Utdanningsdirektoratet

Eksamen

24.05.2023 REA3058 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Del 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Regn ut integralene

a) $\int_{-1}^{1}(4x^3 - x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{0}^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 2

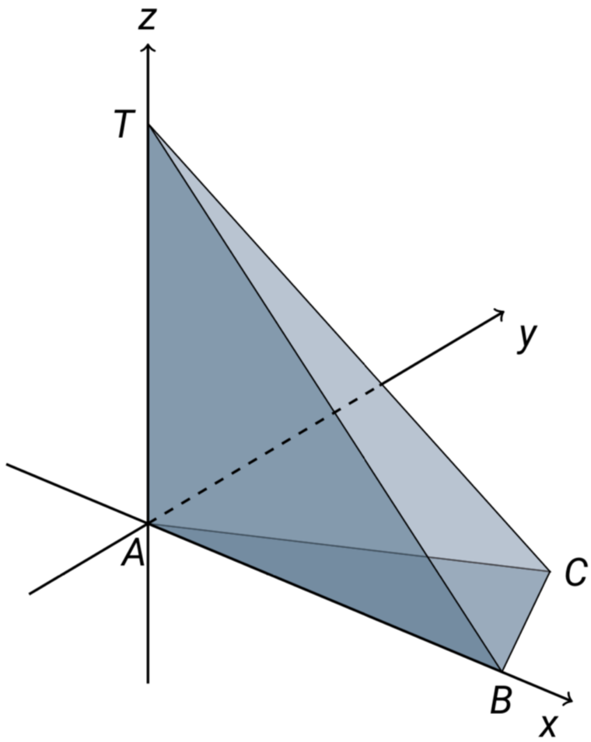
a) Vis at dersom $f(x) = \tan x$, så er $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b) Regn ut

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$$

Oppgave 3

Punktene $A(0,0,0)$, $B(5,0,0)$, $C(4,2,0)$ og $T(0,0,5)$ danner en pyramide, slik figuren viser.



a) Regn ut volumet av pyramiden.

b) Regn ut arealet av $\triangle BCT$.

c) Bestem avstanden fra A til planet som går gjennom B, C og T.

Oppgave 4

En elev har skrevet følgende kode:

```
1   a = 3
2   d = 4
3
4   N = 10
5   S = 0
6
7   for i in range(N):
8       S = S + a
9       a = a + d
10
11  print(S)
```

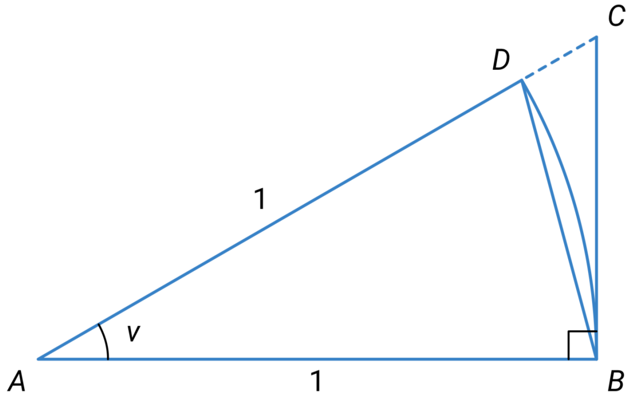
a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut.

b) Hva blir resultatet når programmet kjøres, dersom N settes til 100 i linje 4?

Oppgave 5

I denne oppgaven skal du vise at $\lim\limits_{v \to 0^+} \dfrac{\sin v}{v} = 1$.

I figuren nedenfor er $AB = AD = 1$, og buen BD er del av en sirkel med sentrum i A. Vi lar $\angle BAC = v$ (målt i radianer).



a) Bruk arealbetraktninger til å begrunne at

$$\frac{1}{2}\sin v < \frac{1}{2}v < \frac{1}{2}\tan v$$

b) Forklar at dette gir oss

$$1 < \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}$$

c) Bruk ulikhetene fra oppgave b til å begrunne at $\lim\limits_{v \to 0^+} \dfrac{\sin v}{v} = 1$.

Del 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser hvor mange millioner kroner som ble brukt på strømming av musikk i Norge noen år i perioden 2008–2018.

År	2008	2010	2012	2014	2016	2018
Strømming	2	70	246	456	582	655

a) Lag en modell F som du kan bruke til å bestemme hvor mange millioner kroner som ble brukt på strømming i Norge per år i perioden 2008–2018 og årene etterpå. Velg x-verdier slik at $F(0)$ gir hvor mange millioner kroner som ble brukt i 2008. Begrunn valget av modell.

Nedenfor ser du fire formler.

$$I = \int_{-0{,}5}^{10{,}5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \quad G = \frac{1}{5}\int_{2{,}5}^{7{,}5} F(x)\,\mathrm{d}x \ , \quad S = \sum_{i=0}^{10} F(i) \ , \quad D = \frac{F(5{,}001) - F(5)}{0{,}001}$$

b) Bestem I, G, S og D.

c) Gi en praktisk tolkning av svarene i oppgave b.

Oppgave 2

Planet α er bestemt av punktene $A(1,0,3)$, $B(0,1,2)$ og $C(2,3,2)$.

a) Bestem en likning for planet β som er parallelt med α og går gjennom punktet $P(2,-5,5)$.

En kule tangerer α i punktet A og β i et punkt Q.

b) Bestem eksakte verdier for koordinatene til Q.

Oppgave 3

En fabrikk lager kroker ved hjelp av en 3D-printer. Posisjonen til dysen i 3D-printeren etter *t* sekunder er gitt ved posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t)=\left[1+e^{\frac{t}{20}}\ ,1-\sin t,\ \frac{1}{10}e^{-2t+2}+\cos t\right]\quad,\quad t\in[0\ ,5]$$

Her er cm enheten langs aksene.

a) Bestem banefarten til 3D-printeren etter 1 sekund.

b) Ved hvilket tidspunkt er banefarten lavest?

c) Avgjør om fartsretningen noen gang er parallell med *xy*-planet eller parallell med *yz*-planet. Husk å begrunne svaret.

Oppgave 4

Foreldrene til David vil gi ham ukepenger. Han får to ulike tilbud. I tilbud 1 får han 100 kroner den første uken. Beløpet a_n som han får i uke n, er gitt ved den rekursive formelen

$$a_n = a_{n-1} + 10$$

I tilbud 2 får han 100 kroner den første uken. Beløpet b_n som han får i uke n, er gitt ved den rekursive formelen

$$b_n = b_{n-1} \cdot 1{,}05$$

a) Bestem det ukentlige beløpet han får de fire første ukene med hvert av de to tilbudene.

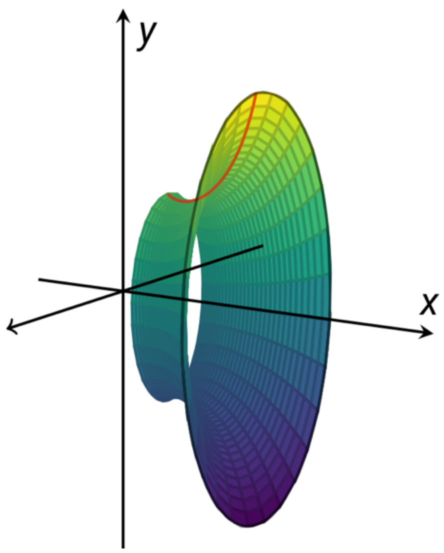
b) Hvor mange uker tar det før tilbud 2 vil gi mer ukelønn enn tilbud 1?

c) Hvor mange uker tar det før tilbud 2 til sammen vil gi mer lønn enn tilbud 1?

Oppgave 5

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x} \quad , \qquad D_f = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$



Vi roterer grafen til f om x-aksen.

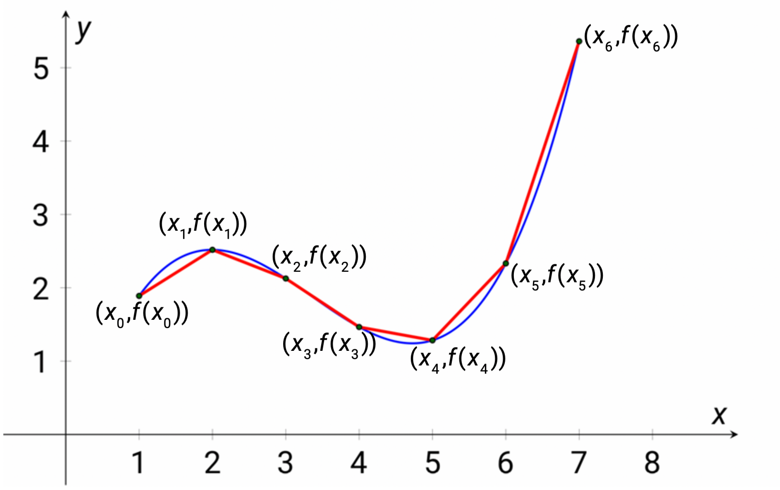
a) Bestem volumet av omdreiingslegemet vi da får.

Omdreiingslegemet skal plasseres i en rett kjegle med radius 4 og volum 45.

b) Avgjør om omdreiingslegemet får plass i kjeglen.

Oppgave 6

For en deriverbar funksjon f kan vi finne en tilnærmet verdi for lengden av grafen mellom to x-verdier ved å bruke en polylinje, slik figuren nedenfor illustrerer.

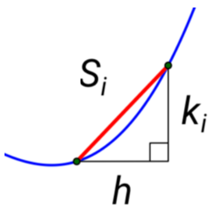


Dersom vi skal finne lengden av grafen i et intervall $[a, b]$, kan vi dele dette intervallet i N like store delintervall $[x_i,\ x_{i+1}]$ med bredde $h = \dfrac{b-a}{N}$ og $x_i = a + i \cdot h$.

Vi regner da ut lengdene av linjestykkene som går mellom punktene $(x_i, f(x_i))$ og $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Summen av disse lengdene vil da være en tilnærmet verdi for lengden av grafen fra $x = a$ til $x = b$.

a) Forklar at lengden av linjestykket som går fra punktet $(x_i, f(x_i))$ til punktet $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, er gitt ved

$$S_i = \sqrt{h^2 + k_i^2} \ , \text{ der } k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$



Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \ , \quad D_g = [-1, 1]$$

b) Regn ut en god tilnærmet verdi for lengden av grafen til g ved å bruke framgangsmåten beskrevet ovenfor. Vurder om svaret er rimelig.