Eksamen R2 - MAT3058

Fagfornyelsen
Vår 2023
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(4x^3 - x)\ dx &= \left[x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Det gis 1 poeng for riktig antiderivert og 1 poeng for å sette inn grensene og fått korrekt svar.

b)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\ln 2} e^{2x}\ dx &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2}((e^{2\ln 2}) - (e^0)) \\ &= \frac{1}{2}(4-1) \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Det gis 1 poeng for riktig antiderivert og 1 poeng for å sette inn grensene og fått korrekt svar. Kandidater som får rett svar, men ikke forenkler kan få full uttelling.

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}f(x) &= \tan x \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ f'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

Kandidater som deriverer rett, bortsett fra en fortegnsfeil eller som ikke klarer å forenkle uttrykket til $1 + \tan^2 x$, kan få 1 poeng b)

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx = \int \frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{u'}\,du$$
$$u = \tan x$$
$$u' = 1+\tan^2 x$$
$$= \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln u + C$$
$$= \ln|\tan x| + C$$

Kandidater som klarer å komme fram til $ln(\tan x) + C$, kan få 2 poeng, selv om de glemmer å ta med absoluttverdien til $\tan x$. Kandidater som velger en riktig strategi for å bestemme integralet, men ikke klarer å gjennomføre strategien, kan få 1 poeng.

Oppgave 3 (6 poeng)

a)

$$A = (0,0,0)\ B = (5,0,0)\ C = (4,2,0)\ T = (0,0,5)$$
$$\overrightarrow{AB} = [5,0,0]$$
$$\overrightarrow{AC} = [4,2,0]$$
$$\overrightarrow{AT} = [0,0,5]$$
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [0,0,10]$$
$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AT} = [0,0,10]\cdot[0,0,5]$$
$$= 50$$
$$V = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AT}$$
$$= \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

Oppgaven kan løses på flere måter, og alle kan gi full uttelling. Dersom kandidaten bruker en riktig strategi, men gjør en feil i utregningene, kan det gis 1 poeng.

b)

$$\overrightarrow{BC} = [-1,2,0]$$
$$\overrightarrow{BT} = [-5,0,5]$$
$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BT} = [10,-(-5),-(-10)]$$
$$= [10,5,10]$$
$$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BT}|$$
$$= \frac{1}{2}(100+25+100)$$
$$= \frac{\sqrt{225}}{2} = \frac{15}{2}$$

> Dersom kandidaten bruker rett strategi, men gjør en regnefeil, kan det gis 2 poeng.

c)

$$\begin{aligned}
\vec{n_\alpha} &= [2,1,2] \\
\alpha \ : \ 2(x-5)+(y-0)+2(z-0) &= 0 \\
2x+y+2z-10 &= 0 \\
q &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\
&= \frac{|2\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 0-10|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

> Oppgaven kan løses ved å bruke resultatene fra a) og b). Det kan gis full uttelling, selv om kandidaten har eventuelle følgefeil.

Oppgave 4 (4 poeng)

a)
a er leddene i en aritmetisk rekke : $a = 3, 7, 11, 15, 19, ...$
S er summen av leddene i rekka : $S = 3, 10, 21, 36, 55, ...$

Altså prøver eleven å finne summen av de N første leddene i rekka.

> Kandidaten bahøver ikke å forklare hva som skjer på hver linje for å få full uttelling. Det er nok at kandidaten sier at programmet regner ut summen av en aritmetisk rekke med 10 ledd.

b)

$$\begin{aligned}
a_n &= 3+4(n-1) \\
&= 4n-1 \\
s_n &= \frac{n(3+4n-1)}{2} \\
&= \frac{n(4n+2)}{2} \\
s_{100} &= \frac{100(400+2)}{2} \\
&= 100\cdot 201 \\
&= 20100
\end{aligned}$$

> Kandidater som bruker riktige formler, men gjør feil utregninger (for eksempel av a_{100}) kan få 1 poeng.

Oppgave 5 (6 poeng)

a) Hvis vi ser på figuren så kan vi finne 3 arealer

1. $\triangle ABC : F_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \tan v = \frac{1}{2} \tan v$
   $\tan v = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = \tan v$
2. Sirkelsegmentet $ABD : F_2 = \frac{\pi r^2 \cdot v}{2\pi} = \frac{v}{2} = \frac{1}{2} v$
3. $\triangle ABD : F_3 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin v = \frac{1}{2} \sin v$

På figuren ser vi også at :

$$F_3 < F_2 < F_1$$
$$\frac{1}{2} \sin v < \frac{1}{2} v < \frac{1}{2} \tan v$$

som skulle vises.

> For å få full uttelling, må kandidaten kommunisere noe om arealene til de to trekantene og sirkelsektoren og relasjonen mellom disse. Kandidater som viser ulikhetene uten å bruke arealbetraktninger, kan få 1 poeng.

b)

$$\sin v < v < \tan v \quad \text{vi kan multiplisere med } \frac{1}{\sin x} \text{ når } v \in \langle 0, \pi \rangle$$
$$\tan v \cdot \frac{1}{\sin v} = \frac{\sin v}{\cos v} \cdot \frac{1}{\sin v} = \frac{1}{\cos v}$$

Da får vi

$$\sin v < v < \tan v$$
$$1 < \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}$$

som skulle vises.

> I en fullgod besvarelse kommenteres det at det er lov å multiplisere med for eksempel $\frac{2}{\sin v}$ i ulikhetene når $0 < v < \pi$. Dersom kandidaten ikke kommenterer at ulikhetene kun gjelder for disse verdiene av v, kan kandidaten få 1 poeng.

c) derom v går mot 0 ovenfra vil både sinus og cosinus verdien være positiv:

$$1 < \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}$$
$$1 < \frac{v}{\sin v} < \cos v$$
$$\lim_{v \to 0^+} 1 < \lim_{v \to 0^+} \frac{v}{\sin v} < \lim_{v \to 0^+} \cos v$$
$$1 < \lim_{v \to 0^+} \frac{v}{\sin v} < 1$$
$$\lim_{v \to 0^+} \frac{v}{\sin v} = 1$$

> Det er nok å argumentere med at $\frac{1}{\cos v} \to 1$ når $v \to 0^+$ og da må også $\frac{v}{\sin v} \to 1$.

DEL 2

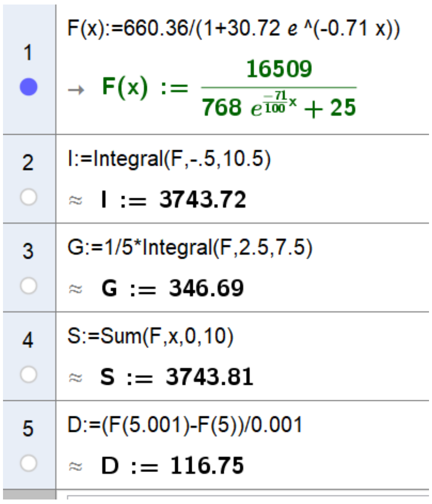
Oppgave 1 (6 poeng)

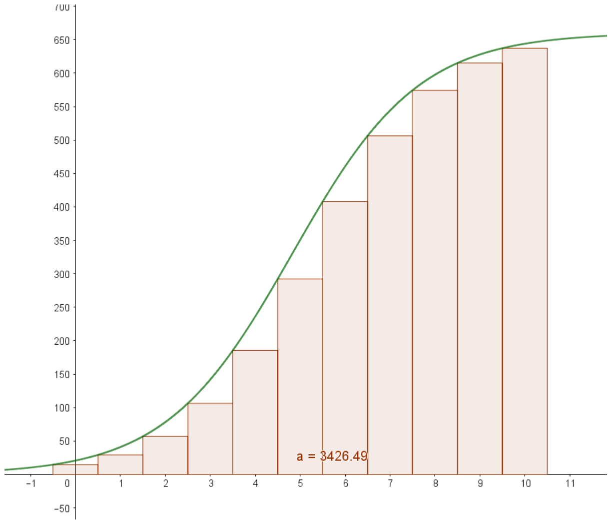
a) Har valgt en logistisk modell fordi punktene indikerer at veksten vil avta og stabilisere seg på sikt. Brukte regresjon i Geogebra for å finne modellen.

$$F(x) = \frac{660,36}{1 + 30,72e^{-0,71}}$$

> Flere typer modeller må godtas, så lenge det er en begrunnelse for modellen. For å få full uttelling må kandidaten si noe om forventet utvikling i årene etter 2018. En modell uten begrunnelse kan gis 1 poeng.

b)





> Det gis 1 poeng dersom kandidaten har klart å regne ut riktig verdi med 1 eller 2 av formlene. Klarer kandidaten 3 eller 4 verdier, kan det gis 2 poeng.

c) I er summen av all strømming i perioden 2008-2018.
Her er 0 midt i 2008, og 10 midt i 2018

G er gjennomsnittlig strømming pr år i perioden 2010-2015

S er summen av all strømming i perioden 2008-2018

D er veksten i 2013, numerisk beregning av momentan vekstfart 2013

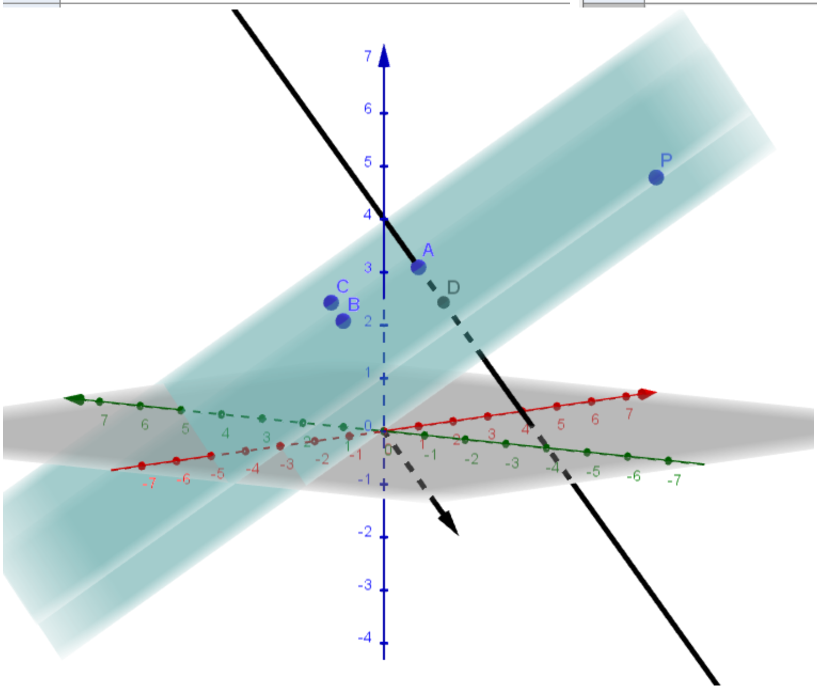
> Det gis 1 poeng dersom kandidaten har klart å tolke 1 eller 2 av svarene. Klarer kandidaten å tolke 3 eller 4 svar, kan det gis 2 poeng.

Oppgave 2 (4 poeng)

a) Finner planet β, som har samme normalvektor som planet α og går gjennom P, linje 1 - 6.

1	A:=(1,0,3) → $A := (1, 0, 3)$
2	B:=(0,1,2) → $B := (0, 1, 2)$
3	C:=(2,3,2) → $C := (2, 3, 2)$
4	α:=Plan(A, B, C) → $\alpha : x \cdot 2 + y\,(-2) + z\,(-4) = -10$
5	P:=(2,-5,5) → $P := (2, -5, 5)$
6	β:=Plan(P, α) → $\beta := x - y - 2z = -3$
7	n:=(1,-1,-2) → $n := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
8	l:=Linje(A, n) → $l : X = (1, 0, 3) + \lambda\,(1, -1, -2)$

9	R:=(1+t,-t,3-2t) → $R := (1 + t, -t, 3 - 2\,t)$
10	(1+t) - (-t) - 2(3-2t) = -3 ✓ $1 + t + t - 2\,(3 - 2\,t) = -3$
11	Løs(1 + t + t - 2 (3 - 2t) = -3) → $\left\{ t = \frac{1}{3} \right\}$
12	D:=ByttUt(R, t, 1 / 3) → $D := \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{7}{3} \right)$



> Oppgaven kan løses ved å bruke kryssprodukt eller ved å bruke et digitalt verktøy som GeoGebra 3D. Begge metoder kan gis full uttelling.

b)
Kulen tangerer α i A og β i Q.
Koordinatene til $Q = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$, se linje 7-12.

> For å få full uttelling, må kandidaten regne ut koordinatene eksakt. Løsning med numerisk verdi beregnet, for eksempel ved å tegne opp i GeoGebra 3D, kan gi inntil 1 poeng.

Oppgave 3 (6 poeng)

a) Banefarten når t=1 er 1.17 m/s. (linje 1-4)

1. r(t):=Kurve(1+ e ^(t/20), 1-sin(t), 1/10 e ^(-2t+2)+cos(t), t, 0,5)
   $\rightarrow\ r := \left(1+e^{\frac{t}{20}}, 1-\sin(t), \frac{1}{10}\ e^{-2t+2}+\cos(t)\right)$
2. v(t):=Derivert(r(t))
   $\rightarrow\ v(t) := \left(\frac{1}{20}\ e^{\frac{t}{20}}, -\cos(t), \frac{-1}{5}\ e^{-2t+2}-\sin(t)\right)$
3. abs(v(1))
   $\rightarrow\ \sqrt{\frac{1}{400}\left(\sqrt[20]{e}^{2}+400\ \cos^2(1)+16\ (-5\ \sin(1)-1)^2\right)}$
4. sqrt(1 / 400 (nrot(e,20)² + 400cos²(1) + 16(-5 sin(1) - 1)²))
   $\approx\ 1.17$

> Kandidater som regner ut fartsvektoren etter 1 sekund, men ikke regner ut lengden av denne, kan får 1 poeng.

b) Finner bunnpunktet til grafen i CAS.
Bunnpunktet er $(3.54, 1)$ altså er banefarten lavest etter 3.54 sek.

1. r(t):=Kurve(1+ e ^(t/20), 1-sin(t), 1/10 e ^(-2t+2)+cos(t),t, 0,5)
   $\rightarrow\ r := \left(1+e^{\frac{t}{20}}, 1-\sin(t), \frac{1}{10}\ e^{-2t+2}+\cos(t)\right)$
2. v(t):=Derivert(r(t))
   $\rightarrow\ v(t) := \left(\frac{1}{20}\ e^{\frac{t}{20}}, -\cos(t), \frac{-1}{5}\ e^{-2t+2}-\sin(t)\right)$
3. f(t):=abs(v(t))
   $\rightarrow\ f(t) := \sqrt{\frac{1}{400}}\sqrt{\left(e^{\frac{1}{20}t}\right)^2+400\ \cos^2(t)+16\ \left(-e^{-2t+2}-5\ \sin(t)\right)^2}$
4. Ekstremalpunkt(f, 0, 5)
   $\rightarrow\ (3.54, 1)$

> For å få full uttelling, må det gå fram av besvarelsen at banefarten faktisk er minst etter 3,5 sekunder. Dette kan gjøres grafisk.

c) Dersom fartsretningen er parallell med xy-planet vil z-koordinatet lik 0.

1	f(x):=1/5 *e* ^(-2x+2)+sin(x) → $f(x) := \frac{1}{5}\, e^{-2x+2} + \sin(x)$
2	NLøs(f(x)=0) → $\{x = 3.14, x = 6.28, x = 9.42, x$
3	g(x):=1 +*e* ^(x/20) → $g(x) := e^{\frac{1}{20}x} + 1$
4	NLøs(g=0) → {}

$$-1/5e^{-2t+2} - \sin t = 0$$
$$t = 3.14$$

Altså er farten parallell med xy-planet når t= 3.14

Dersom fartsretningen er parallell med yz-planet vil x-koordinatet lik 0.

$$1 + e^{\frac{x}{20}} = 0$$

Ingen løsning, blir aldri lik null, altså vil farten aldri være parallell med yz-planet-

> Kandidater som bruker rett strategi, men ikke klarer å komme fram til en rett konklusjon, kan få 1 poeng.

Oppgave 4 (6 poeng)

a) Tilbud 1 : $a_n = a_{n-1} + 10$, dette gir en aritmetisk rekke der d=10, altså øker summen fast med 10 kroner hver uke.

De 4 første ukene blir da : $\{$ 100 , 110 , 120 , 130 $\}$

1	a_1:=100 $\rightarrow$ $a_1 := 100$
2	a(n):=a_1+10 (n-1) $\rightarrow$ $a(n) := 10\,n + 90$
3	a(2) $\approx$ 110
4	a(3) $\approx$ 120
5	a(4) $\rightarrow$ 130

Tilbud 2 : $b_n = b_{n-1} \cdot 1.05$, dette gir en geometrisk rekke med $k = 1.05$, altså øker summen med 5% hver uke.

De 4 første ukene blir da : $\{$ 100 , 105 , 110.25 , 115.76 $\}$

6	b_1:=100 $\rightarrow$ $b_1 := 100$
7	b(n):=b_1*(1.05)^(n-1) $\rightarrow$ $b(n) := 100\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}$
8	b(2) $\approx$ 105
9	b(3) $\approx$ 110.25
10	b(4) $\approx$ 115.76

> Kandidater som har rett strategi, men får feil svar på grunn av en mindre feil, får 1 poeng.

b) Tilbud 2 gir høyere ukelønn enn tilbud 1 etter 28 uker.
Dette er 1 mer enn svaret i Geogebra da vi regner med at vi starter på uke 1, og grafen starter på 0.

1	a(x):=100+10 x → $a(x) := 10x + 100$
2	b(x):=100*1.05^x → $b(x) := 100\left(\frac{21}{20}\right)^x$
3	Skjæring(a, b) ≈ $\{(-7.28 \cdot 10^{-14}, 100), (26.58, 365.83)\}$

Vi kan også korrigere for dette i defnisjonen av grafene.

1	a(x):=100+10*(x-1) → $a(x) := 10x + 90$
2	b(x):=100*1.05^(x-1) ≈ $b(x) := 100\, e^{0.05x - 0.05}$
3	NLøs(a(x)=b(x)) → $\{x = 1, x = 27.58\}$

Det gis 1 poeng for rett strategi og 1 poeng for riktig svar.

c)
Etter 39 uker (38+1 , som i a)) er summen av tilbud 2 høyere enn summen av tilbud 1.

4	aa(x):=Sum(a(x),x,0,x) → $aa(x) := 5x^2 + 105x + 100$
5	bb(x):=Sum(b(x),x,0,x) → $bb(x) := 2000\left(\frac{21}{20}\right)^{x+1} - 2000$
6	NLøs(aa=bb) → $\{x = -1, x = -1.22 \cdot 10^{-11}, x = 37.39\}$

Det gis 1 poeng for rett strategi og 1 poeng for riktig svar

Oppgave 5 (4 poeng)

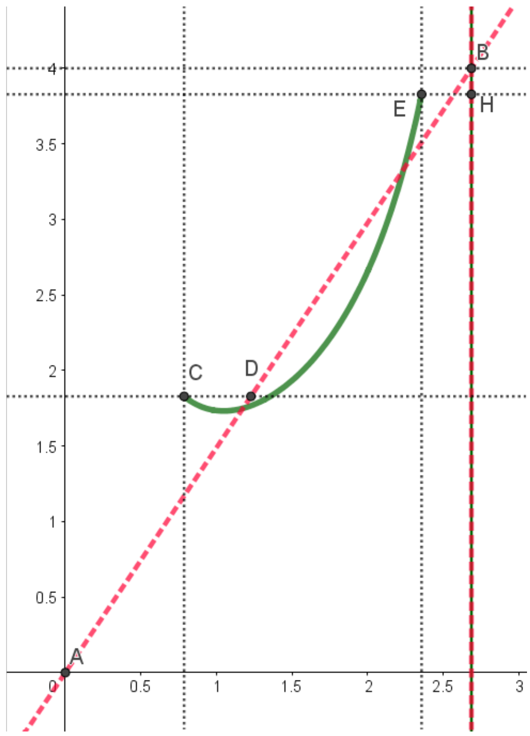
a)
Volum av omdreiningslegemet er 26.48.

1	f(x):=(2-cos(x))/sin(x) $\approx\ f(x) := \frac{-\cos(x)+2}{\sin(x)}$
2	V:=pi*Integral(f^2,pi/4,3 pi/4) $\to\ V := \frac{-1}{2}\pi^2 + 10\pi$
3	$2 $\approx\ 26.48$

Det gis 1 poeng for rett strategi og 1 poeng for riktig svar

b)
Løser denne i Geogebra

1. Tegner kurvebiten som danner omdreiningslegemet (grønn)
2. Tegner inn kjeglen, legger toppen i origo (rød stiplet)
3. For at legemet skal få plass oppi kjeglen må punkte C flyttes til D, denne avstanden er 0.44
4. Da flyttes også punktet E, men E kan bare flyttes til H for ellers er det utenfor kjeglen. Avstanden EH=0.33
5. Vi kan konkludere med at omdreiningslegemet ikke får plass i kjeglen



Dersom kandidaten viser forståelse for problemstillingen og viser en strategi som kan virke, så kan det gis 1 poeng. Dersom kandidaten i tillegg klarer å avgjøre om omdreiningslegemet får plass, gis det full uttelling.

Oppgave 6 (4 poeng)

a)
Gitt to påfølgende punkter på grafen. Avstanden mellom x-verdiene er h, og avstanden mellom y-verdiene er $k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, Da kan vi bruke Pythagoras' fordi S, k og h danner en rettvinklet trekant.

$$
\begin{aligned}
h &= x_{i+1} - x_i \\
k_i &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \\
S_i^2 &= h^2 + k_i^2 \\
S_i &= \sqrt{h^2 + k_i^2}
\end{aligned}
$$

> Kandidater som bruker Pyhagoras' setning og som begrunner at lengdene til katetene i de ulike rettvinklede trekantene er henholdsvis h og $k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ kan få full uttelling.

b) Velger å løse denne i ved programmering Python :

1. Bestemme start (a) og sluttverdi (b), og hvor mange deler intervallet skal deles i (N)
   start = a = -1
   slutt = b = 1
   antall deler = N = 1000 , denne bestemmer nøyaktigheten.
2. Beregne bredden på hver del (h).
   bredden på delene = $h = \frac{b-a}{N}$
   x-verdiene $x_i = a + i \cdot h$
3. Beregne lengden av linjestykket S_i
   $k = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ $L = \sqrt{h^2 + k^2}$
4. Summere alle linjestykkene

Program

```python
import numpy as np
start = -1
slutt = 1
N = 10000
h = (slutt-start)/N
L = 0
def f(x):
    return np.sqrt(1-x**2)
def S(k):
    return np.sqrt(h**2+k**2)
x = np.linspace(start, slutt, N)
y = f(x)
for i in range(0, len(y)-1):
    k = y[i+1]-y[i]
    L = L+S(k)
print(f'Lengden av grafen er {L}')
```

Output

```
Lengden av grafen er 3.1414
```

Vi vet at dette er en halvsirkel med radius 1, da vet vi at buelengden er π, så dette er ganske så nøyaktig.

Kommentarer (trenger ikke være med på eksamen)

(1)	Importerer pakken numpy for å kunne bruke linspace og sqrt
(2-3)	definerer grafens start og slutt-verdi
(3)	definerer antall deler - dette gir nøyaktighet
(5)	definerer h som bredden til hver del
(6)	setter lengden til grafen til null når vi starter
(7-8)	Definerer funksjonen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
(9-10)	Definerer funksjonen $S(k) = \sqrt{h^2+k^2}$, lenden av linjestykket
(11)	Definerer en array med x-verdier
(12)	Definerer en array med y-verdier
(13)	Kjører en for-loop gjenom arrayen med y-verdier
(14)	$k = f(x_{i+1}) - f(x_i)$
(15)	Beregner lengden ved økning av nytt linjestykke for hver runde i løkka.
(16)	Skriver ut lenden til grafen i intervallet.

Nøyaktigheten vil her vært avhengig av antall biter vi deler intervallet i, altså størrelsen på N.
Når N er stor vil nøyaktigheten bli god. Her har vi satt nøyaktigheten til N=10000, og lengden er $L = 3.1414$.

Korrekt utregning som er kommunisert godt og som vurderer om svaret er rimelig nøyaktig gis full uttelling.

Veiledende karaktergrenser

Karakter	1	2	3	4	5	6
Poeng		10	20	30	37	46