Eksamen R2
Høst 2022
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng)

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + \sin(\pi x) \\
f'(x) &= 3x^2 + \cos(\pi x) \cdot \pi \\
&= 3x^2 + \pi \cos(\pi x)
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \ln(2 + \cos x) \\
g'(x) &= \frac{1}{2 + \cos x} \cdot (-\sin x) \\
&= -\frac{\sin x}{2 + \cos x}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$\int \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - e^{-x} + 1\right) dx =$$

$$MR:$$

$$\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\begin{aligned}\int \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - e^{-x} + 1\right) dx &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (-e^{-x}) + x + C \\ &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - +e^{-x} + x + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin x^2 \ dx &= \int x \cdot \sin u \frac{1}{2x} \ du \\ MR: u &= x^2 \ , \ u' = 2x \\ &= \frac{1}{2}\int \sin u \ du \\ &= -\frac{1}{2}\cos u + C \\ &= -\frac{1}{2}\cos x^2 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin x^2 \ dx &= \left[-\frac{1}{2}\cos x^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos \pi - \cos 0) \\ &= -\frac{1}{2}(-1 - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

Riktig utregning av integral uten å sette inn grensene gir 1 poeng.

Oppgave 3 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2x^2}{y} \\
\int y \; dy &= \int 2x^2 \; dx \\
\frac{1}{2}y^2 &= \frac{2}{3}x^3 + C \\
y &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}x^3 + C}
\end{aligned}$$

Setter inn kjent punkt : $y(0) = 3 \Rightarrow (0, 3)$

$$\begin{aligned}
y &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}x^3 + C} \\
3 &= \pm\sqrt{\frac{4}{3} \cdot 0^3 + C} \\
3 &= \pm\sqrt{C} \\
C &= 9 \\
y &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}x^3 + 9}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
y &= 2\sin(3x) + x \\
y' &= 6\cos(3x) + 1 \\
y'' &= -18\sin(3x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' + 9y &= 9x \\
-18\sin(3x) + 9 \cdot (2\sin(3x) + x) &= -18\sin(3x) + 18\sin(3x) + 9x \\
&= 9x
\end{aligned}$$

altså er uttrykket en løsning av diff.likningen.

Oppgave 4 (4 poeng)

a)
Aritmetisk rekke

$$
\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + ... + a_n \\
a_3 &= a_1 + d(3-1) = a_1 + 2d = 8 \\
a_1 &= 8 - 2d \\
a_{23} &= a_1 + d(23-1) = a_1 + 22d = 68 \\
(8-2d) + 22d &= 68 \\
20d &= 60 \\
d &= 3 \\
a_1 &= a_3 - 2d = 8 - 6 = 2 \\
a_n &= a_1 + d(n-1) = 2 + 3(n-1) = 3n - 1 \\
s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
&= \frac{n(2 + 3n - 1)}{2} \\
&= \frac{n(3n+1)}{2} \\
s_{100} &= \frac{100(3 \cdot 100 + 1)}{2} \\
&= \frac{30100}{2} = 15050
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 4 \\
d &= 4 \\
a_n &= a_1 + 4(n-1) = a_1 + 4n - 4 \\
s_{10} &= 240 \\
s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
&= \frac{n(a_1 + a_1 + 4n - 4)}{2} \\
&= \frac{n(2a_1 + 4n - 4)}{2} \\
&= n(a_1 + 2n - 2) \\
s_{10} &= 10(a_1 + 20 - 2) = 240 \\
a_1 + 18 &= 24 \\
a_1 &= 6 \\
s_{20} &= 20(6 + 2 \cdot 20 - 2) = 20 \cdot 44 \\
&= 880
\end{aligned}
$$

Oppgave 5 (4 poeng)

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= A\sin(k\cdot(x-\phi_0))+d \\
d &= -1 \\
A &= 4 \\
p &= 2\pi \\
k &= \frac{2\pi}{p} = 1 \\
\phi_0 &= \frac{\pi}{3} \\
f(x) &= 4\sin(x-\frac{\pi}{3})-1
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0\ ,\ \ x \in [0, 3\pi] \\
\tan x - \sqrt{3} = 0 \\
\tan x = \sqrt{3} \\
x = \frac{\pi}{3} + n\cdot\pi \\
x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

Kandidater som bruker grafen til å løse likningen, kan få full uttelling.

Oppgave 6 (8 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
x^2-4x+y^2+2y+z^2-6z &= 11 \\
x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-6z+9 &= 11+4+1+9 \\
(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 &= 5^2 \\
S=(2,-1,3), r=5
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
S &= (2,-1,3) \\
P &= (6,-4,3) \\
\overrightarrow{SP} &= [6-2,-4+1,3-3]=[4,-3,0] \\
n_\alpha &= [4,-3,0] \\
\alpha\ \ &: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \\
&\ 4(x-6)-3(y+4)+0(z-3)=0 \\
&\ 4x-24-3y-12=0 \\
&\ 4x-3y-36=0
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
l(t) &= [6+4t,-4-3t,3] \\
(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 &= 5^2 \\
(6+4t-2)^2+(-4-3t+1)^2+(3-3)^3 &= 25 \\
(4(t+1))^2+(-3(t+1))^2 &= 25 \\
16(t+1)^2+9(t+1)^2 &= 25 \\
25(t+1)^2 &= 25 \\
(t+1)^2 &= 1 \\
t^2+2t+1 &= 1 \\
t(t+2) &= 0 \\
t=0 \vee t &= -2
\end{aligned}$$

Når $t=0$ får vi punktet P
Når $t=-2$ får vi det andre skjæringspunktet mellom linja og kula :
$Q=(6+4\cdot(-2),-4-3\cdot(-2),3)=(-2,2,3)$

d) Vi får en trekant der hypotenusen er 5 (radien til kula), det ene katetet er 2 (5-3, β ligger 3 fra Q, altså 2 fra S)
det andre katetet er radien i skjæringssirkelen. Bruker Pythagoras' :

$$\begin{aligned}
2^2+r^2 &= 5^2 \\
r^2 &= 25-4 \\
r &= \sqrt{21}
\end{aligned}$$

Kandidater som forveksler avstanden fra β til Q med avstanden fra β til S, kan få full uttelling.

Oppgave 7 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x)\ dx &= a^3 - \ln a + 3a - 3 \\ (a^3 - \ln a + 3a) - (1^3 - \ln 1 + 3) &= a^3 - \ln a + 3a - 1 - 3 \\ &= a^3 - \ln a + 3a - 4\end{aligned}$$

Hvis svaret er riktig må det generelle svaret inneholde de tre leddene med a, vi ser da at konstantleddet blir -4.

b)

$$(x^3 - \ln x + 3x)' = 3x^2 - \frac{1}{x} + 3$$

Oppgave 8 (4 poeng)

a) Rett linje som går gjennom origo og $(2, 3)$, har stigningstall $a = \frac{3}{2}$.
Linjen blir da :

$$f(x) = \frac{3}{2}x$$

Volume av kjeglen vi får blir da :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^h \left(\frac{3}{2}x\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^h \frac{9}{4}x^2 \, dx \\
&= \pi \left[\frac{9}{4 \cdot 3}x^3\right]_0^h \\
&= \frac{3\pi}{4}\left[x^3\right]_0^h \\
&= \frac{3\pi}{4} \cdot h^3 \\
V &= 48\pi \\
\frac{3\pi}{4} \cdot h^3 &= 48\pi \\
h^3 &= \frac{48 \cdot 4}{3} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{3} = 2^6 = 4^3 \\
h &= 4
\end{aligned}$$

Kandidater som løser oppgaven med å bruke formelen for volumet av en kjegle, kan få full uttelling.

b)
Et generelt uttrykk for linja finner vi ved at linja går gjennom origo og punktet (h, r), stigningstallet blir da $a = \frac{r}{h}$, og linja $f(x) = \frac{r}{h}x$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 \, dx \\
&= \frac{r^2 \cdot \pi}{3 \cdot h^2}\left[x^3\right]_0^h \\
&= \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot h^3 \\
&= \frac{1}{3}\pi\frac{r^2 \cdot h^3}{h^2} \\
&= \frac{1}{3}\pi r^2 h
\end{aligned}$$

DEL 2

Oppgave 1 (6 poeng)

$A(2,-3,0)$, $B(t,0,2t)$, $C(2,-3,t)$, $T(1.-3,1)$, $t \neq 0$
a)
Planet er definert av de 3 punktene, da kan vi bruke dem til å finne normalvektoren og likningen til planet :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [t-2, 0-(-3), 2t-0] = [t-2, 3, 2t] \\
\overrightarrow{AC} &= [2-2, -3-(-3), t-0] = [0, 0, t] \\
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [3t, -t(t-2), 0] \\
\alpha &: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \\
&: 3t(x-2) - t(t-2)(y+3) + 0(z-0) = 0 \\
&: 3tx - 6t - t(t-2)y - 3t(t-2) = 0 \\
&: 3x - 6 - (t-2)y - 3t + 6 = 0 \\
&: 3x - (t-2)y = 3t \\
&: 3x + (2-t)y = 3y
\end{aligned}$$

som skulle vises.

Kandidater som viser at de tre punktene ligger i planet ved innsetting, kan få full uttelling

$$\begin{aligned}
A(2,-3,0) &\to \alpha : 3 \cdot 2 + (2-t) \cdot (-3) = 6 - 6 + 3t = 3t \\
B(t,0,2t) &\to \alpha : 3 \cdot t + 0 = 3t \\
C(2,-3,t) &\to \alpha : 3 \cdot 2 + (2-t) \cdot (-3) = 6 - 6 + 3t = 3t
\end{aligned}$$

b)
Sjekker vinklene med skalarprodukt.

5	AB:=Vektor(A,B) $\rightarrow$ $\mathbf{AB} := \begin{pmatrix} t-2 \\ 3 \\ 2t \end{pmatrix}$
6	AC:=Vektor(A,C) $\rightarrow$ $\mathbf{AC} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$
7	BC:=Vektor(B,C) $\rightarrow$ $\mathbf{BC} := \begin{pmatrix} 2-t \\ -3 \\ t-2t \end{pmatrix}$
8	Løs(AB*AC=0) $\rightarrow$ $\{t = 0\}$
9	Løs(AB*BC=0) $\rightarrow$ $\{\}$
10	Løs(BC*AC=0) $\rightarrow$ $\{t = 0\}$

I linje 8-10 sjekkes alle 3 vinklene.
Vi får at $t = 0$, men dette er ikke et gyldig svar fordi $t \neq 0$
Dersom vi setter inn $t = 0$ så ser vi at $C = A$, og da har vi ikke lenger en trekant.

> For å få full uttelling må kandidaten sjekke alle tre vinklene.

c)

11	Vektorprodukt(AB, AC) $\rightarrow \begin{pmatrix} 3\,t \\ -(t-2)\,t \\ 0 \end{pmatrix}$
12	AT:=Vektor(A,T) $\rightarrow \mathbf{AT} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
13	V(t):=1 / 6 abs($11 $12) $\rightarrow \mathbf{V(t)} := \frac{1}{2}\,|t|$
14	Løs(V(t)=10) $\rightarrow \{t = -20, t = 20\}$

linje 11 : finner vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$
linje 12 : finner$\overrightarrow{AT}$
linje 13 : finner volum av den trekantede pyramiden : $V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT}|$
linje 14 : finner t når volumet er 10.
Volum av pyramiden er 10 når $t = -20$ eller $t = 20$.

> For å få full uttelling må kandidaten finne begge punktene.

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

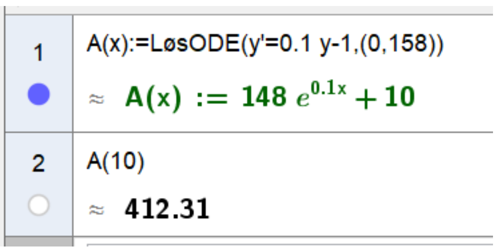
$$A' = 0,1 \cdot A - 1$$

Da antar de at antall ansatte øker med 10% og at 1 pers slutter pr år.

> Kandidaten må forklare begge antakelsene riktig for å få full uttelling.

b)

$$\begin{aligned} A' &= 0,1 \cdot A - 1 \\ A(0) &= 158 \end{aligned}$$



Etter 10 år vil det etter denne modellen være 412 ansatte, altså mer enn 400.

Oppgave 3 (8 poeng)

a_1 er sum av lengden av sidene i det første halvkvadratet, $a_1 = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 2x$.

Summen av sidene i halvkvadratene blir da :

$$a_1 + a_1 \cdot \frac{3}{4} + a_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots$$

altså vil $k = \frac{3}{4}$

a)
Hvis $a_1 = 24$ får vi :

$$24 + 24 \cdot \frac{3}{4} + 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + a_n = S$$
$$a_n = 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

1	a(n):=24*(3/4)^(n-1) → $a(n) := 24 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$
2	s(n):=Sum(a(n),n,1,n) → $s(n) := -96 \left(\frac{3}{4}\right)^{n} + 96$
3	s(4) → $\frac{525}{8}$

linje 1 : definerer a_n som en funksjon av n.
linje 2 : definerer s_n som en funksjon med sum-kommandoen i CAS.
linje 3 : finner summen av de 4 første halvkvadratene.

Den samlede summen av sidelengdene til de 4 første halvkvadratene er $\frac{525}{8}$

b)

4	Løs(s(n)>90) ≈ $\{n > 9.64\}$

Det vil si vi at vi må ha minst 10 halvkvadrater før summen av lengdene blir mer enn 90.

c)

CAS	
1	a(n):=b (3/4)^(n-1) $\rightarrow \; a(n) := \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} b$
2	s(n):=Sum(a(n),n,1,n) $\rightarrow \; s(n) := -4 \left(\frac{3}{4}\right)^{n} b + 4\,b$
3	Løs(s(20)=120) $\approx \; \{b = 30.1\}$

linje 1 : definerer a_n og setter $a_1 = b$
linje 2 : finner s_n
linje 3 : finner a_1 når vi vet at $s_{20} = 120$

Summen av sidelengdene i første halvkvadratet i det første halvkvadratet er 30, dvs. sidelengdene er 7,5 + 15 + 7,5

> Kandidater som oppgir sum av sidelengdene i det første halvkvadratet, kan få full uttelling.

d)
Hvis arealet til det første halvkvadratet er 72 er sidene :

$$\begin{aligned} F_1 &= 72 \\ x_1 \cdot \frac{x_1}{2} &= 72 \\ x_1^2 &= 144 \\ x_1 &= 12 \\ a_1 &= 24 \end{aligned}$$

sidene i det neste halvkvadratet blir da :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{4} \cdot 12 \\ x_2 &= 9 \\ F_2 &= 9 \cdot \frac{9}{2} \\ &= \frac{81}{2} \end{aligned}$$

Finner k: $k = F_2/F_1 = \frac{81/2}{72} = \frac{81}{144} = \frac{3^4}{2^4 \cdot 3^2} = \frac{9}{16}$

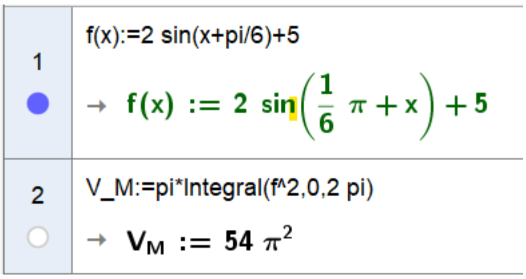
1	F_1:=72 → $F_1 := 72$
2	F_2:=81/2 → $F_2 := \frac{81}{2}$
3	k:=F_2/F_1 → $k := \frac{9}{16}$
4	F(n):=F_1*k^(n-1) → $F(n) := 72 \left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}$
5	Sum(F(n),n,1,∞) ≈ 164.57

linje 1 : definerer arealet av det første halvkvadratet.
linje 2 : definerer arealet av det andre halvkvadratet.
linje 3 : definerer k
linje 4 : finner et uttrykk for arealet av det n-te halvkvadratet.
linje 5 : finner summen av uendelig mange halvkvadrater.

Summen av arealet av uendelig mange halvkvadrater er $S = 164,6$.

Oppgave 4 (6 poeng)

a) Volum av omdreiningslegeme : $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$



b)

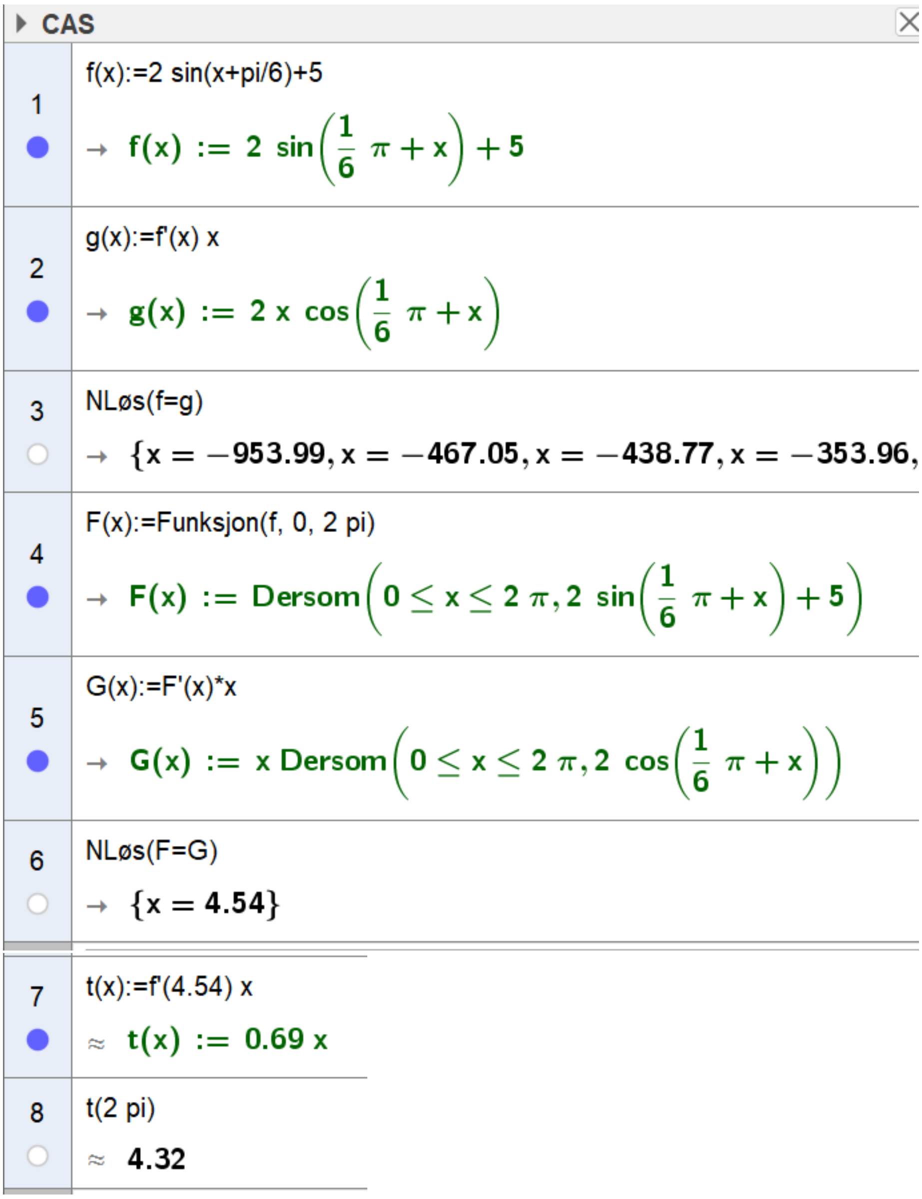
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 5 \\
g(x) &= \frac{5}{2\pi} \cdot x \\
f(x) &= g(x) \\
2\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 5 &= \frac{5}{2\pi} \cdot x \\
x = 3.88 &\vee x = 5.4
\end{aligned}
$$

Nei - denne kjeglen får ikke plass hvis den skal ha toppen i bunnen av vasen.
Vi ser at $f(x)$ og $g(x)$ har 2 skjæringspunkter.
Hvis kjeglen skal få plass må de kun tangere eller ikke ha noe skjæringspunkt.

c)

Vi har en rett linje gjennom origo : $g(x) = a \cdot x$, $b = 0$ fordi linja krysser i origo.
$g(x)$ skal tangere $f(x)$, dvs at g(x) skal ha stigningstall $f'(x)$.
Definerer $g(x) = f'(x) \cdot x$
Prøver å finne tangeringspunktet (linje 3), og får mange svar. Jeg vil bare ha det svaret som ligger i definisjonsområdet.
Avgrenser f(x) til definisjonsområdet (linje 4), og da får jeg ett tangeringspunkt.

Tangeringspunktet er altså når $x = 4.54$.
Definerer tangenten i dette punktet (linje 7), og finner radien til kjeglen når $x = 2\pi$ (linje 8), den største radien til kjeglen er altså 4.32 dm.



Alternativt :
For å løse denne kan jeg også prøve meg fram i CAS. Fant at $f(4.48) = g(4.48) = 3.08$

Likningen til linja blir da : $g(x) = \frac{3.08}{4.48}x$

$g(2\pi) = r = 4.32$

> Kandidater som bruker glider for å finne største mulig radius kan få 1 poeng.

Veiledende karaktergrenser

Karakter	1	2	3	4	5	6
Poeng		12	24	35	45	56