Eksamen R2 - REA3024 - gammel reform

Høst 2023

Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (poeng)

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(4x-1) \\ f'(x) &= -4\sin(4x-1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos}{\sin} \\ g'(x) &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -1 - \frac{1}{\tan^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Oppgave 2 (poeng)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (x^3 + 2x)\ dx &= [\frac{1}{4}x^4 + x^2]_{-1}^{1} \\ &= (\frac{1}{4}+1) - (\frac{1}{4}+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Integralet blir null, altså er det like stort areal under som over x-aksen i dette intervallet.

Oppgave 3 (poeng)

a)

$$
\begin{aligned}
\int x \cdot e^{1-x^2} &= \int x \cdot e^u \cdot \frac{1}{-2x} + du \\
MR: u = 1 - x^2 \ u' &= -2x \\
&= -\frac{1}{2} \int e^u \ du \\
&= -\frac{1}{2} e^u + C \\
&= -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x+1}{x^2+3x+2} + dx &= \int \frac{5}{x+2} - \frac{3}{x+1} \ dx \\
MR: 3x+1 &= A(x+1) + B(x+2) \\
3 \cdot (-2) + 1 &= -A \\
A &= 5 \\
3 \cdot (-1) + 1 &= B \\
B &= -3 \\
\int \frac{3x+1}{x^2+3x+2} + dx &= 5 \int \frac{1}{x+2} \ dx - \int 3 \frac{1}{x+1} \ dx \\
&= 5 \ln|x+2| - 3 \ln|x+1| + C
\end{aligned}
$$

Oppgave 4 (poeng)

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + 4x^2 + 16x^4 + ... \\
k &= 4x^2 \\
4x^2 &> -1 \text{for alle x} \\
4x^2 &< 1 \\
4(x^2 - \frac{1}{4}) &< 0 \\
4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) &< 0 \\
x &\in \Big\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Big\rangle
\end{aligned}
$$

Konvergensområdet er altså $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$

Oppgave 5 (poeng)

a)

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{a_1}{1-k} = 8 \\
\frac{4}{1-k} &= 8 \\
1-k &= \frac{1}{2} \\
k &= \frac{1}{2} \\
s_4 &= 4+2+1+\frac{1}{2} \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_4 + a_7 &= 114 \\
a_1 &= a_4 - 3d \\
a_7 &= a_4 + 3d \\
a_4 - 3d + a_4 + a_4 + 3d &= 114 \\
3a_4 &= 114 \\
a_4 &= 38
\end{aligned}
$$

Oppgave 6 (poeng)

a)
Leser ut fra grafen at amplituden $A = 2$, likevektslinje $d = 1$ og peroden $p = 4$.

$c = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Forskyvningen =1 mot høyre, altså er $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\sin\big(\frac{\pi}{2}(x-1)\big) + 1 \\
&= 2\sin\big(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2})\big) + 1
\end{aligned}
$$

b)
Hvis vi vil ha en cosinusfunksjon kan vi forskyve sinusfunksjonen.
Negativt fortegn foran A gir at referansepunktet til cosinus er bunn og ikke topp.
Bunnpunktet er på y-aksen, altså er forskyvningen 0.

$$
f(x) = -2\cos(\frac{\pi}{2}x)
$$

eller vi kan gjøre slik :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2})\right) + 1 \\ &= 2(\sin(\frac{\pi}{2}x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2}x) \cdot \sin(\frac{\pi}{2})) + 1 \\ &= 2(\sin(\frac{\pi}{2}x) \cdot 0 - \cos(\frac{\pi}{2}x) \cdot 1) + 1 \\ &= -2\cos(\frac{\pi}{2}x) + 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{gathered} f(x) = 2 \\ 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1 = 2 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \vee \frac{\pi}{2}(x-1) = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\ \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{6} + n \cdot 2 \vee \frac{1}{2}(x-1) = \frac{5}{6} + n \cdot 2 \\ x - 1 = \frac{1}{3} + n \cdot 4 \vee x - 1 = \frac{5}{3} + n \cdot 4 \\ x = \frac{4}{3} + 4n \vee x = \frac{8}{3} + 4n \\ x \in \left\langle \frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right\rangle \end{gathered}$$

Oppgave 7 (poeng)

a)

$$\begin{aligned} \alpha \ : \ x - 2y + 2z + 1 = 0 \\ A &= (4, 2, 2) \\ \vec{n}_\alpha &= [1, -2, 2] = \vec{r}_l \\ l &: [4 + t, 2 - 2t, 2 + 2t] \end{aligned}$$

b) Avstand fra A til α

$$\begin{aligned} q &= \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ q &= \frac{|1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|4 - 4 + 4 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

c) B ligger like langt fra α som A på andre siden av planet på linja l.
Finner t-verdien til skjæringspunktet S mellom linja og planet, ved å sette inn generelle koordinater

fra linja inn i likningen til planet.

$$
\begin{aligned}
(4+t)-2(2-2t)+2(2+2t)+1&=0\\
4+t-4+4t+4+4t+1&=0\\
9t&=-5\\
t_S&=-\frac{5}{9}\\
t_B=2\cdot t_S&=-\frac{10}{9}\\
B&=\left(4-\frac{10}{9},2-2\left(-\frac{10}{9}\right),2+2\left(-\frac{10}{9}\right)\right)\\
&=\left(\frac{36-10}{9},\frac{18+20}{9},\frac{18-20}{9}\right)\\
&=\left(\frac{26}{9},\frac{38}{9},\frac{-2}{9}\right)
\end{aligned}
$$

Oppgave 8 (poeng)

a) Linje gjennom A og E :

$$\begin{aligned} A &= (4,0,0) \\ E &= (3,1,3) \\ \overrightarrow{AE} &= [3-4, 1-0, 3-0] = [-1,1,3] \\ l &= (4,0,0) + t(-1,1,3) \end{aligned}$$

Linje gjennom O og D :

$$\begin{aligned} O &= (0,0,0) \\ D &= (1,1,3) \\ \overrightarrow{OD} &= [1-0, 1-0, 3-0] = [1,1,3] \\ l &= (0,0,0) + s(1,1,3) \end{aligned}$$

Setter de generelle koordinatene lik hverandre

$$\begin{aligned} 4-t &= s \\ t &= s \\ 3t &= 3s \\ t &= s = 2 \end{aligned}$$

Da blir koordinatene til toppunktet :

$$T = (2,2,6)$$

b) Volum av hele pyramiden :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OT}| \\ \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OD} &= [4,0,0] \times [0,4,0] \\ &= [0,0,16] \\ V &= \frac{1}{3}|[0,0,16] \cdot [2,2,6]| \\ &= \frac{16 \cdot 6}{3} = 16 \cdot 2 = 32 \end{aligned}$$

Kan også løses ved 3x3-matrise.

Finner så volum av toppen :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} &= [1-3, 1-1, 3-3] = [-2, 0, 0] \\
\overrightarrow{DG} &= [1-1, 3-1, 3-3] = [0, 2, 0] \\
\overrightarrow{DT} &= [2-1, 2-1, 6-3] = [1, 1, 3] \\
V &= \frac{1}{3}|(\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DG}) \cdot \overrightarrow{DT}| \\
\overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DG} &= [-2, 0, 0] \times [0, 2, 0] \\
&= [0, 0, -4] \\
V &= \frac{1}{3}|[0, 0, -4] \cdot [1, 1, 3]| \\
&= \frac{12}{3} = 4
\end{aligned}$$

Volum av den avkortede pyramiden blir da V=32-4=28

Oppgave 9 (poeng)

a)

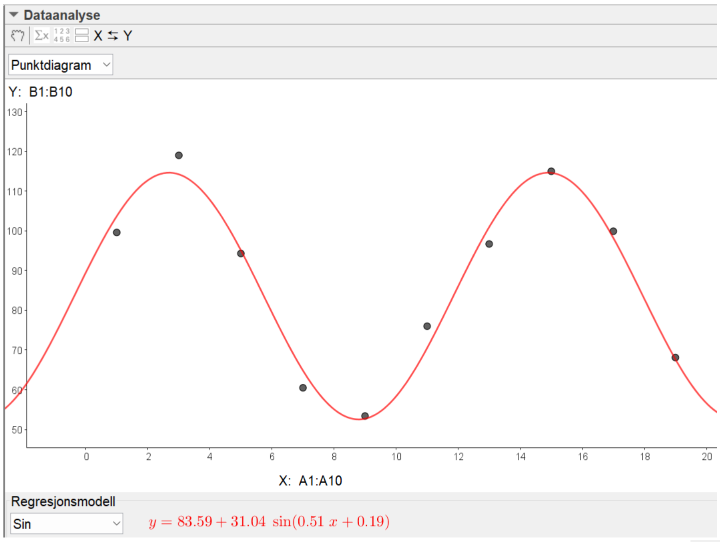
$$\begin{aligned}
y' + 2y &= 1 \\
(y \cdot e^{2x})' &= e^{2x} \\
\int (y \cdot e^{2x})' \, dx &= \int e^{2x} \, dx \\
y \cdot e^{2x} &= \frac{1}{2}e^{2x} + C \\
y &= \frac{1}{2} + C \cdot e^{-2x} \\
3 &= \frac{1}{2} + C \cdot e^{0} \\
C &= \frac{5}{2} \\
y &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot e^{-2x}
\end{aligned}$$

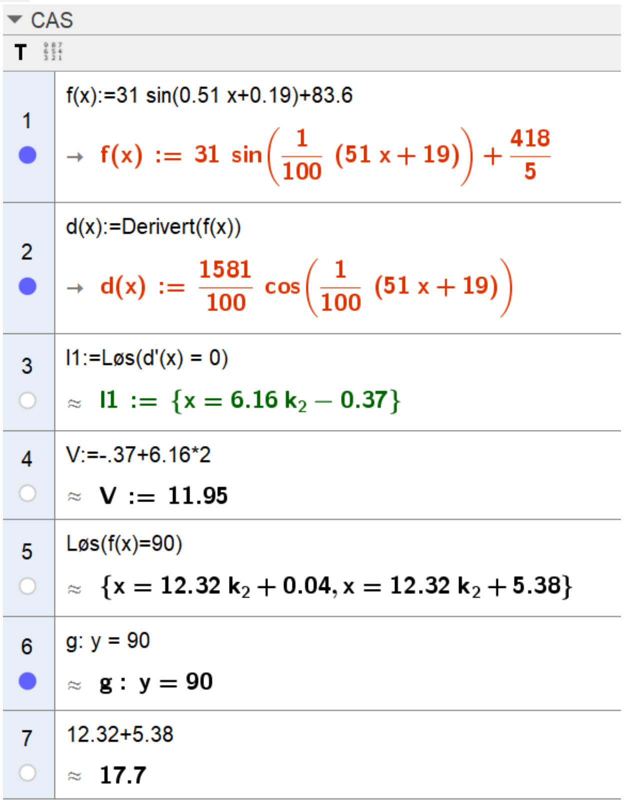
b)

$$
\begin{aligned}
(4+x^2)\cdot y' &= 2x - 2xy \\
(4+x^2)\cdot y' &= -2x(y-1) \\
\int \frac{1}{y-1}\ dx &= \int \frac{-2x}{4+x^2}\ dx \\
\text{MR :}& \\
\int \frac{-2x}{4+x^2}\ dx &= \int \frac{-2x}{u}\cdot\frac{1}{2x}\ du \\
u = 4+x^2\ ,\ u' = 2x & \\
&= -\int \frac{1}{u}\ du \\
&= -\ln|4+x^2| + C \\
\\
ln|y-1| &= -\ln|4+x^2| + C \\
e^{ln|y-1|} &= e^{-\ln|4+x^2|+C} \\
&= e^{\ln|(4+x^2)^{-1}|+C} \\
y-1 &= \frac{C}{4+x^2} \\
y &= 1 + \frac{C}{4+x^2} \\
y &= \frac{x^2+C}{x^2+4}
\end{aligned}
$$

DEL 2

Oppgave 1 (poeng)





a) Legger tallene inn i regnearket i Geogebra, bruker regresjonsanalyse og velger sinus-modell.

$$f(x) = 31 sin(0.51x + 0.19) + 83.6$$

b) Vannstanden øker raskest i vendepunktet, dvs når den deriverte har et ekstremalpunkt. Det første punktet der grafen er på vei opp gjennom likevektslinja er når x=11.95, dvs kl.12.00 om formiddagen.

c) Regner med at det menes at slepet skal skje på dagtid.
Vannstanden er over 90cm fra ca. kl.12.20 til 17.40.
Det vil si at de senest må starte kl.15.40.

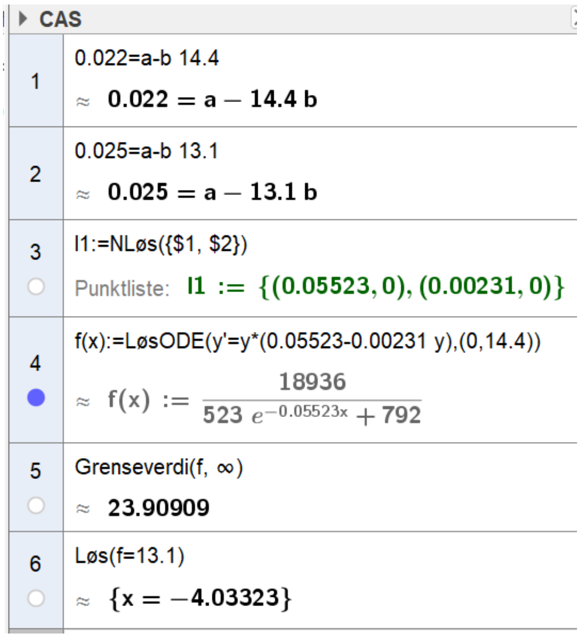
Oppgave 2 (poeng)

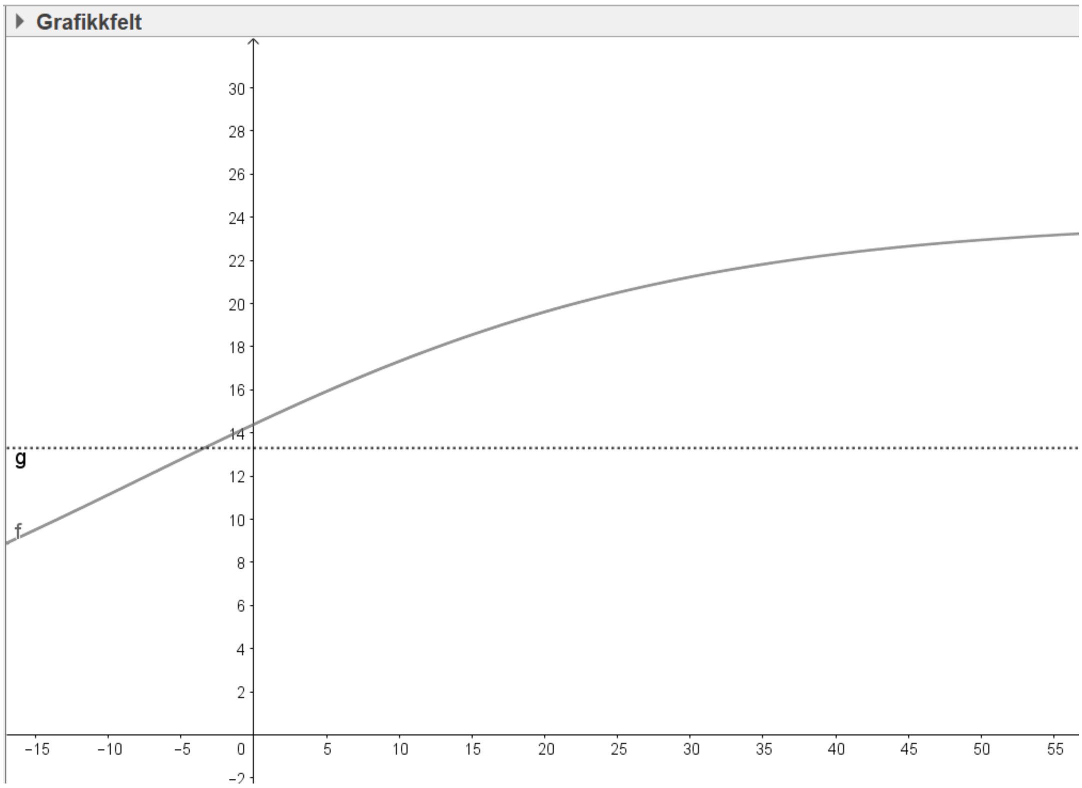
a)
Linje 1-3 : Setter opp likningssett og finner a og b, som skulle vises i oppgaven.

$$\frac{N'}{N} = a - b \cdot N$$
$$\frac{0.022 \cdot 14.4}{14.4} = a - b \cdot 14.4$$
$$\frac{0.025 \cdot 13.1}{13.1} = a - b \cdot 13.1$$

b
Linje 4 : Løser diff-likningen

c)
Over tid vil folketallet stablilseres på ca.24 millioner
Linje 5 : Finner grenseverdien når t går mot uendelig.





Oppgave 3 (poeng)

a)
Linje 1-4 : Definerer punktene
Linje 5 : Finner vektorproduktet
Linje 6 : regner ut areal av trekanten ABC $= 3/2$
, som er svar på oppgaven.

CAS	
1	A:=(1,0,-1) $\rightarrow$ $A := (1, 0, -1)$
2	B:=(1,1,0) $\rightarrow$ $B := (1, 1, 0)$
3	C:=(-1,4,4) $\rightarrow$ $C := (-1, 4, 4)$
4	D:=(t,3-t^2,2 t+5) $\rightarrow$ $D := (t, 3 - t^2, 2\,t + 5)$
5	v:=Vektorprodukt(Vektor(A, B),Vektor(A,C)) $\rightarrow$ $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
6	arealTrekant:=1/2 abs(v) $\rightarrow$ $\text{arealTrekant} := \frac{3}{2}$

b)
Finner en linje som går gjennom D og er normal på planet. Denne linja vil skjære planet i tangeringspunktet med kula.

Linje 7 : Finner parameterframstillingen til linja

Linje 8 : Definerer punktet D når t=1

Linje 9 : Finner linja når t=1

Linje 10-12 : definerer koordinatene

Linje 13 : Definerer planet

Linje 14-15 : setter inn koordinatene i likningen til planet for å finne s-verdien til skjæringspunktet T.

Linje 16 : Lager en generell T som punkt på linja.

Linje 17 : Finner koordinatene til skjæringspunktet mellom linje og plan, som altså er tangeringspunktet mellom kula og planet, T(-1/3,14/3,13/3)

CAS	
7	Linje(D, v) $\rightarrow$ $X = (t, 3 - t^2, 2\,t + 5) + \lambda\,(1, -2, 2)$
8	Db:=(1, 3 - 1, 2 + 5) $\rightarrow$ $Db := (1, 2, 7)$
9	Linje(Db, v) $\rightarrow$ $X = (1, 2, 7) + \lambda\,(1, -2, 2)$
10	x1:=1+s $\rightarrow$ $x1 := s + 1$
11	y1:=2-2s $\rightarrow$ $y1 := -2\,s + 2$
12	z1:=7+2s $\rightarrow$ $z1 := 2\,s + 7$
13	α:=Plan(A,B,C) $\rightarrow$ $\alpha : x + y\,(-2) + z \cdot 2 = -1$
14	ByttUt(α, {x,y,z}, {x1,y1,z1}) $\rightarrow$ $9\,s + 11 = -1$
15	Løs(9s + 11 = -1) $\rightarrow$ $\left\{ s = \frac{-4}{3} \right\}$
16	T:=(r+1,2-2 r,7+2 r) $\rightarrow$ $T := (r + 1, 2 - 2\,r, 7 + 2\,r)$
17	Tb:=ByttUt(T, r, -4/3) $\rightarrow$ $Tb := \left(\frac{-1}{3}, \frac{14}{3}, \frac{13}{3} \right)$

c)
Radien til kula er lik avstanden fra senter D, til planet , $q(t) = \frac{1}{3}(2t^2 + 5t + 5)$, se linje 18-19

18	Avstand(D, α) $\rightarrow \sqrt{\frac{1}{9}} \left(2\,(t^2 - 3) - 2\left(-2\,t - \frac{1}{2} - 5\right) + t\right)$
19	q(t):=sqrt(1 / 9) (2 (t² - 3) - 2 (-2 t - 1 / 2 - 5) + t) $\rightarrow q(t) := \frac{2}{3} t^2 + \frac{5}{3} t + \frac{5}{3}$

d)
Vi har et uttrykk for radien til kula, finner den minste radien ved å sette den deriverte lik null.
Da får vi at $T = (-\frac{1}{4}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2})$

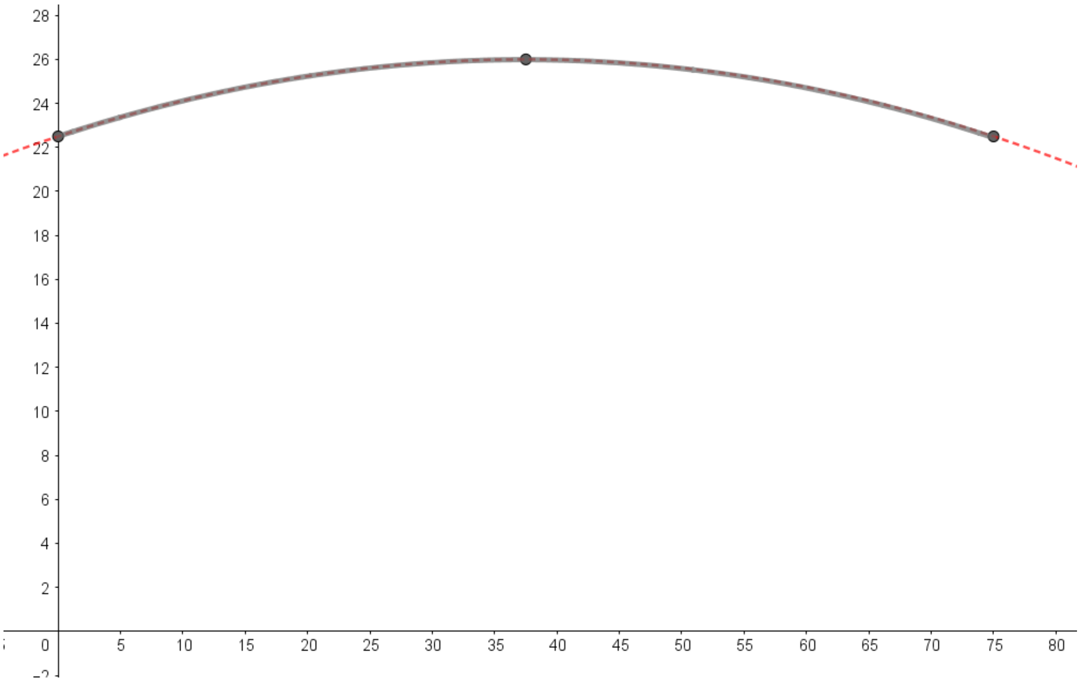
linje 20 : Setter den deriverte til avstanden lik null
linjer 21 : setter denne t-verdien inn i det generelle punktet T.

20	Løs(q'(t)=0) $\rightarrow \left\{t = \frac{-5}{4}\right\}$
21	Td:=ByttUt(T, r, -5/4) $\rightarrow Td := \left(\frac{-1}{4}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

Oppgave 4 (poeng)

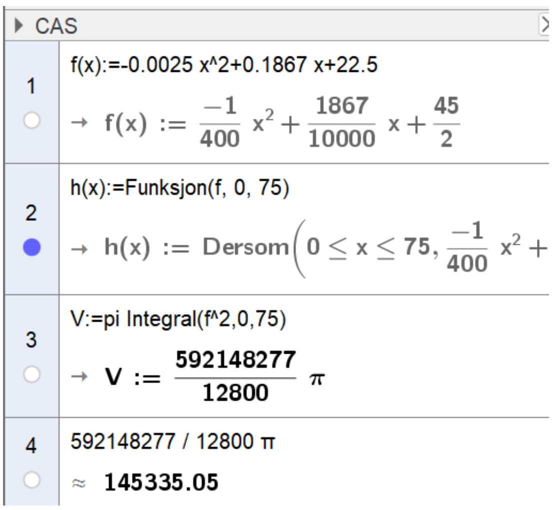
a)
Beskriver kanten av tønna med en funksjon.
Legger inn punktene (0,22.5), (37.5,26),(75,22.5), inn i regnearket. Beuker regresjon og finner funksjonsuttrykket

$$f(x) = -0,0025x^2 + 0.1867x + 22.5$$



Så dreier jeg dette rundt x-aksen for å finne volum av tønna.

$$V = \pi \int_0^7 5f(x)^2 \; dx$$



Altså er volum av tønna $145335\ cm^3 = 145,3\ dm^3 \approx 145,3\ ltr.$