Eksamen R2 - REA3058 - ny reform

Høst 2023

Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (2 poeng)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^3+2x)dx &= \left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-1}^{1}\\ &= \left(\frac{1}{4}+1\right)-\left(\frac{1}{4}+1\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Integralet blir null, det betyr at arealet under x-aksen er lik arealet over x-aksen i dette intervallet.

Kommentar fra sensorveiledningen
Det gis 1 poeng for rett svar og 1 poeng for tolkning av svaret.

Oppgave 2 (4 poeng)

Finner skjæringspunktene

$$\sin x = \cos x$$
$$x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{-3\pi}{4}$$

Finner arealet som er avgrenset av grafene.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \; dx &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)-\left(\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\\ &= 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

> Kommentar fra sensorveiledningen
> Det gis 1 poeng for rett strategi for å bestemme x-verdiene til skjæringspunkta, 1 poeng for å regne ut disse korrekt, 1 poeng for å sette opp rett integral og 1 poeng for å regne ut arealet korrekt.

Oppgave 3 (2+2 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
a_1 &= 4 \\
S &= \frac{a_1}{1-k} = 8 \\
\frac{4}{1-k} &= 8 \\
1-k &= \frac{1}{2} \\
k &= \frac{1}{2} \\
S &= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} \\
S_4 &= 4 \cdot \frac{\frac{1}{2^4} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= \frac{4(\frac{1}{16} - 1)}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= (\frac{1}{4} - 4) : (\frac{1}{2} - 1) = (-\frac{15}{4}) : (-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{15}{4} \cdot 2 = \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Eller vi kan regne den ut slik :

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

b) I en aritmetisk rekke vil avstanden fra a_1 til a_4 være lik avstanden fra a_4 til a_7. Da får vi at :

$$\begin{aligned}
a_1 + a_4 + a_7 &= 114 \\
(a_4 - 3d) + a_4 + (a_4 - 3d) &= 114 \\
3 \cdot a_4 &= 114 \\
a_4 &= 38
\end{aligned}$$

> Kommentar fra sensorveiledningen
> 3a Det kan gis 1 poeng dersom kandidaten bruker en riktig strategi, men gjør feil i utregningene. 3b Det kan gis1 poeng dersom kandidaten bruker en riktig strategi, men ikke finner riktig svar. Kandidater som kommer frem til riktig svar ved gjett og sjekk kan få full uttelling

Oppgave 4 (2+2 poeng)

$$x - 2y + 2z + 1 = 0$$
$$A = (4, 2, 2)$$

a)
Normalvektoren til planet er parallell med retningsvektoren til linja : $\vec{r_l} = [1, -2, 2]$

Da blir parameterframstillingen til linja :

$$l : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

b)
Avstand fra punkt til plan :

$$\begin{aligned} q &= \frac{|4 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|4 - 4 + 4 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Kommentar fra sensorveiledningen
4a For å få full uttelling må kandidaten kommunisere hvordan retningsvektoren til linjen er funnet. Dersom kandidaten bruker$\vec{n} = [1, -2, 2]$, er det for eksempel nok å kommentere at dette er en normalvektor til planet. Riktig svar uten begrunnelser kan gi 1 poeng. 4b Kandidater som bruker en strategi som kan gi oss avstanden, men som ikke klarer å gjennomføre strategien kan få 1 poeng.

Oppgave 5 (2+2 poeng)

linje 1-3 Definerer variabler
linje 4 Deler intervallet fra -2 til 2 i 100 biter med bredde dx
linje 6-7 Definerer funksjonen $f(x) = x^2 - 1$
linje 9 Setter variablen S=0, dette er summen
linje 10-12 en for løkke som kjører gjennom verdier i intervallet
linje 11 finner neste x-verdi som er dx større enn den forrige
linje 12 regner ut f(x)*dx som er areal av et rektangel, og legger denne til i summen.

a) Eleven bruker her øvre rektangelsum til å finne arealet under grafen til $f(x)$.

b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
x^2 - 1 &= 0 \\
x &= \pm 1 \\
\int x^2 - 1 \; dx &= \frac{1}{3}x^3 - x \\
\int_{-2}^{-1} x^2 - 1 \; dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)\right) \\
&= \left(\frac{-1}{3} + 1\right) - \left(\frac{-8}{3} + 2\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{-2}{3} \\
&= \frac{4}{3} \\
\int_{-1}^{1} x^2 - 1 \; dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{-1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{-4}{3} \\
\int_{1}^{2} x^2 - 1 \; dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{1}^{2} \\
&= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 1\right) \\
&= \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{-2}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Det totale arealet blir da :

$$\frac{4}{3} + |\frac{-4}{3}| + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Kommentar fra sensorveiledningen
5a For å få full uttelling må kandidaten kommentere at det er arealet mellom x-aksen og grafen til f mellom $x = -2$ og $x = 2$ som regnes ut. Kandidater som kun sier noe om at det er et integral som regnes ut, kan få 1 poeng. 5b Kandidater som bare regner ut $\int_{-2}^{2} f(x) \; dx$ kan få 1 poeng. Her kan det ikke gis full uttelling selv om det er følgefeil fra oppgave a).

Oppgave 6 (2 poeng)

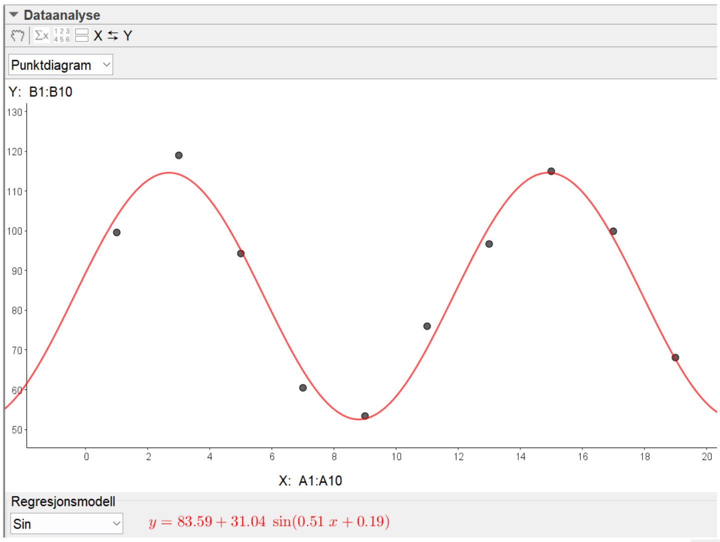
Deler opp sideflaten i 2 trekanter, $\triangle$BCF og $\triangle$ CGF

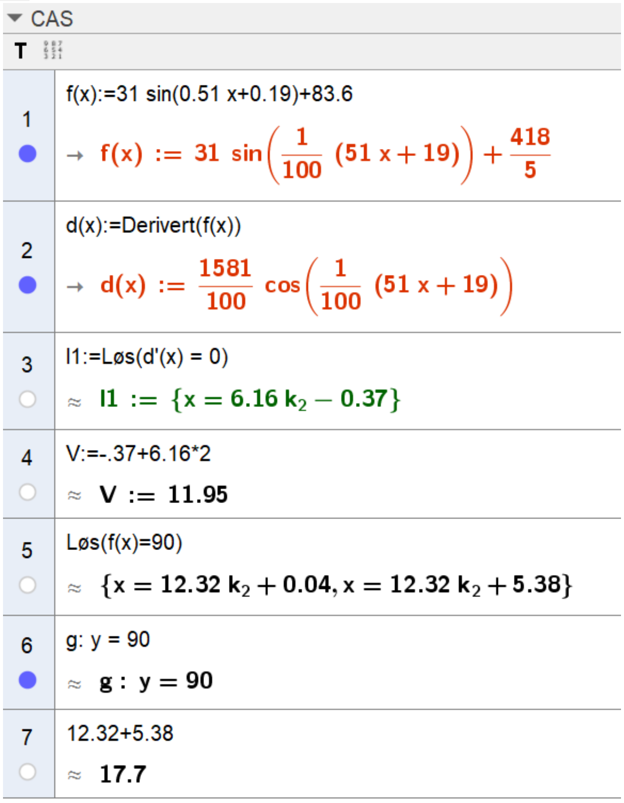
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= [0-4, 4-4, 0-0] = [-4, 0, 0] \\
\overrightarrow{BF} &= [3-4, 3-4, 3-0] = [-1, -1, 3] \\
\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF} &= \left[\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right] \\
&= \Big[0-0, -(-12-0), 4-0 \Big] \\
&= \Big[0, 12, 4 \Big] \\
|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF}| &= \sqrt{0 + 144 + 16} \\
&= \sqrt{160} = \sqrt{16 \cdot 10} = 4\sqrt{10} \\
\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF}| &= 2\sqrt{10} \\
\overrightarrow{GF} &= [3-1, 3-3, 3-3] = [2, 0, 0] \\
\overrightarrow{GC} &= [0-1, 4-3, 0-3] = [-1, 1, -3] \\
\overrightarrow{GF} \times \overrightarrow{GC} &= \left[\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
&= \Big[0-0, -(-6-0), 2-0 \Big] \\
&= \Big[0, 6, 2 \Big] \\
|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF}| &= \sqrt{0 + 36 + 4} \\
&= \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10} \\
\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BF}| &= \sqrt{10} \\
\text{Areal BCFG} &= 2\sqrt{10} + \sqrt{10} = 3\sqrt{10} \approx 9.49
\end{aligned}
$$

Kommentar fra sensorveiledningen
For å få full uttelling, må kandidaten bruke relevant vektorregning. Kandidater som regner ut arealet uten å bruke vektorregning, kan få 1 poeng.

DEL 2

Oppgave 1 (2+2+2 poeng)





a) Legger tallene inn i regnearket i Geogebra, bruker regresjonsanalyse og velger sinus-modell.

$$f(x) = 31 sin(0.51x + 0.19) + 83.6$$

b) Vannstanden øker raskest i vendepunktet, dvs når den deriverte har et ekstremalpunkt. Det første punktet der grafen er på vei opp gjennom likevektslinja er når x=11.95, dvs kl.12.00 om formiddagen.

c) Regner med at det menes at slepet skal skje på dagtid.
Vannstanden er over 90cm fra ca. kl.12.20 til 17.40.
Det vil si at de senest må starte kl.15.40.

Kommentar fra sensorveiledningen
a) For å få full uttelling, må det velges en rimelig modell som passer med tallene i tabellen.
b) Kandidater som løser likningen $f''(x) = 0$ behøver ikke å argumentere for at det tidspunktet vannstanden øker raskest dersom kandidaten ser dette ut fra grafen til f. Kandidaten behøver ikke å regne om til klokkeslett for å få full uttelling, selv om dette er ønskelig.
c) Ordet «senest» kan tolkes som senest denne dagen, eller senest innenfor en periode med flo. Begge tolkningene kan gi full uttelling.

Oppgave 2 (2+2+2 poeng)

a) Prøver å finne et mønster:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1+5=6 \\
a_3 &= 1+5+10=16 \\
a_4 &= 1+5+10+15=31 \\
a_5 &= 1+5+10+15+20=51
\end{aligned}$$

Rekursiv sammenheng :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= a_1+5=a_1+1\cdot 5 \\
a_3 &= a_2+10=a_2+2\cdot 5 \\
a_4 &= a_3+15=a_3+3\cdot 5 \\
a_{n+1} &= a_n+5\cdot n
\end{aligned}$$

Her ser det ut til at vi legger til summen av en annen rekke :

$$\begin{aligned}
b_1 &= 0\cdot 5=0 \\
b_2 &= 1\cdot 5=5 \\
b_3 &= 2\cdot 5=10 \\
b_4 &= 3\cdot 5=15 \\
b_n &= (n-1)\cdot 5=5(n-1) \\
s_n &= \frac{5n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

Eksplisitt formel blir da : $a_n = 1+\frac{5n(n-1)}{2}$

b)
Eksplisitt formel (se a)):

$$a_n = a_1 + s_n = 1 + \frac{5n(n-1)}{2}$$

c)
Påstand :

$$a_n = \frac{5n(n-1)}{2} + 1$$

P(1)

$$a_1 = \frac{5(1-1)}{2} + 1 = 0 + 1 = 1, \text{sann for } n = 0$$

P(n)

$$a_n = \frac{5n(n-1)}{2} + 1, \text{antas sann}$$

P(n+1)
Rekursiv:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + 5n \\
&= \frac{5n(n-1)}{2} + 1 + 5n \\
&= \frac{5n(n-1) + 10n}{2} + 1 \\
&= \frac{5n^2 - 5n + 10n}{2} + 1 \\
&= \frac{5n^2 + 5n}{2} + 1 \\
&= \frac{5n(n+1}{2} + 1
\end{aligned}$$

Eksplisitt

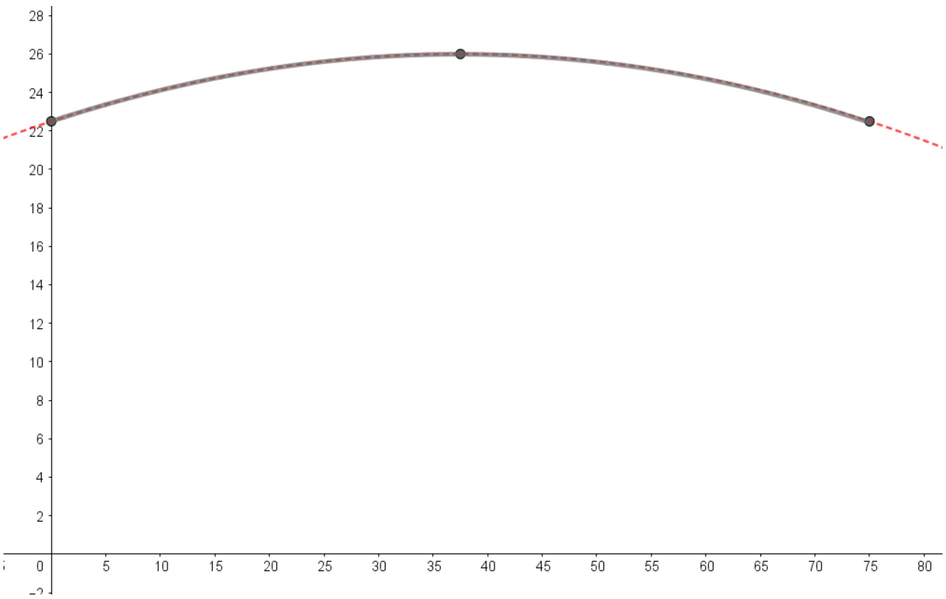
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{5n(n-1)}{2} + 1 \\
a_{n+1} &= \frac{5(n+1)n}{2} + 1 \\
&= \frac{5n(n+1)}{2} + 1
\end{aligned}$$

Kommentar fra sensorveiledningen
a) Det gis 1 poeng for rett rekursiv sammenheng og 1 poeng for en god begrunnelse.
b) Dersom kandidaten har en riktig strategi, men gjør tellefeil eller programmeringsfeil, kan det gis 1 poeng.
c) Det gis 1 poeng for rett formel for Pn og 1 poeng for induksjonsbeviset.

Oppgave 3 (4 poeng)

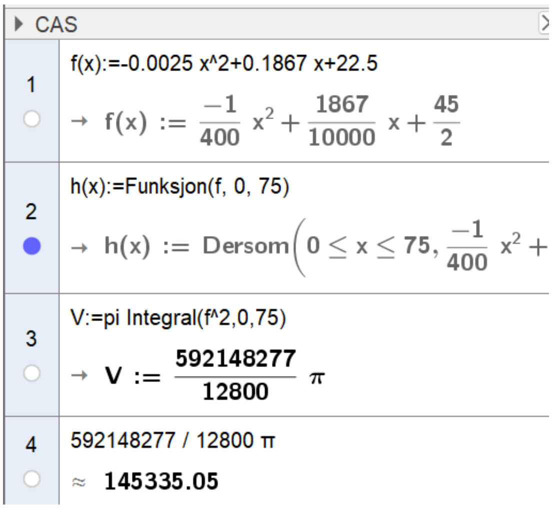
Beskriver kanten av tønna med en funksjon.
Legger inn punktene (0,22.5), (37.5,26),(75,22.5), inn i regnearket. Beuker regresjon og finner funksjonsuttrykket

$$f(x) = -0,0025x^2 + 0.1867x + 22.5$$



Så dreier jeg dette rundt x-aksen for å finne volum av tønna.

$$V = \pi \int_0^7 5f(x)^2 \, dx$$



Altså er volum av tønna $145335\ cm^3 = 145,3\ dm^3 \approx 145,3\ ltr.$

> Kommentar fra sensorveiledningen
> Det gis 2 poeng for å finne en funksjon som kan brukes til å bestemme volumet. Det gis i tillegg 1 poeng for å velge rett strategi med rett integral og i tillegg 1 poeng for å regne ut dette integralet rett.

Oppgave 4 (2+2 poeng)

a)
Vi vet at $M_{max} = 31,2$ og $M_{min} = 18,2$. Avstand fra topp til bunn blir da : $31,2 - 18,2 = 13$, linje 1

Da vil amplituden være $\frac{13}{2} = 6,5$

Likevektslinjen ligger på $y = 18,2 + 6,5 = 24,7$

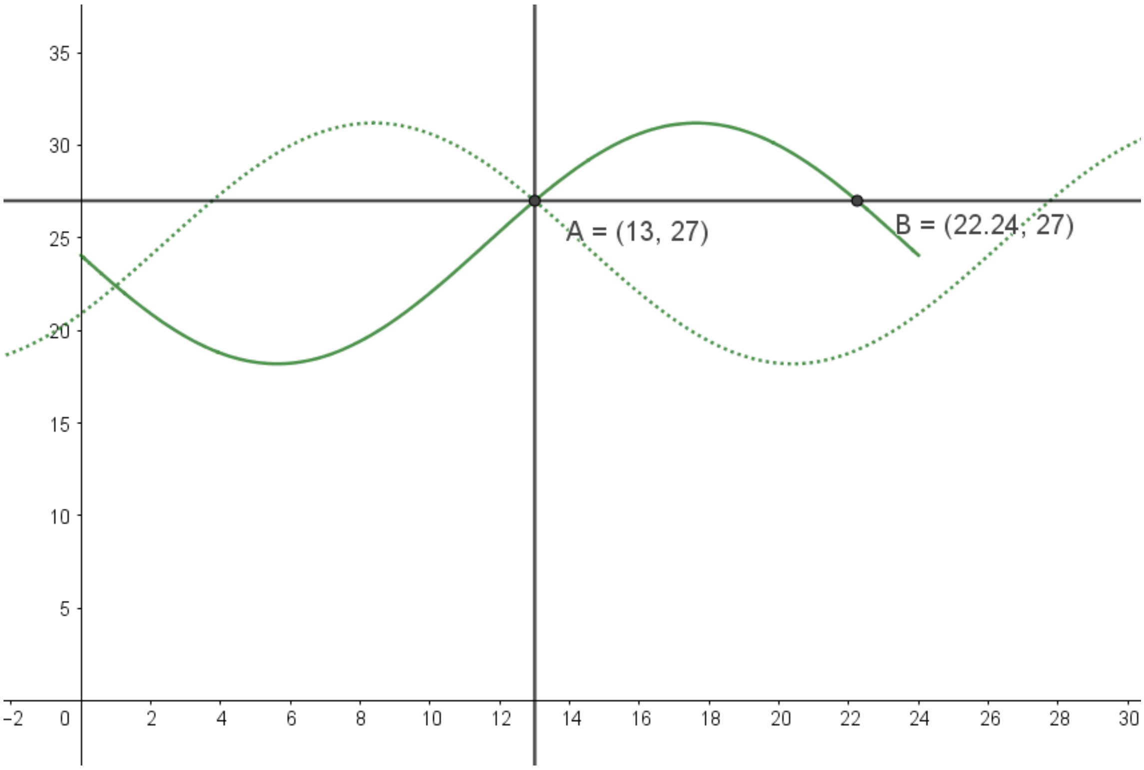
Perioden er 1 døgn, altså 24 timer, da blir $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

b)
Finner forskyvingen ved å løse likningern $M(13) = 27$, altså at forurensningen er 27 kl.13.00, linje 2 og3
Vi får da to løsninger, men det er bare én av dem som har dette som første punkt til høyre for y-aksen, se grafen.

Det andre punktet er : (22.24 , 27), altså er forurensningen 27 også kl.22.15, linje 9.

CAS

1	31.2-18.2 → $\mathbf{13}$
2	M(x):=6.5 sin(pi/12(x-a))+24,7 ≈ $\mathbf{M(x) := 6.5\ sin(-0.26\ a + 0.26\ x) + 24.7}$
3	Løs(M(13)=27) ≈ $\mathbf{\{a = -24\ k_1 + 11.62, a = -24\ k_1 + 2.38\}}$
4	M_1(x):=6.5sin(-0.2617993877991 11.62 + 0.2617993877991x) + 24.7 ≈ $\mathbf{M_1(x) := 6.5\ sin(0.26\ x - 3.04) + 24.7}$
5	M_2(x):=6.5sin(-0.2617993877991 2.38 + 0.2617993877991x) + 24.7 → $\mathbf{M_2(x) := \frac{13}{2}\ sin\left(\frac{1}{500000000000000}\ (130899693899550\ x - 311541271480929)\right)}$
6	f: y = 27 → $\mathbf{f : y = 27}$
7	eq1: x = 13 → $\mathbf{eq1 : x = 13}$
8	m(x):=Funksjon(6.5sin(0.2617993877991x - 3.042108886226) + 24.7,0,24) ≈ $\mathbf{m(x) := Dersom\left(0 \leq x \leq 24, \frac{13}{2}\ sin\left(\frac{2617993877991}{10000000000000}\ x - \frac{1521054443113}{500000000000}\right) +\right.}$
9	Løs(M_1(x)=27) ≈ $\mathbf{\{x = 24\ k_1 + 13, x = 24\ k_1 + 22.24\}}$



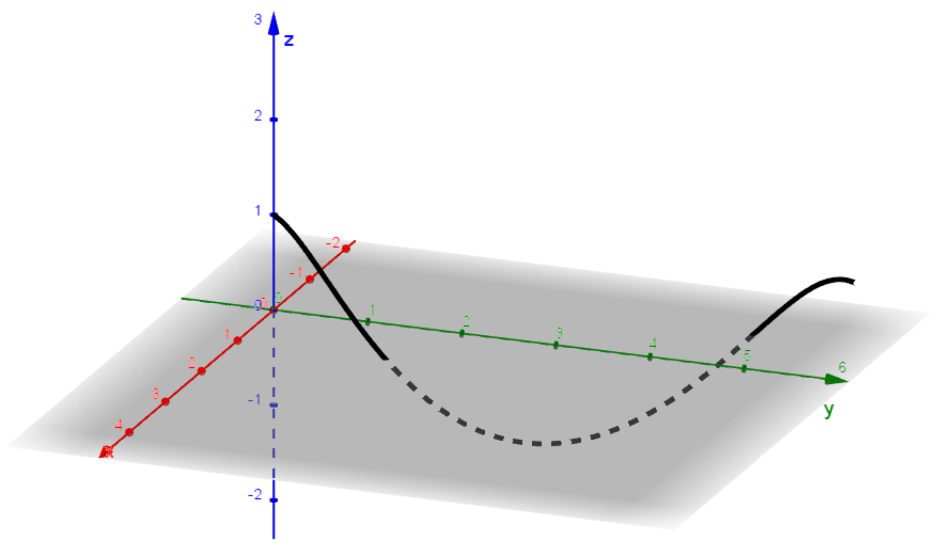
Kommentar fra sensorveiledningen
a) Det gis 1 poeng for rett verdi for c og 1 poeng for rette verdier for A og d.
b) Riktig strategi kan gi 1 poeng. Dersom kandidaten i tillegg klarer å gjennomføre strategien (med en rett verdi for k) gis det i tillegg 1 poeng.

Oppgave 5 (2+2+2+2 poeng)

a)
Tangenten som er parallell med xy-planet har en retningsvektor (fartsvektor) som er parallell med xy-planet. Da er z-koordinatet lik 0 . Dette gir $t = \pi$ (linje 3) og tangeringspunkt i $A = (0, \pi, -1)$.

b)
$v(t) = r'(t)$ og $a(t) = r''(t)$, skalarproduktet er 0 uavhengig av verdien til t (linje 6), altså står de alltid normalt på hverandre.

CAS	
1	r(t):=Kurve(sin(t), t,cos(t), t, 0, 2 pi) → $\mathbf{r := (\sin(t), t, \cos(t))}$
2	v(t):=Derivert(r(t)) → $\mathbf{v(t) := (\cos(t),\ 1,\ -\sin(t))}$
3	Løs(-sin(t)=0) → $\mathbf{\{t = k_2\, \pi\}}$
4	A:=r(π) → $\mathbf{A := (0,\ \pi,\ -1)}$
5	a(t):=Derivert(v(t)) → $\mathbf{a(t) := (-\sin(t),\ 0,\ -\cos(t))}$
6	a(t)*v(t) → $\mathbf{0}$



c)
Finner normalvektoren til planet som innehilder både $r'(t)$ og $r''(t)$ (linje 8). Vinkelen mellom denne og y-aksen (linje 7) er $\frac{3\pi}{4}$, altså er vinkelenn melllom y-aksen og planet alltid $\frac{\pi}{4}$.

7	u:=(0,1,0) → $\mathbf{u} := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
8	b(t):=Vektorprodukt(a(t), v(t)) → $\mathbf{b(t)} := \left(\cos(t),\ -\cos^2(t) - \sin^2(t),\ -\sin(t)\right)$
9	Vinkel(b,u) → $\frac{3}{4}\pi$

d)
Dette smygplanet vil alltid være parallelt med y-aksen, vinkel mellom y-aksen (linje 5) og normalvektoren (linje 4) er $\frac{\pi}{2}$ (linje 6).

1	r(t):=Kurve(sin(t), t, 2 sin(t)+1, t, 0,2 pi) → $\mathbf{r} := (\sin(t), t, 2\ \sin(t) + 1)$
2	v(t):=Derivert(r) → $\mathbf{v(t)} := (\cos(t),\ 1,\ 2\ \cos(t))$
3	a(t):=Derivert(v) → $\mathbf{a(t)} := (-\sin(t),\ 0,\ -2\ \sin(t))$
4	v(t)⊗a(t) → $(-2\ \sin(t),\ 0,\ \sin(t))$
5	u:=(0,1,0) → $\mathbf{u} := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
6	Vinkel((-2 sin(t), 0, sin(t)),(0, 1, 0)) → $\frac{1}{2}\pi$

Kommentar fra sensorveiledningen

a) Det gis 1 poeng for rett strategi og i tillegg 1 poeng for å gjennomføre strategien og få rett svar.

b) Det gis full uttelling dersom kandidaten løser oppgaven rett og at løsningen blir kommunisert på en tilstrekkelig måte.

c) Det kan gis 1 poeng dersom kandidaten finner $\vec{n} = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ og en retningsvektor for y-aksen, men ikke klarer å vise at cosinus til vinkelen er konstant (ved å bruke at $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$).

d) For å få full uttelling må kandidaten vise at smygplanet har samme retning for alle verdier av t. En fremragende løsning kommenterer at hele kurven ligger i ett plan.

Karakter	1	2	3	4	5	6
Poeng		10	19	29	36	44