Utdanningsdirektoratet

Eksamen

16.11.2022 REA 3024 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.

Del 1

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^3 + \sin(\pi x)$

b) $g(x) = \ln(2 + \cos x)$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - e^{-x} + 1 \right) dx$

b) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin x^2 \, dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) Løs differensiallikningen

$$y' = \frac{2x^2}{y} \ , \quad y(0) = 3$$

b) Avgjør om $y = 2\sin(3x) + x$ er en løsning av differensiallikningen

$$y'' + 9y = 9x$$

Oppgave 4 (4 poeng)

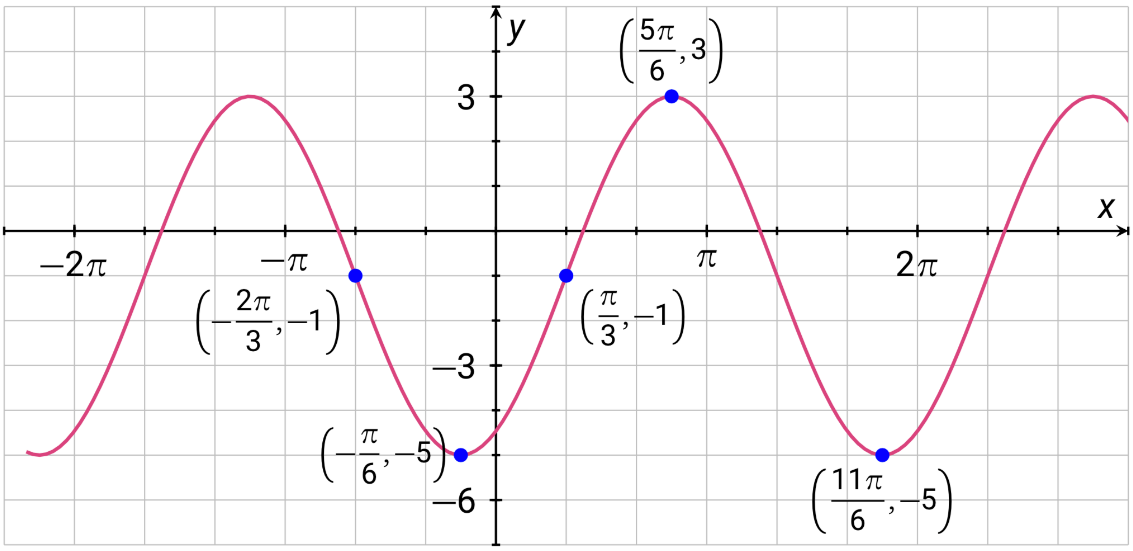
Vi har gitt en aritmetisk rekke $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

a) Bestem s_{100} dersom $a_3 = 8$ og $a_{23} = 68$.

b) Bestem s_{20} dersom $a_2 = a_1 + 4$ og $s_{10} = 240$.

Oppgave 5 (4 poeng)

På figuren ser du grafen til en trigonometrisk funksjon.



a) Bestem et eksakt funksjonsuttrykk på formen $f(x) = A\sin(cx + \varphi) + d$ som passer med grafen.

b) Løs likningen

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0, \quad x \in [0, 3\pi]$$

Oppgave 6 (8 poeng)

En kuleflate er gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z = 11$$

a) Vis at punktet $S(2, -1, 3)$ er sentrum til kuleflaten.
Bestem radiusen til kuleflaten.

Et plan α tangerer kuleflaten i punktet $P(6, -4, 3)$.

b) Bestem en likning for α.

Den rette linja gjennom P og S skjærer kuleflaten i et annet punkt Q.

c) Bestem koordinatene til Q.

Et plan β, som er parallelt med α, skjærer kuleflaten langs en sirkel. Avstanden fra β til Q er 3.

d) Bestem radiusen til skjæringssirkelen mellom β og kuleflaten.

Oppgave 7 (4 poeng)

Oline har løst en integrasjonsoppgave

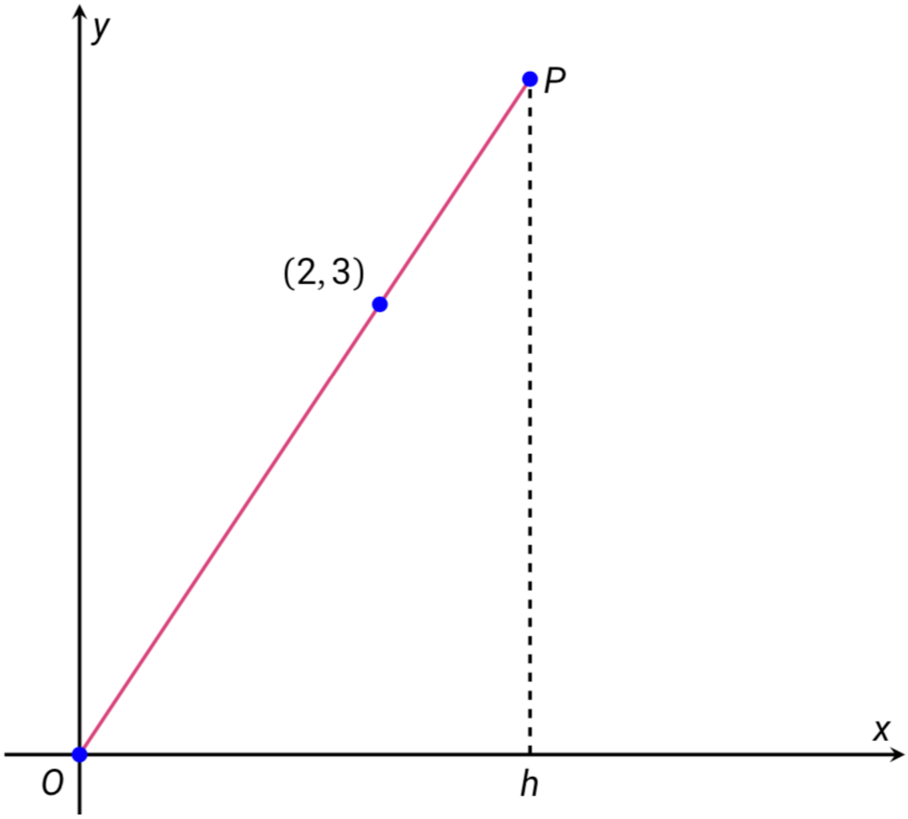
$$\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad , \text{ der } a \geq 1$$

og fått svaret $a^3 - \ln a + 3a - 3$.

a) Forklar hvordan vi kan se at Olines svar ikke kan være riktig.

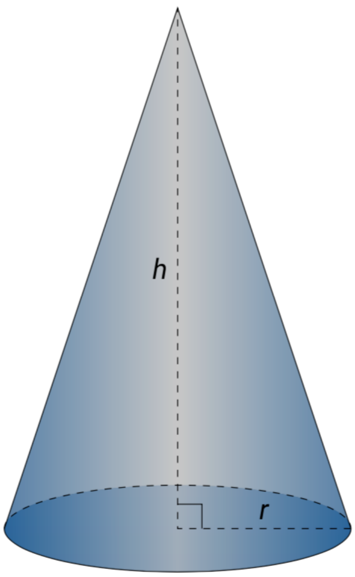
b) Bestem $f(x)$ dersom du får vite at det kun er konstantleddet (-3) som er feil.

Oppgave 8 (4 poeng)



Et linjestykke OP går fra origo til punktet P som vist på figuren ovenfor. Punktet $(2, 3)$ ligger på linjestykket. Dreier vi dette linjestykket om x-aksen, får vi et omdreiingslegeme med volum V.

a) Bestem h slik at V blir 48π.



Volumet V av en kjegle med radius r og høyde h er gitt ved $$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

b) Bruk et omdreiingslegeme til å bevise formelen for volumet av en kjegle.

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Vi har fire punkter $A(2,-3,0)$, $B(t,0,2t)$, $C(2,-3,t)$ og $T(1,-3,1)$, der $t \neq 0$.

a) Vis at likningen for planet gjennom punktene A, B og C kan skrives som

$$3x+\left(2-t\right)y=3t$$

b) Avgjør om $\triangle ABC$ er rettvinklet for noen verdier av t.

De fire punktene A, B, C og T definerer en pyramide med trekantet grunnflate.

c) Bestem t slik at volumet av pyramiden blir 10.

Oppgave 2 (4 poeng)

I en bedrift er det i dag 158 ansatte. For å lage en modell for antall ansatte i bedriften har de satt opp følgende differensiallikning:

$$A' = 0{,}1 \cdot A - 1$$

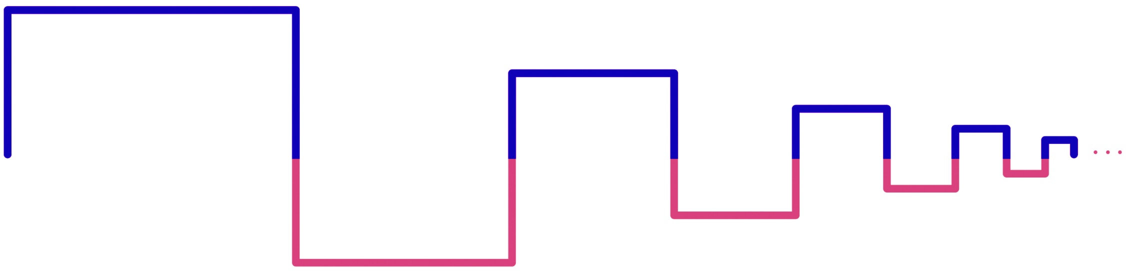
Her er $A(t)$ antall ansatte om t år.

a) Hvilke antagelser har ledelsen brukt for å sette opp differensiallikningen?

Bedriften sier at de med denne utviklingen kommer til å bli mer enn 400 ansatte i løpet av 10 år.

b) Avgjør om dette kan stemme.

Oppgave 3 (8 poeng)



Figuren ovenfor består av halve kvadrater som vender opp og ned annenhver gang. Lengdene til sidene i et halvkvadrat er alltid $\frac{3}{4}$ av lengdene til sidene i det forrige halvkvadratet.

Anta at vi starter med et halvkvadrat der sidelengdene til sammen er 24.

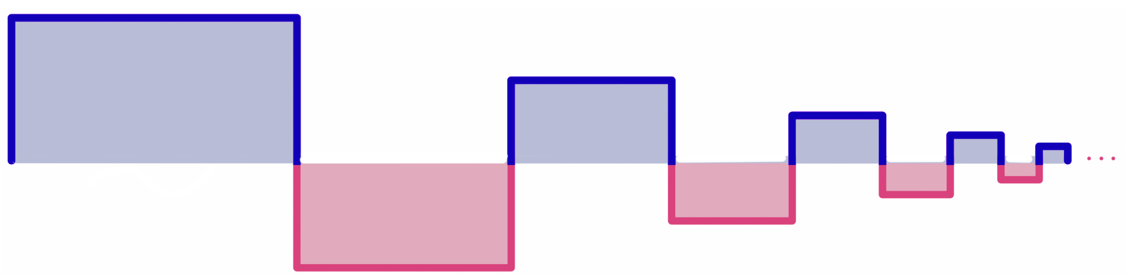
a) Bestem den samlede summen av sidelengdene til de fire første halvkvadratene.

b) Hvor mange halvkvadrater må vi minst ha for at den samlede summen av sidelengdene til halvkvadratene skal bli mer enn 90?

Anta nå at vi starter med et halvkvadrat med ukjente sidelengder.

c) Hva må sidelengdene i det første halvkvadratet være for at den samlede summen av sidelengdene til de 20 første halvkvadratene skal bli 120?

Vi skal nå se på arealene til halvkvadratene i figuren vi startet med. Det vil si at arealet til det første halvkvadratet er 72.



d) Hva blir summen av alle arealene når vi tar med uendelig mange halvkvadrater?

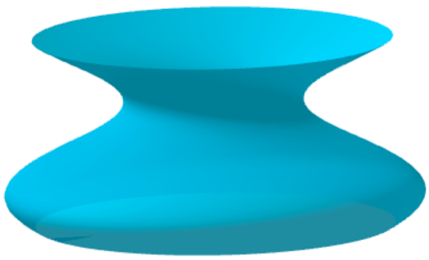
Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Når grafen til f dreies 360 grader om x-aksen, får vi et omdreiingslegeme M.

a) Bestem volumet av M.



En krukke har samme form og størrelse som M.
Enheten langs aksene er gitt i desimeter.

En kjegle skal plasseres i krukken slik at spissen til kjeglen treffer bunnen av krukken. Kjeglen skal ha samme høyde som krukken.

b) Avgjør om kjeglen får plass i krukken dersom radiusen til kjeglen er 5 dm.

c) Bestem den største radiusen kjeglen kan ha for å få plass i krukken.