Utdannings-
direktoratet

Eksamen

20.11.2023

REA3058 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer. Etter 2 timer kan du bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 6 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 5 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Om vekting av oppgavene	Alle deloppgavene vektes likt, bortsett fra oppgave 2 i del 1 og oppgave 3 i del 2. Disse oppgavene vektes som to deloppgaver.
Andre opplysninger	Tønne: https://tonnegarden.no/tonner/ Alle andre tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgave 1

Regn ut integralet

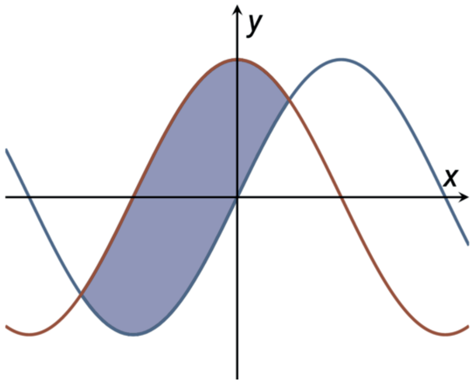
$$\int_{-1}^{1} (x^3 + 2x)\mathrm{d}x \,.$$

Hva forteller svaret deg?

Oppgave 2

Figuren til høyre viser grafene til funksjonene f og g, der $f(x) = \cos x$ og $g(x) = \sin x$.

Bestem arealet av det fargelagte området vist på figuren.



Oppgave 3

En uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av de fire første leddene, når du får vite at $a_1 = 4$.

I en aritmetisk rekke er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

b) Bestem a_4.

Oppgave 4

Et plan α er gitt ved likningen

$$x - 2y + 2z + 1 = 0 .$$

Vi har gitt punktet $A(4, 2, 2)$.

a) Bestem en parameterframstilling for linjen gjennom A som står normalt på planet α .

b) Bestem avstanden fra A til α .

Oppgave 5

En elev har skrevet koden nedenfor.

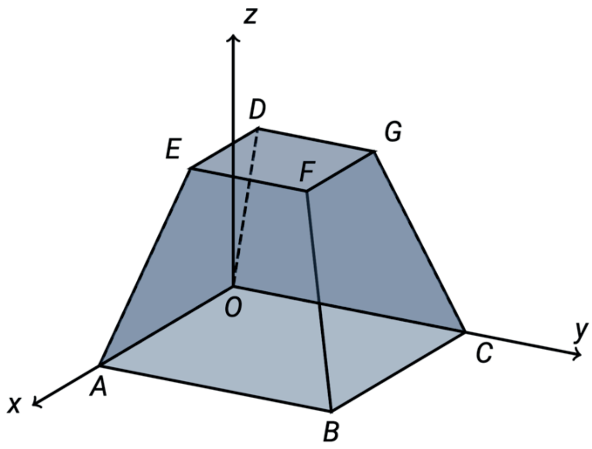
```
N = 1000
start = -2
slutt = 2
dx = (slutt - start)/N

def f(x):
    return x**2-1

S = 0
for i in range(N):
    xi = start + i*dx
    S = S + abs(f(xi))*dx  # abs(f(x)) gir absoluttverdien til f(x)

print(S)
```

a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut med denne koden.

b) Finn ved regning den verdien eleven ønsker å bestemme.

Oppgave 6

Figuren til høyre viser en rett avkortet pyramide med hjørner i punktene $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$, $D(1,1,3)$, $E(3,1,3)$, $F(3,3,3)$ og $G(1,3,3)$.



Bruk vektorregning til å bestemme arealet av sideflaten *BCGF*.

Del 2

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser vannstanden (tidevannshøyden) ved Stord verft i Sunnhordland, for noen tidspunkter 24. april 2023.

Tidevann er de periodiske endringene i havnivået som oppstår som et resultat av gravitasjonskreftene som månen og solen virker på jorden med.

Antall timer etter midnatt	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Vannstand (cm)	99,6	119	94,3	60,5	53,4	76,0	96,7	115	99,9	68,1

En oljeplattform skal slepes ut fra verftet dagen etter. Dette må gjøres når vannstanden er mer enn 90 cm.

a) Lag en modell *f* som du kan bruke til å bestemme vannstanden ved verftet i den aktuelle perioden.

b) Når vil vannstanden øke raskest den 25. april, ifølge modellen?

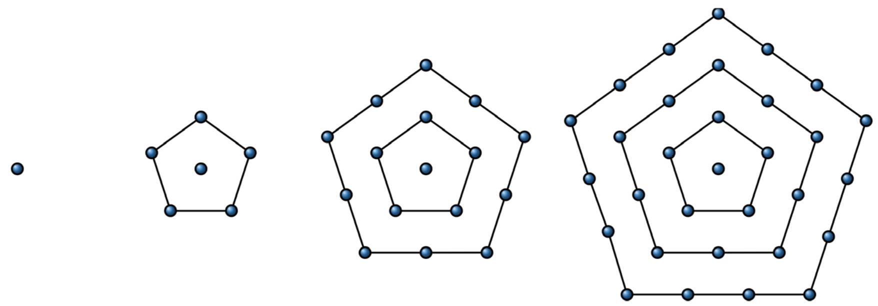
Det vil ta 2 timer å slepe ut oljeplattformen.

c) Ved hvilket klokkeslett kan de senest starte med å slepe ut plattformen?

Oppgave 2

Hver figur nedenfor består av kuler plassert på pentagoner. Antall kuler på hver av ytterkantene øker med én sammenlignet med antall kuler på ytterkanten i figuren før. La P_n være antall kuler i figur n.

De fem første figurtallene er 1, 6, 16, 31 og 51.



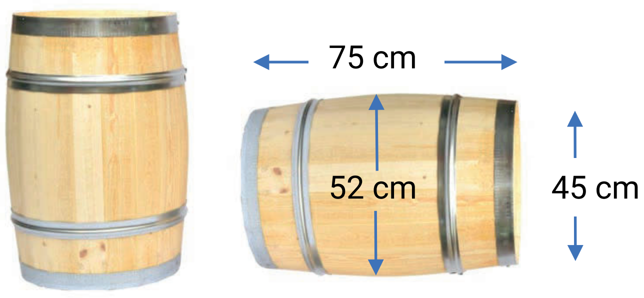
Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

a) Beskriv en rekursiv sammenheng mellom P_n og P_{n-1}.

b) Lag et program som regner ut P_{100} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a).

c) Bestem en eksplisitt formel for P_n, og vis at formelen stemmer ved å gjennomføre et induksjonsbevis.

Oppgave 3



En tønne er 75 cm høy. Diameteren i bunnen og toppen er 45 cm.
Den største diameteren er 52 cm.

Siden i tønnen fra toppen til bunnen er formet som en parabel.

Bruk blant annet integrasjon til å bestemme volumet av tønnen.

Oppgave 4

I et veikryss varierer en type luftforurensning periodisk hvert døgn. Luftforurensningen øker ut over formiddagen og minker igjen mot kvelden. Mengden luftforurensning M kan beskrives med funksjonen

$$M(t) = A \cdot \sin(ct + k) + d$$

der t er antall timer etter midnatt.

Den største mengden luftforurensning i løpet av døgnet er 31,2 μg/m^3, og den minste mengden er 18,2 μg/m^3.

a) Bestem A, c og d.

Ved to tidspunkter i løpet av døgnet er mengden luftforurensning 27 μg/m^3. Den første gangen er klokken 13:00.

b) Når er det andre tidspunktet?

Oppgave 5

En kurve C er grafen til vektorfunksjonen $\vec{r_1}$ gitt ved

$$\vec{r_1}(t) = [\sin t, t, \cos t], \quad 0 < t < 2\pi .$$

a) Bestem koordinatene til eventuelle punkter på C der tangenten er parallell med xy-planet.

b) Vis at $\vec{r_1}'(t) \perp \vec{r_1}''(t)$ for alle t.

> **Definisjon**
>
> La $\vec{r}$ være posisjonsvektoren til en romkurve, der $\vec{r}'(t)$ og $\vec{r}''(t)$ ikke er parallelle for noen verdier av t. Da kan vi til hvert punkt på kurven lage et plan som tangerer kurven i punktet, og som inneholder $\vec{r}'(t)$ og $\vec{r}''(t)$. Dette planet kaller vi for kurvens *smygplan* i punktet.

c) Vis at vinkelen mellom smygplanet og y-aksen alltid er den samme for kurven C. Bestem denne vinkelen.

En annen kurve er grafen til vektorfunksjonen $\vec{r_2}$ gitt ved

$$\vec{r_2}(t) = [\sin t, t, 2\sin t + 1] .$$

d) Undersøk smygplanet til denne kurven for ulike verdier av t. Gi en tolkning av det du har funnet i undersøkelsene dine.