, 6, 7) $\rightarrow\ (6.28, 1)$
4	TrigUtvid(f) $\rightarrow\ 2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x) + 2$

Oppgave 3

a)

$$
\begin{aligned}
\alpha \ : \ x + y + t \cdot z = 4 \\
n_\alpha &= [1, 1, t] \\
A &= (4, 0, 0) \\
B &= (0, 4, 0) \\
C &= (0, 0, t/4)
\end{aligned}
$$

b)



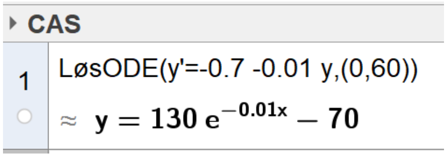
c)

Oppgave 4

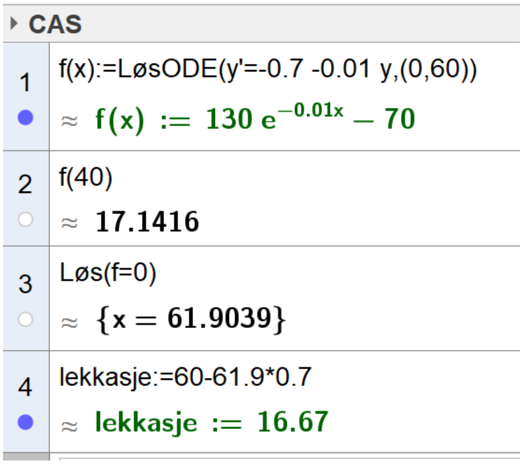
a)
V=antall liter bensin igjen på tanken
x = antall mil kjørt

Forbruket av bensin er 0,7 liter pr.mil, dvs. endringen i bensin $V' = -0,7$
I tillegg lekker det ut $0,01 \cdot V$ pr.time
Da blir diff.likningen : $V' = -0,7 - 0,01 \cdot V$

b)



c)
Etter 40 mil er det 17,1 liter igjen på tanken.



d)
Tanken er tom etter 62 mil, da har det lekket ut 16,7 liter

e)
Fyller 30 liter før start , initialbetingelsene blir (0,30)

Etter de første 20 milene : 11,9 liter igjen
Fyller opp til 30 liter, altså (30-11,9)ltr=18,1ltr

Kjører så 20 mil til, og det er 11,9 liter igjen på tanken når han er framme.
Da har han totalt brukt 18,1 *2=36,2 liter