# Eksamen

25.05.2022

REA3024 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

# Bokmål

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid** | 5 timer:<br>Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.<br>Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer. |
| **Hjelpemidler** | Del 1: skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.)<br><br>Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon.<br><br>Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt. |
| **Informasjon om oppgaven** | Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.<br><br>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.<br>Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen.<br><br>Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres. |
| **Kilder** | Alle andre grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet |
| **Informasjon om vurderingen** | Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider. |

# Del 1

## Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3x \cdot \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos x}$

## Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (e^x - \sin x)\,dx$

b) $\int_0^{\pi/4} \sin x \cdot \cos x \,dx$

## Oppgave 3 (2 poeng)

Løs likningen

$$2\cos(3x) = -\sqrt{3} \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

## Oppgave 4 (2 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y' + 2y = 4 \quad , \quad y(0) = 1$$

## Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad x \geq 1$$

Flatestykket $F$ er avgrenset av grafen til $f$, $x$-aksen, linjen $x=1$ og linjen $x=k$, der $k>1$.

a) Bestem $k$ slik at arealet av $F$ blir $2$.

Dersom vi dreier $F$ $360^\circ$ om $x$-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum $V$.

b) Bestem $V$ når $k=4$.

## Oppgave 6 (6 poeng)

Et plan $\alpha$ inneholder punktene $A(2,3,-7)$, $B(-2,1,-3)$ og $C(3,5,-5)$.

a) Begrunn at $2x-2y+z+9=0$ er en likning for planet $\alpha$.

En linje $\ell$ er definert av de to punktene $P(3,1,-2)$ og $Q(6,3,-4)$.

b) Vis at linjen er parallell med planet $\alpha$.

c) Bestem avstanden fra linjen $\ell$ til planet $\alpha$.

## Oppgave 7 (8 poeng)

En funksjon $f$ er gitt ved

$$f(x)=2\cos^2 x+\sin(2x) \quad , \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

a) Bestem nullpunktene til $f$.

b) Vis at vi kan skrive funksjonsuttrykket til $f$ som

$$f(x)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$$

c) Bestem toppunktene og bunnpunktene på grafen til $f$.

d) Lag en skisse av grafen til $f$.

## Oppgave 8 (4 poeng)

I en rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ er $a_2 = 8$ og $a_4 = 2$.

a) Bestem summen av de seks første leddene i rekken, dersom den er aritmetisk.

Det fins to geometriske rekker som tilfredsstiller betingelsene ovenfor.

b) Bestem summen av de seks første leddene i hver av de to geometriske rekkene.

## Oppgave 9 (2 poeng)

Bruk induksjon til å vise at

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

der $n \in \mathbb{N}$.

# Del 2

## Oppgave 1 (6 poeng)

Maria vil få oversikt over energiforbruket i boligen sin. Funksjonen $f$ gitt ved

$$f(x)=1{,}3\cdot\sin(0{,}52x-2{,}0)+2{,}4 \quad , \quad x\in[0,24]$$

er en god modell for energiforbruket per time ved tidspunktet $x$ timer etter midnatt i boligen til Maria. Her er energiforbruket målt i kWh.

a) Når på døgnet er energiforbruket i boligen størst ifølge modellen?

b) Hvor stort er energiforbruket i løpet av et døgn ifølge modellen?

En dag er det strømbrudd hos Maria. På energimåleren ser hun at hun dette døgnet hadde brukt 17 kWh før strømbruddet.

c) Omtrent når på døgnet fant strømbruddet sted?

## Oppgave 2 (6 poeng)

Gitt punktene $A(0,7,5)$, $B(1,7,2)$, $C(-2,2,0)$ og $D(1,1,h)$.

- Linjen $\ell$ går gjennom $A$ og $B$.
- Linjen $m$ går gjennom $C$ og $D$.

a) Bestem en eksakt verdi for $h$ slik at linjene skjærer hverandre.

Et plan $\alpha$ er gitt ved likningen

$$3x+(h+9)y+z=68+7h$$

b) Vis at linjen $\ell$ ligger i planet $\alpha$, og at linjen $m$ er parallell med planet $\alpha$.

c) Bestem $h$ slik at avstanden mellom linjene $\ell$ og $m$ blir 4.

## **Oppgave 3** (6 poeng)

En pasient får intravenøs behandling med en medisin.

La $M(t)$ være mengden virkestoff fra medisinen som pasienten har i blodet ved tidspunktet $t$ timer etter at behandlingen startet. Kroppen bryter ned virkestoffet med en fart som til enhver tid er proporsjonal med mengden virkestoff som er i blodet.

Pasienten får tilført $5\,\text{mg}$ av virkestoffet per time.

a) Forklar at $M(t)$ må tilfredsstille differensiallikningen

$$M'(t) = -k \cdot M(t) + 5 \quad , \quad M(0) = 0$$

24 timer etter at behandlingen startet, hadde pasienten $80\,\text{mg}$ av virkestoffet i blodet.

b) Bestem et uttrykk for $M(t)$.

Etter at pasienten har fått intravenøs behandling i 24 timer, blir det bestemt at pasienten skal få mer medisin per time.

c) Hvor mye virkestoff må pasienten få hver time dersom mengden virkestoff i blodet skal være $150$ mg ett døgn senere?

## **Oppgave 4** (6 poeng)

a) Vis at

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

En rekke er gitt ved

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

b) Bruk resultatet fra oppgave a) til å begrunne at

$$s_5 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right)$$

c) Bruk blant annet det du gjorde i oppgave a), til å begrunne at

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

d) Forklar at

$$s_n > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$$

Bruk dette til å begrunne at den uendelige rekken nedenfor konvergerer.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$