Utdannings-
direktoratet

Eksamen

24.05.2023

REA3024 Matematikk R2

Eksamen etter Kunnskapsløftet LK06

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar. (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timar er alle hjelpemiddel tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillatne.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 5 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i del 1 og del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Mopedbil: Johnssma på commons.wikimedia.org. (CC BY-SA 4.0) Alle andre grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på nettsidene til Utdanningsdirektoratet.

Del 1

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = x \cdot \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Rekn ut integrala

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (4x^3 - x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

Oppgåve 3 (4 poeng)

a) Vis at dersom $f(x) = \tan x$, så er $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b) Rekn ut $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

Oppgåve 4 (4 poeng)

a) Rekn ut summen av den aritmetiske rekkja

$$2+8+14+\cdots+296$$

b) Rekn ut summen av den geometriske rekkja

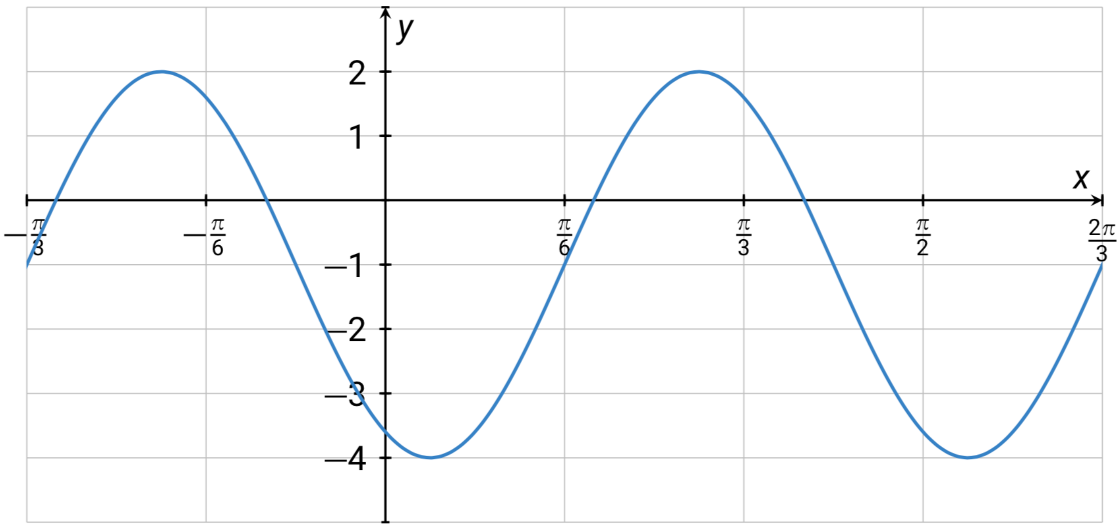
$$5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\cdots$$

Oppgåve 5 (3 poeng)

Løys differensiallikninga

$$y'+3y=3\ ,\quad y(0)=5$$

Oppgåve 6 (3 poeng)



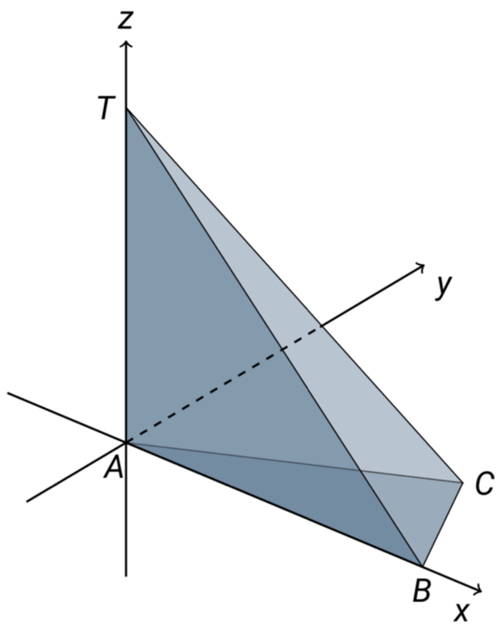
Ovanfor ser du grafen til ein funksjon f. Funksjonsuttrykket til f kan skrivast på forma

$$f(x)=A\cdot\sin(cx+\varphi)+d$$

Bestem $f'(0)$.

Oppgåve 7 (6 poeng)

Punkta $A(0,0,0)$, $B(5,0,0)$, $C(4,2,0)$ og $T(0,0,5)$ dannar ein pyramide, slik figuren viser.



a) Rekn ut volumet av pyramiden.

b) Rekn ut arealet av $\triangle BCT$.

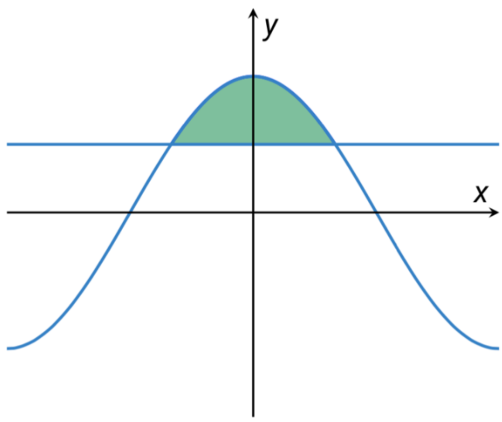
c) Bestem avstanden frå A til planet som går gjennom B, C og T.

Oppgåve 8 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\cos 2x \ , \ D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

På figuren til høgre har vi teikna grafen til f saman med linja gitt ved $y=\dfrac{1}{2}$. Desse to avgrensar det fargelagte området, som vist på figuren.



a) Bestem arealet av det fargelagte området.

b) Bruk formelen $\cos(u+v)=\cos u\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v$ til å vise at

$$\left(f(x)\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos 4x+1\right)$$

Vi roterer det fargelagte området på figuren om x-aksen og får ein omdreiingslekam.

c) Bestem volumet av denne omdreiingslekamen.

Oppgåve 9 (2 poeng)

Bruk induksjon til å vise at $1\cdot 6+2\cdot 7+3\cdot 8+\cdots+n\cdot(n+5)=\dfrac{n(n+1)(n+8)}{3}$

for alle $n\in\mathbb{N}$.

Del 2

Oppgåve 1 (6 poeng)

Tabellen nedanfor viser kor mange millionar kroner som blei brukte på strøyming av musikk i Noreg nokre år i perioden 2008–2018.

År	2008	2010	2012	2014	2016	2018
Strøyming	2	70	246	456	582	655

a) Lag ein modell F som du kan bruke til å bestemme kor mange millionar kroner som blei brukte på strøyming i Noreg per år i perioden 2008–2018 og åra etterpå. Vel x-verdiar slik at $F(0)$ gir kor mange millionar kroner som blei brukte i 2008. Grunngi valet av modell.

Nedanfor ser du fire formlar.

$$I = \int_{-0,5}^{10,5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad G = \frac{1}{5}\int_{2,5}^{7,5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad S = \sum_{i=0}^{10} F(i) \ , \qquad D = \frac{F(5{,}001) - F(5)}{0{,}001}$$

b) Bestem I, G, S og D.

c) Gi ei praktisk tolking av svara i oppgåve b.

Oppgåve 2 (4 poeng)

Planet α er bestemt av punkta $A(1, 0, 3)$, $B(0, 1, 2)$ og $C(2, 3, 2)$.

a) Bestem ei likning for planet β som er parallelt med α og går gjennom punktet $P(2, -5, 5)$.

Ei kule tangerer α i punktet A og β i eit punkt Q.

b) Bestem eksakte verdiar for koordinatane til Q.

Oppgåve 3 (6 poeng)

Ein mopedbil blir driven av ein motor som gir ei konstant kraft $F = 250\ N$ (newton).

Farten til bilen v (i m/s) kan beskrivast med differensiallikninga

$$350v' = F - 10v$$

a) Finn eit uttrykk $v(t)$ for farten t sekund etter at mopedbilen byrjar å røyve seg.

b) Kva er den største farten mopedbilen kan oppnå?

Bilprodusenten vil at mopedbilen skal ha ein toppfart på 60 km/h.

c) Kva må motorkrafta F vere dersom mopedbilen skal ha denne toppfarten?

Oppgåve 4 (4 poeng)

a) Bestem konvergensområdet til den uendelege geometriske rekkja

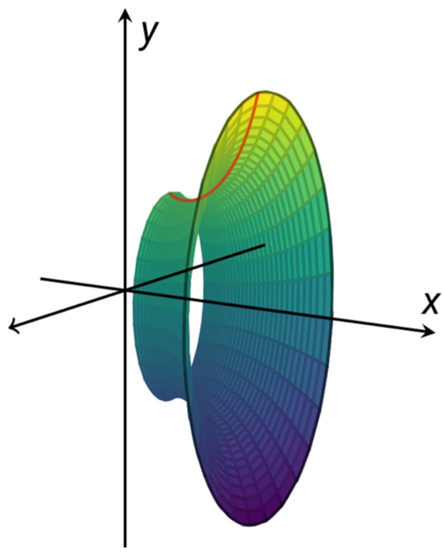
$$1 + \left(\frac{x}{2} - 3\right) + \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - 3\right)^3 + \cdots$$

b) Lag ei uendeleg geometrisk rekkje med variabel kvotient som har konvergensområde $\langle -3, 5 \rangle$ og som konvergerer mot 3 når $x = 4$.

Oppgåve 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x} \quad , \qquad D_f = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle$$



Vi roterer grafen til f om x-aksen.

a) Bestem volumet av omdreiingslekamen vi då får.

Omdreiingslekamen skal plasserast i ei rett kjegle med radius 4 og volum 45.

b) Avgjer om omdreiingslekamen får plass i kjegla.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 5 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Mopedbil: Johnssma på commons.wikimedia.org. (CC BY-SA 4.0) Alle andre grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.

Del 1

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x \cdot \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Regn ut integralene

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (4x^3 - x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) Vis at dersom $f(x) = \tan x$, så er $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b) Regn ut $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

Oppgave 4 (4 poeng)

a) Regn ut summen av den aritmetiske rekken

$$2+8+14+\cdots+296$$

b) Regn ut summen av den geometriske rekken

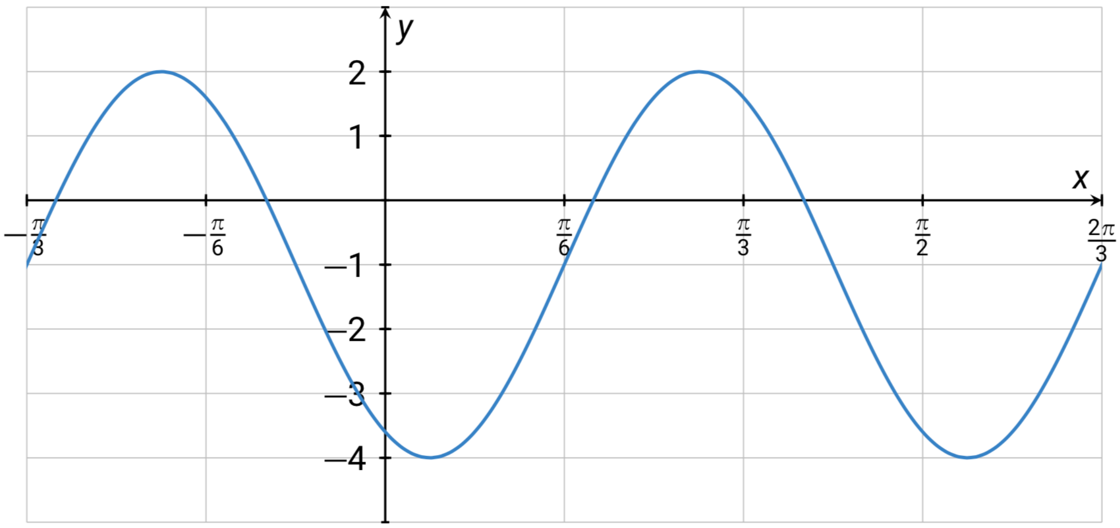
$$5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\cdots$$

Oppgave 5 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y'+3y=3\ ,\quad y(0)=5$$

Oppgave 6 (3 poeng)

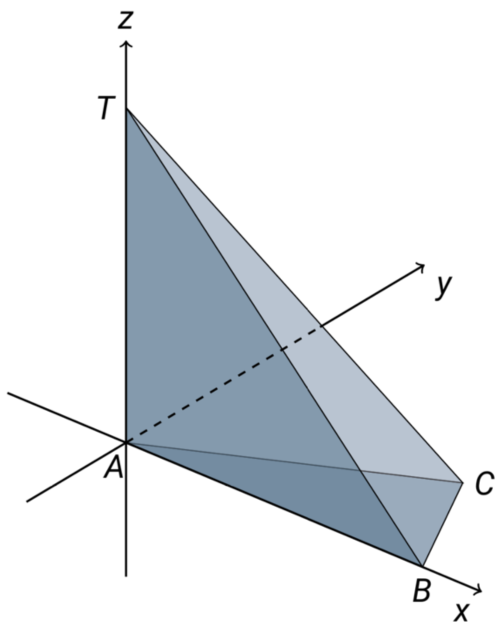


Ovenfor ser du grafen til en funksjon f. Funksjonsuttrykket til f kan skrives på formen

$$f(x)=A\cdot\sin(cx+\varphi)+d$$

Bestem $f'(0)$.

Oppgave 7 (6 poeng)



Punktene $A(0,0,0)$, $B(5,0,0)$, $C(4,2,0)$ og $T(0,0,5)$ danner en pyramide, slik figuren viser.

a) Regn ut volumet av pyramiden.

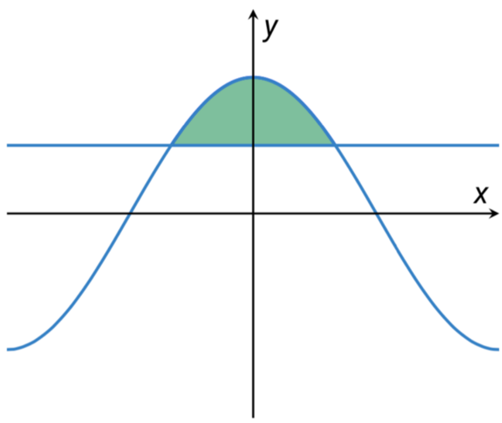
b) Regn ut arealet av $\triangle BCT$.

c) Bestem avstanden fra A til planet som går gjennom B, C og T.

Oppgave 8 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \cos 2x \ , \ D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



På figuren til høyre har vi tegnet grafen til f sammen med linjen gitt ved $y = \dfrac{1}{2}$. Disse to avgrenser det fargelagte området, som vist på figuren.

a) Bestem arealet av det fargelagte området.

b) Bruk formelen $\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$ til å vise at

$$\left(f(x)\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos 4x + 1\right)$$

Vi roterer det fargelagte området på figuren om x-aksen og får et omdreiingslegeme.

c) Bestem volumet av dette omdreiingslegemet.

Oppgave 9 (2 poeng)

Bruk induksjon til å vise at $1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + \cdots + n \cdot (n+5) = \dfrac{n(n+1)(n+8)}{3}$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser hvor mange millioner kroner som ble brukt på strømming av musikk i Norge noen år i perioden 2008–2018.

År	2008	2010	2012	2014	2016	2018
Strømming	2	70	246	456	582	655

a) Lag en modell F som du kan bruke til å bestemme hvor mange millioner kroner som ble brukt på strømming i Norge per år i perioden 2008–2018 og årene etterpå. Velg x-verdier slik at $F(0)$ gir hvor mange millioner kroner som ble brukt i 2008. Begrunn valget av modell.

Nedenfor ser du fire formler.

$$I = \int_{-0{,}5}^{10{,}5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad G = \frac{1}{5}\int_{2{,}5}^{7{,}5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \qquad S = \sum_{i=0}^{10} F(i) \ , \qquad D = \frac{F(5{,}001) - F(5)}{0{,}001}$$

b) Bestem I, G, S og D.

c) Gi en praktisk tolkning av svarene i oppgave b.

Oppgave 2 (4 poeng)

Planet α er bestemt av punktene $A(1,0,3)$, $B(0,1,2)$ og $C(2,3,2)$.

a) Bestem en likning for planet β som er parallelt med α og går gjennom punktet $P(2,-5,5)$.

En kule tangerer α i punktet A og β i et punkt Q.

b) Bestem eksakte verdier for koordinatene til Q.

Oppgave 3 (6 poeng)

En mopedbil blir drevet av en motor som gir en konstant kraft $F = 250\ N$ (newton).

Bilens fart v (i m/s) kan beskrives med differensiallikningen

$$350v' = F - 10v$$

a) Finn et uttrykk $v(t)$ for farten t sekunder etter at mopedbilen begynner å bevege seg.

b) Hva er den største farten mopedbilen kan oppnå?

Bilprodusenten ønsker at mopedbilen skal ha en toppfart på 60 km/h.

c) Hva må motorkraften F være dersom mopedbilen skal ha denne toppfarten?

Oppgave 4 (4 poeng)

a) Bestem konvergensområdet til den uendelige geometriske rekken

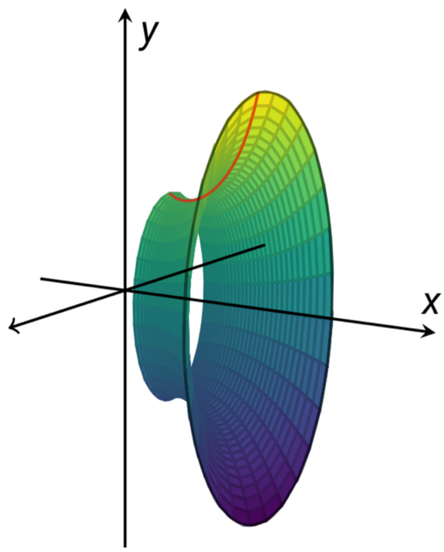
$$1 + \left(\frac{x}{2} - 3\right) + \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - 3\right)^3 + \cdots$$

b) Lag en uendelig geometrisk rekke med variabel kvotient som har konvergensområde $\langle -3, 5 \rangle$, og som konvergerer mot 3 når $x = 4$.

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{2-\cos x}{\sin x} \quad , \qquad D_f=\left\langle \frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4} \right\rangle$$



Vi roterer grafen til f om x-aksen.

a) Bestem volumet av omdreiingslegemet vi da får.

Omdreiingslegemet skal plasseres i en rett kjegle med radius 4 og volum 45.

b) Avgjør om omdreiingslegemet får plass i kjeglen.

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!