Eksamen R2 - REA3024 - gammel reform
Vår 2023
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sin x \\ f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos c \\ &= \sin x + x \cdot \cos x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\cos(2x)}{\sin x} \\ g'(x) &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\ &= \frac{-\sin(2x) \cdot 2 \cdot \sin x - \cos(2x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-2\sin(2x)\sin x - \cos(2x)\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-2 \cdot 2\sin x \cos x \sin x - (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-4\sin^2 x \cos x - \cos^3 x + \sin^2 x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-3\sin^2 x \cos x - \cos^3 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\cos x(3\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= -\cos x \left(3 + \frac{1}{\tan x}\right) \end{aligned}$$

Alternativ løsning :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\cos(2x)}{\sin x} \\
&= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x} \\
&= \frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 x}{\sin x} \\
&= \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} \\
g'(x) &= \frac{-2 \cdot 2\sin x \cos x \cdot \sin x - (1 - 2\sin^2 x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-4\sin^2 x \cos x - \cos x + 2\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-2\sin^2 x \cos x - \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\cos x(1 + 2\sin^2 x)}{\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

Andre alternativer :

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{-2\sin(2x) \cdot \sin(x) - \cos(2x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} \\
&= -2\cos(x) - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
\int (4x^3 - x)\ dx &= \frac{4}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C \\
&= x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C \\
\int_{-1}^{1} (4x^3 - x)\ dx &= \left[x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\ln 2} &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{\ln 2} \\
&= \frac{1}{2}(e^{2\ln 2} - e^{0}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{\ln 4} - 1) \\
&= \frac{1}{2}(4 - 1) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ f'(x) &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

, som skulle vises.
b)

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\ dx &= \int \frac{(1+\tan^2 x)}{u} \cdot \frac{1}{(1+\tan^2 x)}\ dx \\ &= \int \frac{1}{u}\ du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\tan x| + C \end{aligned}$$

Mellomregning:

$$\begin{aligned} u &= \tan x \\ u' &= 1 + \tan^2 x \quad \text{se oppg.a)} \\ dx &= \frac{1}{u'} = \frac{1}{(1+\tan^2 x)} \end{aligned}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

$$2 + 8 + 14 + ... + 296$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ d &= 6 \\ \frac{296-2}{6} &= 49 \\ \text{altså er det 49 mellomrom , } n &= 50 \\ S_{50} &= \frac{296+2}{2} \cdot 50 \\ &= 149 \cdot 50 \\ &= 7450 \end{aligned}$$

Alternativ løsning :

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ d &= 6 \\ a_n &= a_1 + d(n-1) \\ &= 2 + 6(n-1) \\ &= 6n - 4 \\ s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{n(2 + 6n - 4)}{2} \\ &= \frac{2n(3n-1)}{2} \\ &= n(3n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 296 \\ 6n - 4 &= 296 \\ 6n &= 300 \\ n &= 50 \\ s_{50} &= 50(150-1) \\ &= 50 \cdot 149 \\ &= 7450 \end{aligned}$$

b)

$$5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + ...$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ k &= \frac{1}{3} \\ S &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{5}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Oppgave 5 (3 poeng)

$$
\begin{aligned}
y' + 3y &= 3 \\
(y \cdot e^{3x})' &= 3e^{3x} \\
\int (y \cdot e^{3x})' \; dx &= \int 3e^{3x} \; dx \\
y \cdot e^{3x} &= e^{3x} + C \\
y &= 1 + Ce^{-3x}
\end{aligned}
$$

setter inn (0,5)

$$
\begin{aligned}
5 &= 1 + C \\
C &= 4 \\
y &= 1 + 4e^{-3x}
\end{aligned}
$$

Oppgave 6 (3 poeng)

Leser av amplituden på grafen : $A = 3$
Perioden er $p = \frac{\pi}{2}$, da blir $k = \frac{2\pi}{\pi/2}$
Grafen krysser likevektslinja på vei opp i $x = \frac{\pi}{6}$
Da får vi :

$$\begin{aligned}
f(x) &= A \cdot \sin(cx - \phi) + d \\
&= 3\sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) - 1 \\
&= 3\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) - 1 \\
f'(x) &= 3\cos\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 4 \\
&= 12\cos\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) \\
f'(0) &= 12\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6
\end{aligned}$$

Oppgave 7 (6 poeng)

a)
Volum at tetraeder : $V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [5,0,0] \\
\overrightarrow{AC} &= [4,2,5] \\
\overrightarrow{AT} &= [0,0,5] \\
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [0,-(0-0),10-0] = [0,0,10] \\
(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT} &= [0,0,10] \cdot [0,0,5] \\
&= 50 \\
V &= \frac{1}{6} \cdot 50 = \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

b)
Areal trekant : $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BT} &= [-5,0,5] \\
\overrightarrow{BC} &= [-1,2,0] \\
\overrightarrow{BT} \times \overrightarrow{BC} &= [-5,0,5] \times [-1,2,0] \\
&= [-10,-5,-10] \\
\overrightarrow{BT} \times \overrightarrow{BC} &= |[-10,-5,-10]| \\
&= \sqrt{100+25+100} \\
&= 15 \\
A &= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

c)
Plan α går gjennom punktene B, C og T. Da kan vi finne normalvektoren :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BT} \times \overrightarrow{BC} &= [-5,0,5] \\
&= 5[-1,0,1] \\
\vec{n_\alpha} &= [-1,0,1]
\end{aligned}$$

$$\alpha \ : \ 2(x-5) + 1(y-0) + 2(z-0) = 0$$
$$\alpha \ : \ 2x + y + 2z - 10 = 0$$

Avstand fra A til α:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\
&= \frac{|2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Oppgave 8 (6 poeng)

a)

$$f(x) = \cos(2x)\ ,\ D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} \\
\cos(2x) &= \frac{1}{2} \\
2x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi &\vee 2x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \\
x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi &\vee x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \\
x = \frac{\pi}{6} &\vee x = -\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

da vet vi at intervallet er $x \in \left[-\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

$$\begin{aligned}
\int \cos(2x)\ dx &= \frac{1}{2}\sin(2x) + C \\
\int_{-pi/6}^{pi/6} \cos(2x) &= \frac{1}{2}[\sin(2x)]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Arealet under det skraverte området er : $\frac{2\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$
Skravert areal blir da :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\cos(4x) &= \cos^2(2x) - \sin^2(2x) \\
&= \cos^2(2x) - (1 - \cos^2(2x)) \\
&= 2\cos^2(2x) - 1 \\
\cos^2(2x) &= \frac{1}{2}(\cos(4x) + 1) \\
(f(x))^2 &= \cos^2(2x) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(4x) + 1)
\end{aligned}$$

, som skulle vises.
c)

$$\begin{aligned}
\int (f(x))^2 \ dx &= \int \frac{1}{2}(\cos(4x) + 1) \ dx \\
&= \frac{1}{2} \int (\cos(4x) + 1) \ dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4} \sin(4x) + x) + C \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{4} \sin(4x) + x) + C \\
V_1 &= \pi \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} (f(x))^2 \ dx \\
&= \pi \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \sin(4x) + x \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{1}{4} \sin(2\pi/3 \right) + \frac{\pi}{6} \right) - \left(\frac{1}{4} \sin \left(-2\pi/3 \right) - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{8} + \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Så må vi trekke fra hullet i midten :

$$\begin{aligned}
V_2 &= \pi \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \ dx \\
&= \frac{\pi}{4} \left[x \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Da blir volum av omdreiningslegemet :

$$\begin{aligned}
V &= \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{8} + \frac{\pi^2}{6} \right) - \frac{\pi^2}{12} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{8} + \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Oppgave 9 (2 poeng)

$$1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + ... + n(n+5) = \frac{n(n+1)(n+8)}{3}$$

$P(1):$
v.s. : $1 \cdot 6 = 6$
h.s. : $\frac{1 \cdot 2 \cdot 9}{3} = 6$
h.s.=v.s. ,altså er påstanden sann for $n = 1$

$P(n):$
$1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + ... + n(n+5) = \frac{n(n+1)(n+8)}{3}$
påstanden antas sann

$P(n+1):$

$$\begin{aligned}
v.s. &= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + ... + n(n+5) + (n+1)((n+1)+5) \\
&= \frac{n(n+1)(n+8)}{3} + (n+1)(n+6) \\
&= \frac{n(n+1)(n+8)}{3} + \frac{3(n+1)(n+6)}{3} \\
&= \frac{n+1}{3}(n(n+8) + 3(n+6)) \\
&= \frac{n+1}{3}(n^2 + 8n + 3n + 18) \\
&= \frac{n+1}{3}(n^2 + 11n + 18) \\
&= \frac{n+1}{3}(n+2)(n+9) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+9)}{3} \\
h.s. &= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+8)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+9)}{3}
\end{aligned}$$

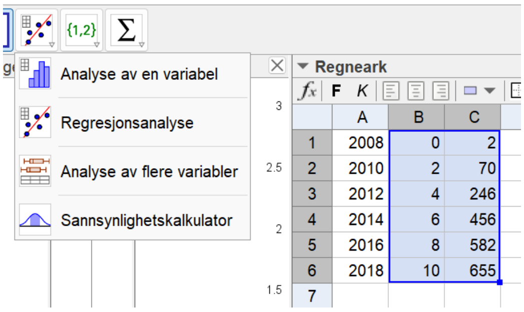
h.s.=v.s. ,altså er påstanden sann for alle verdier av $n \in N$

DEL 2

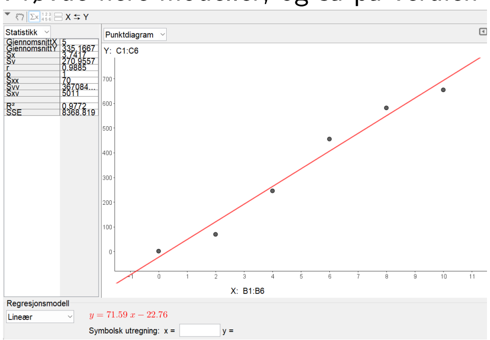
Oppgave 1 (6 poeng)

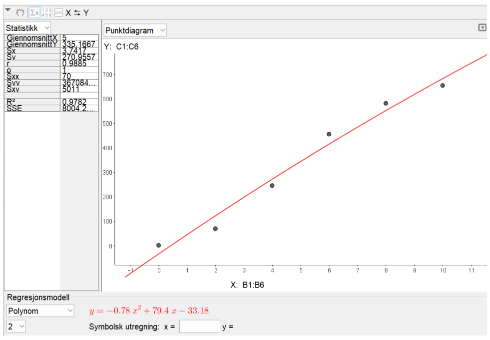
a)

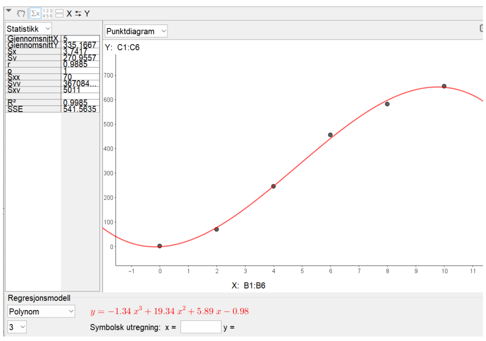
Vi legger verdiene inn i regnearket i Geogebra og bruker regresjon.

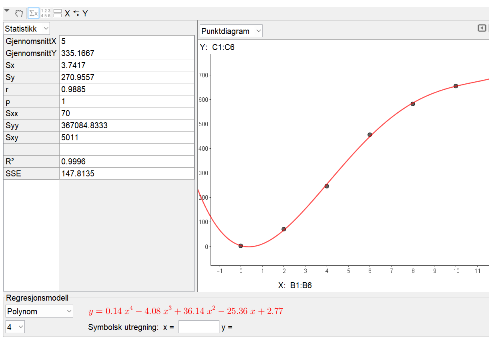


Prøvde flere modeller, og så på verdien til R^2

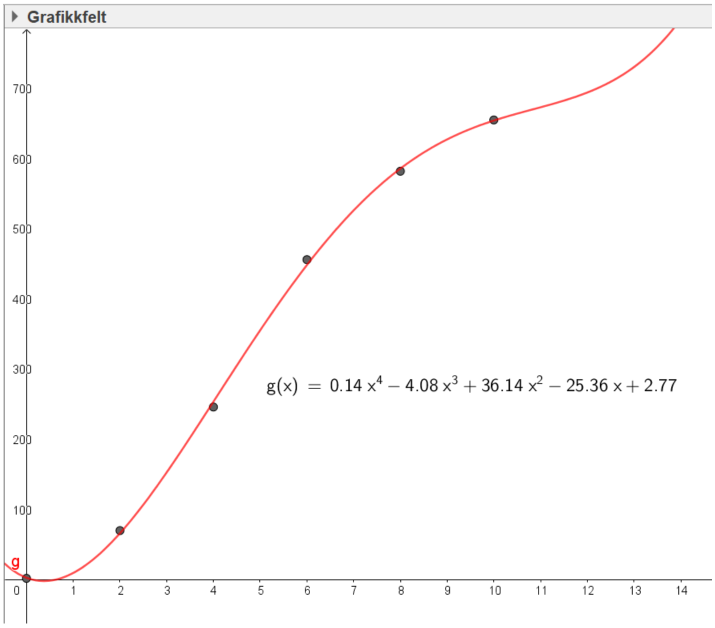








og valgte å gå for en 4.gradsfunksjon som ga en $R^2 = 0,9996$ (1 betyr at alle punktene ligger på grafen). Den videre utviklingen etter 2018 vil nok fortsette å vokse, men ikke like fort som tidligere. Det er uklart om videre vekst vil avta.



b)

$$I = \int_{-0.5}^{10.5} F(x)dx = 3686$$

Hvis vi antar at x-verdiene er midtpunkt i hvert år:
Det ble brukt 3686 mill.kr i årene 2008-2018

Hvis vi antar at x-verdiene er starten på hver år :
Fra sommeren 2007 til sommeren 2018 ble det brukt 3686 millioner kr. på strømming av musikk.

$$G = \frac{1}{5}\int_{2.5}^{7.5} F(x)dx = 347$$

I perioden sommer 2010 til sommer 2015 ble det gjennomsnittlig årlig brukt 347 mill.kr.

$$S = \sum_{i=0}^{10} F(i) = 3682$$

I perioden fra 2008 til 2017 ble det brukt 3682 millioner kr. på strømming av musikk.

$$D = \frac{F(5{,}001) - F(5)}{0{,}001} = 98,7$$

Momentan vekst i 2013 (slutten av år 5) var 98,7 mill.kr., altså økte bruken av penger på strømming med 98,7 mill.kr. i 2013.

Oppgave 2 (4 poeng)

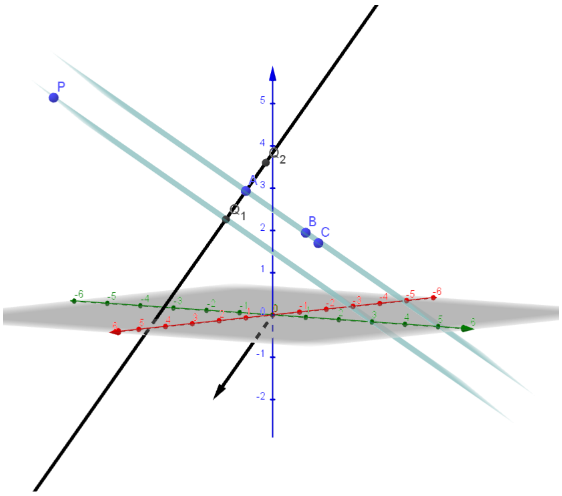
Definerer punktene - linje 1-4
Definerer planet - linje 5

Vi kan løse denne direkte i CAS med kommando Plan(punkt, parallelt plan) - linje 6

$$\beta : x - y - 2z + 3 = 0$$

1	A:=(1,0,3) → $A := (1, 0, 3)$
2	B:=(0,1,2) → $B := (0, 1, 2)$
3	C:=(2,3,2) → $C := (2, 3, 2)$
4	P:=(2,-5,5) → $P := (2, -5, 5)$
5	α:=Plan(A,B,C) → $\alpha : x \cdot 2 + y\,(-2) + z\,(-4) = -10$
6	β:=Plan(P,α) → $\beta := x - y - 2z = -3$

b)
Finner en linje som står normalt på α og går gjennom punktet A.
Denne linja vil da krysse planet β i punktet $Q = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.



7	n:=(1,-1,-2) → $n := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
8	Linje(A, n) → $X = (1, 0, 3) + \lambda\,(1, -1, -2)$
9	R:=(1+t,-t,3-2 t) → $R := (1 + t, -t, 3 - 2\,t)$
10	Løs((1+t) - (-t) - 2 (3-2 t) = -3) → $\left\{t = \frac{1}{3}\right\}$
11	Q:=ByttUt(R, t, 1/3) → $Q := \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Oppgave 3 (6 poeng)

CAS	
1	f(x):=LøsODE(350 y'=250-10 y,(0,0)) $\rightarrow$ $f(x) := -25.0\, e^{\frac{-1.00}{35.0}x} + 25.0$
2	Grenseverdi(f, ∞) $\rightarrow$ 25.0
3	g(x):=LøsODE(350 y'=k-10 y,(0,0)) $\rightarrow$ $g(x) := \frac{-1.00}{10.0}\, k\, e^{\frac{-1.00}{35.0}x} + \frac{1.00}{10.0}\, k$
4	Grenseverdi(g, ∞) $\rightarrow$ $\frac{1.00}{10.0}\, k$
5	Løs(1 / 10 k=60) $\rightarrow$ $\{k = 600\}$

a)
Finner farten ved å løse diff.likningen med initialbetingelser (0,0) fordi bilen står stille når tiden x=0. (linje 1)

b)
Max.fart = 25 km/h (linje 2), det der vi av grenseverdien.

c)
Setter kraften lik k og løser diff-likningen fra a).

Grenseverdien er nå 60, altså må kraften vært på 600 N.

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

$$1+\left(\frac{x}{2}-3\right)+\left(\frac{x}{2}-3\right)^2+\left(\frac{x}{2}-3\right)^3+\ldots$$

$k=\frac{x}{2}-3$

$$\begin{aligned}\frac{x}{2}-3&<1\\ \frac{x}{2}&<4\\ x&<8\\ \frac{x}{2}-3&>-1\\ \frac{x}{2}&>2\\ x&>4\\ x&\in\langle 4,8\rangle\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}-1<&k<1\\ -3<&x<5\\ -4<x-1<4&\\ -1<&\frac{x-1}{4}<1\\ k=&\ \frac{x-1}{4}\end{aligned}$$

Da kan rekka være :

$$1+\left(\frac{x-1}{4}\right)+\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+\left(\frac{x-1}{4}\right)^3+\ldots$$

men vi har også krav om å konvergere mot 3 når $x=4$.

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{1-k}&=3\\ \frac{a_1}{1-\frac{x-1}{4}}&=3\\ \frac{a_1}{1-\frac{4-1}{4}}&=3\\ \frac{a_1}{1-\frac{3}{4}}&=3\\ \frac{4a_1}{4-3}&=3\\ 4a_1&=3\\ a_1&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Da blir rekka :

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{4}\right)^3+\ldots$$

Oppgave 5 (4 poeng)

$$f(x) = \frac{2-\cos x}{\sin x} \ , \ D_f = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle$$

a)
Omdreiningslegeme:

$$V = \pi \int_{pi/4}^{3\pi/4} f(x)^2 \, dx =$$

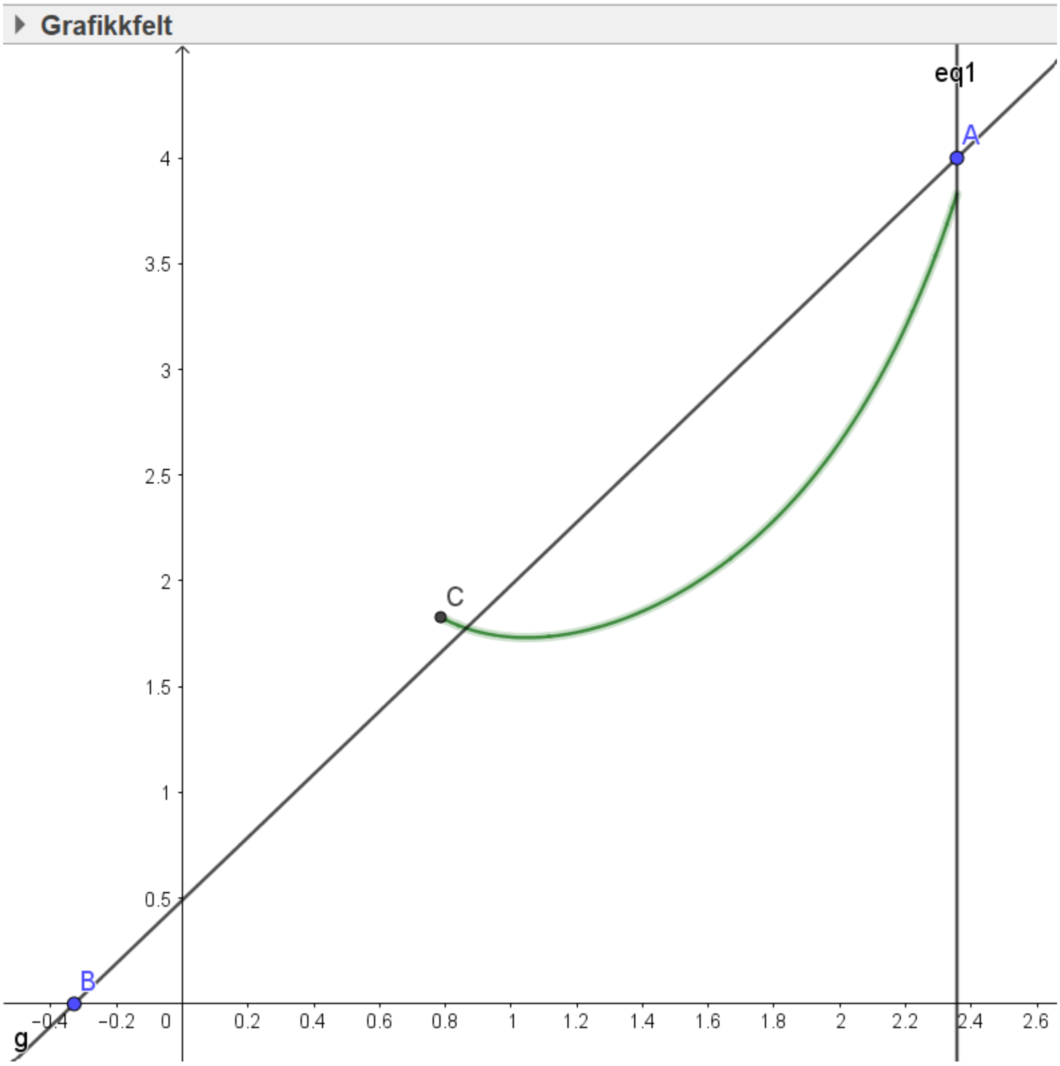
b)
For å sjekke om legemet får plass i kjeglen plasserer jeg kjeglens topp på $x = \frac{3\pi}{4}$
Høyden til kjeglen er : $h = \frac{136}{16\pi}$.

Da kan jeg beskrive kjeglen ved en rett linje gjennom punktene $A(\frac{3\pi}{4}, 4)$ og $B(\frac{3\pi}{4} - \frac{135}{16\pi}, 0)$
Radien i kjeglen $r = 4$ gir oss y-verdien til A, x-verdien til B ligger $h = \frac{135}{16\pi}$ lavere enn $\frac{3\pi}{4}$, som er toppen på legemet.

Sjekker så om $f(\pi/4)$ ligger over eller under linja.
Det ligger over linja altså får ikke legemet plass i kjeglen.

CAS

1	f(x):=(2 - cos(x)) / sin(x) → $f(x) := \frac{-\cos(x)+2}{\sin(x)}$
2	F(x):=Funksjon(f, pi/4, 3 pi/4) → $F(x) := \text{Dersom}\left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq 3 \cdot \frac{\pi}{4}, \frac{-\cos(x)+2}{\sin(x)}\right)$
3	Løs(1/3 pi 4^2 h=45) → $\left\{h = \frac{135}{16\,\pi}\right\}$
4	A:=(3 pi/4,4) → $A := \left(3 \cdot \frac{\pi}{4}, 4\right)$
5	B:=(3 pi/4-(135 / (16π)),0) → $B := \left(\frac{12\,\pi^2 - 135}{16\,\pi}, 0\right)$
6	C:=(pi/4,f(pi/4)) → $C := \left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2} - 1\right)$


Grafikkfelt
eq1
A
C
B
g
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6