Eksamen R2 - REA3024 - gammel reform
Vår 2023
Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sin x \\ f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos c \\ &= \sin x + x \cdot \cos x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\cos(2x)}{\sin x} \\ g'(x) &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\ &= \frac{-\sin(2x) \cdot 2 \cdot \sin x - \cos(2x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-2\sin(2x)\sin x - \cos(2x)\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-2 \cdot 2\sin x \cos x \sin x - (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-4\sin^2 x \cos x - \cos^3 x + \sin^2 x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-3\sin^2 x \cos x - \cos^3 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\cos x(3\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= -\cos x\left(3 + \frac{1}{\tan x}\right) \end{aligned}$$

Alternativ løsning :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\cos(2x)}{\sin x} \\
&= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x} \\
&= \frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 x}{\sin x} \\
&= \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} \\
g'(x) &= \frac{-2 \cdot 2\sin x \cos x \cdot \sin x - (1 - 2\sin^2 x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-4\sin^2 x \cos x - \cos x + 2\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-2\sin^2 x \cos x - \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\cos x(1 + 2\sin^2 x)}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

Andre alternativer :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{-2\sin(2x) \cdot \sin(x) - \cos(2x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} \\
&= -2\cos(x) - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}
\end{aligned}$$

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$
\begin{aligned}
\int (4x^3 - x)\ dx &= \frac{4}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C \\
&= x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C \\
\int_{-1}^{1} (4x^3 - x)\ dx &= \left[x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} \\
&= \frac{1}{2}(e^{2\ln 2} - e^0) \\
&= \frac{1}{2}(e^{\ln 4} - 1) \\
&= \frac{1}{2}(4 - 1) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\
f'(x) &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x
\end{aligned}$$

, som skulle vises.
b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\, dx &= \int \frac{(1+\tan^2 x)}{u} \cdot \frac{1}{(1+\tan^2 x)}\, dx \\
&= \int \frac{1}{u}\, du \\
&= \ln |u| + C \\
&= \ln |\tan x| + C
\end{aligned}$$

Mellomregning:

$$\begin{aligned}
u &= \tan x \\
u' &= 1 + \tan^2 x \quad \text{se oppg.a)} \\
dx &= \frac{1}{u'} = \frac{1}{(1+\tan^2 x)}
\end{aligned}$$

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

$$2 + 8 + 14 + ... + 296$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
d &= 6 \\
\frac{296-2}{6} &= 49 \\
\text{altså er det 49 mellomrom },\ n &= 50 \\
S_{50} &= \frac{296+2}{2} \cdot 50 \\
&= 149 \cdot 50 \\
&= 7450
\end{aligned}$$

Alternativ løsning :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
d &= 6 \\
a_n &= a_1 + d(n-1) \\
&= 2 + 6(n-1) \\
&= 6n - 4 \\
s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\
&= \frac{n(2 + 6n - 4)}{2} \\
&= \frac{2n(3n-1)}{2} \\
&= n(3n-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 296 \\
6n - 4 &= 296 \\
6n &= 300 \\
n &= 50 \\
s_{50} &= 50(150-1) \\
&= 50 \cdot 149 \\
&= 7450
\end{aligned}$$

b)

$$5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + ...$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 5 \\
k &= \frac{1}{3} \\
S &= \frac{a_1}{1-k} \\
&= \frac{5}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Oppgave 5 (3 poeng)

$$y' + 3y = 3$$
$$(y \cdot e^{3x})' = 3e^{3x}$$
$$\int (y \cdot e^{3x})' \, dx = \int 3e^{3x} \, dx$$
$$y \cdot e^{3x} = e^{3x} + C$$
$$y = 1 + Ce^{-3x}$$

setter inn (0,5)

$$5 = 1 + C$$
$$C = 4$$
$$y = 1 + 4e^{-3x}$$

Oppgave 6 (3 poeng)

Leser av amplituden på grafen : $A = 3$
Perioden er $p = \frac{\pi}{2}$, da blir $k = \frac{2\pi}{\pi/2}$
Grafen krysser likevektslinja på vei opp i $x = \frac{\pi}{6}$
Da får vi :

$$\begin{aligned}
f(x) &= A \cdot \sin(cx - \phi) + d \\
&= 3\sin\left(4\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) - 1 \\
&= 3\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) - 1 \\
f'(x) &= 3\cos\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 4 \\
&= 12\cos\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) \\
f'(0) &= 12\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6
\end{aligned}$$

Oppgave 7 (6 poeng)

a)
Volum at tetraeder : $V = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [5, 0, 0] \\
\overrightarrow{AC} &= [4, 2, 5] \\
\overrightarrow{AT} &= [0, 0, 5] \\
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [0, -(0-0), 10-0] = [0, 0, 10] \\
(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AT} &= [0, 0, 10] \cdot [0, 0, 5] \\
&= 50 \\
V &= \frac{1}{6} \cdot 50 = \frac{25}{3}
\end{aligned}
$$

b)
Areal trekant : $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BT} &= [-5, 0, 5] \\
\overrightarrow{BC} &= [-1, 2, 0] \\
\overrightarrow{BT} \times \overrightarrow{BC} &= [-5, 0, 5] \times [-1, 2, 0] \\
&= [-10, -5, -10] \\
\overrightarrow{BT} \times \overrightarrow{BC} &= |[-10, -5, -10]| \\
&= \sqrt{100 + 25 + 100} \\
&= 15 \\
A &= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}
$$

c)
Plan α går gjennom punktene B, C og T. Da kan vi finne normalvektoren :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BT} \times \overrightarrow{BC} &= [-5, 0, 5] \\
&= 5[-1, 0, 1] \\
\vec{n_\alpha} &= [-1, 0, 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha \ &: \ 2(x-5) + 1(y-0) + 2(z-0) = 0 \\
\alpha \ &: \ 2x + y + 2z - 10 = 0
\end{aligned}
$$

Avstand fra A til α:

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

Oppgave 8 (6 poeng)

a)

$$f(x) = \cos(2x)\ ,\ D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \\ \cos(2x) &= \frac{1}{2} \\ 2x = \frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi &\vee 2x = -\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + n\cdot\pi &\vee x = -\frac{\pi}{6} + n\cdot\pi \\ x = \frac{\pi}{6} &\vee x = -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

da vet vi at intervallet er $x \in \left[-\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

$$\begin{aligned} \int \cos(2x)\ dx &= \frac{1}{2}\sin(2x) + C \\ \int_{-pi/6}^{pi/6} \cos(2x) &= \frac{1}{2}[\sin(2x)]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Arealet under det skraverte området er : $\frac{2\pi}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$
Skravert areal blir da :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos(4x) &= \cos^2(2x) - \sin^2(2x) \\ &= \cos^2(2x) - (1 - \cos^2(2x)) \\ &= 2\cos^2(2x) - 1 \\ \cos^2(2x) &= \frac{1}{2}(\cos(4x) + 1) \\ (f(x))^2 &= \cos^2(2x) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(4x) + 1) \end{aligned}$$

, som skulle vises.
c)

$$
\begin{aligned}
\int (f(x))^2 \ dx &= \int \frac{1}{2}(\cos(4x)+1) \ dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\cos(4x)+1) \ dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot (\frac{1}{4}\sin(4x)+x)+C \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\sin(4x)+x)+C \\
V_1 &= \pi \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} (f(x))^2 \ dx \\
&= \pi \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin(4x)+x\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\sin(2\pi/3\right)+\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}\sin\left(-2\pi/3\right)-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{8}+\frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

Så må vi trekke fra hullet i midten :

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \pi \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left[x\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}
$$

Da blir volum av omdreiningslegemet :

$$
\begin{aligned}
V &= \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{8}+\frac{\pi^2}{6}\right)-\frac{\pi^2}{12} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{8}+\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}
$$

Oppgave 9 (2 poeng)

$$1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + ... + n(n+5) = \frac{n(n+1)(n+8)}{3}$$

$P(1)$:
v.s. : $1 \cdot 6 = 6$
h.s. : $\frac{1 \cdot 2 \cdot 9}{3} = 6$
h.s.=v.s. ,altså er påstanden sann for $n = 1$

$P(n)$:
$1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + ... + n(n+5) = \frac{n(n+1)(n+8)}{3}$
påstanden antas sann

$P(n+1)$:

$$\begin{aligned}
v.s. &= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + ... + n(n+5) + (n+1)((n+1)+5) \\
&= \frac{n(n+1)(n+8)}{3} + (n+1)(n+6) \\
&= \frac{n(n+1)(n+8)}{3} + \frac{3(n+1)(n+6)}{3} \\
&= \frac{n+1}{3}(n(n+8) + 3(n+6)) \\
&= \frac{n+1}{3}(n^2 + 8n + 3n + 18) \\
&= \frac{n+1}{3}(n^2 + 11n + 18) \\
&= \frac{n+1}{3}(n+2)(n+9) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+9)}{3} \\
h.s. &= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+8)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+9)}{3}
\end{aligned}$$

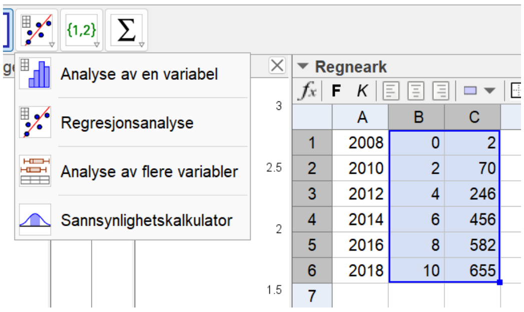
h.s.=v.s. ,altså er påstanden sann for alle verdier av $n \in N$

DEL 2

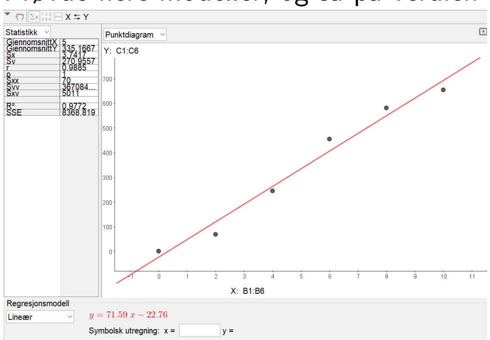
Oppgave 1 (6 poeng)

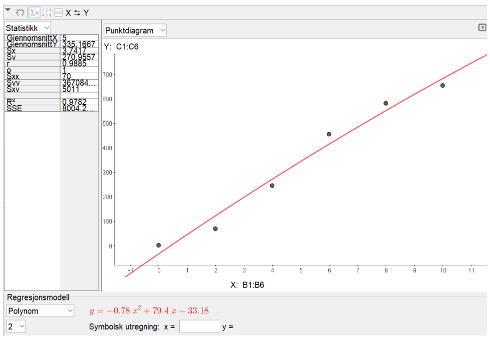
a)

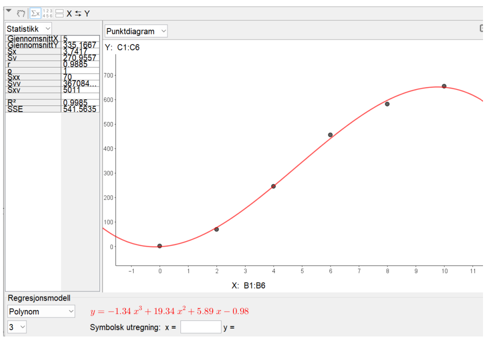
Vi legger verdiene inn i regnearket i Geogebra og bruker regresjon.

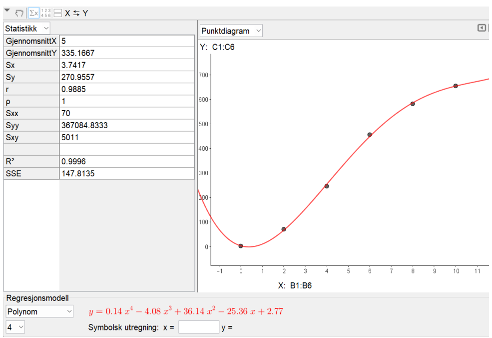


Prøvde flere modeller, og så på verdien til R^2

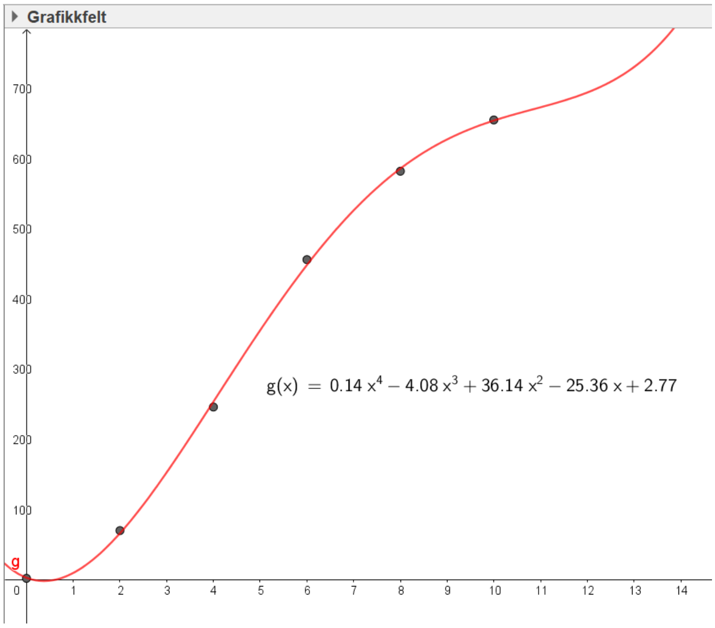








og valgte å gå for en 4.gradsfunksjon som ga en $R^2 = 0,9996$ (1 betyr at alle punktene ligger på grafen). Den videre utviklingen etter 2018 vil nok fortsette å vokse, men ikke like fort som tidligere. Det er uklart om videre vekst vil avta.



b)

$$I = \int_{-0.5}^{10.5} F(x)dx = 3686$$

Hvis vi antar at x-verdiene er midtpunkt i hvert år:
Det ble brukt 3686 mill.kr i årene 2008-2018

Hvis vi antar at x-verdiene er starten på hver år :
Fra sommeren 2007 til sommeren 2018 ble det brukt 3686 millioner kr. på strømming av musikk.

$$G = \frac{1}{5}\int_{2.5}^{7.5} F(x)dx = 347$$

I perioden sommer 2010 til sommer 2015 ble det gjennomsnittlig årlig brukt 347 mill.kr.

$$S = \sum_{i=0}^{10} F(i) = 3682$$

I perioden fra 2008 til 2017 ble det brukt 3682 millioner kr. på strømming av musikk.

$$D = \frac{F(5{,}001) - F(5)}{0{,}001} = 98,7$$

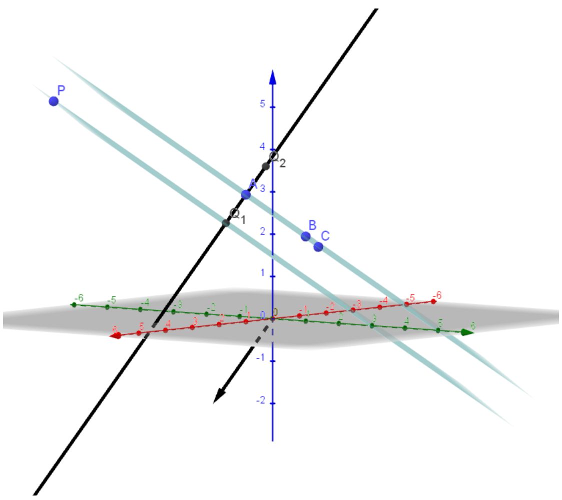
Momentan vekst i 2013 (slutten av år 5) var 98,7 mill.kr., altså økte bruken av penger på strømming med 98,7 mill.kr. i 2013.

Oppgave 2 (4 poeng)

$$\overrightarrow{AB} = [-1, 1, -1]$$
$$\overrightarrow{AC} = [1, 3, -1]$$
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [2, -2, -4]$$
$$\vec{n_\alpha} = [1, -1, -2]$$
$$\beta : x - y - 2z + 3 = 0$$

CAS

1	A:=(1,0,3) → $A := (1, 0, 3)$
2	B:=(0,1,2) → $B := (0, 1, 2)$
3	C:=(2,3,2) → $C := (2, 3, 2)$
4	P:=(2,-5,5) → $P := (2, -5, 5)$
5	α:=Plan(A,B,C) → $\alpha : x \cdot 2 + y\,(-2) + z\,(-4) = -10$
6	β:=Plan(P, α) → $\beta := x - y - 2z = -3$



CAS

7 q:=Avstand(P, α)

$\rightarrow \; q := \frac{\sqrt{6}}{3}$

8 n_β:=(1,-1,-2)

$\rightarrow \; n_\beta := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

9 l:=Linje(A, n_β)

$\rightarrow \; l : X = (1, 0, 3) + \lambda \, (1, -1, -2)$

10 Q:=(1+t,-t,3-2t)

$\rightarrow \; Q := (1 + t, -t, 3 - 2\,t)$

11 AQ:=Vektor(A,Q)

$\rightarrow \; AQ := \begin{pmatrix} 1 + t - 1 \\ -t \\ 3 - 2\,t - 3 \end{pmatrix}$

12 Løs(|AQ|=q)

$\rightarrow \; \left\{ t = \frac{-1}{3}, t = \frac{1}{3} \right\}$

13 Q_1:=ByttUt(Q, t, 1 / 3)

$\rightarrow \; Q_1 := \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{7}{3} \right)$

14 Q_2:=ByttUt(Q, t, -1/3)

$\rightarrow \; Q_2 := \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{11}{3} \right)$

Oppgave 3 (6 poeng)

CAS

1	f(x):=LøsODE(350 y'=250-10 y,(0,0)) → $f(x) := -25.0\, e^{\frac{-1.00}{35.0} x} + 25.0$
2	Grenseverdi(f, ∞) → 25.0
3	g(x):=LøsODE(350 y'=k-10 y,(0,0)) → $g(x) := \frac{-1.00}{10.0} k\, e^{\frac{-1.00}{35.0} x} + \frac{1.00}{10.0} k$
4	Grenseverdi(g, ∞) → $\frac{1.00}{10.0} k$
5	Løs(1 / 10 k=60) → $\{k = 600\}$

a)

b)

c)

Oppgave 4 (4 poeng)

a)

$$1 + \left(\frac{x}{2} - 3\right) + \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - 3\right)^3 + ...$$

$k = \frac{x}{2} - 3$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} - 3 &< 1 \\
\frac{x}{2} &< 4 \\
x &< 8 \\
\frac{x}{2} - 3 &> -1 \\
\frac{x}{2} &> 2 \\
x &> 4 \\
x &\in \langle 4, 8 \rangle
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
-1 <& k < 1 \\
-3 <& x < 5 \\
-4 < x - 1 < 4& \\
-1 <& \frac{x-1}{4} < 1 \\
k =& \frac{x-1}{4}
\end{aligned}$$

Da kan rekka være :

$$1 + \left(\frac{x-1}{4}\right) + \left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{4}\right)^3 + ...$$

men vi har også krav om å konvergere mot 3 når $x = 4$.

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{1-k} &= 3 \\
\frac{a_1}{1 - \frac{x-1}{4}} &= 3 \\
\frac{a_1}{1 - \frac{4-1}{4}} &= 3 \\
\frac{a_1}{1 - \frac{3}{4}} &= 3 \\
\frac{4a_1}{4-3} &= 3 \\
4a_1 &= 3 \\
a_1 &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Da blir rekka :

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{4}\right)^3 + ...$$

Oppgave 5 (4 poeng)

$$f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}\ ,\ D_f = \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle$$

a)
Omdreiningslegeme:

$$V = \pi \int_{pi/4}^{3\pi/4} f(x)^2 \, dx =$$

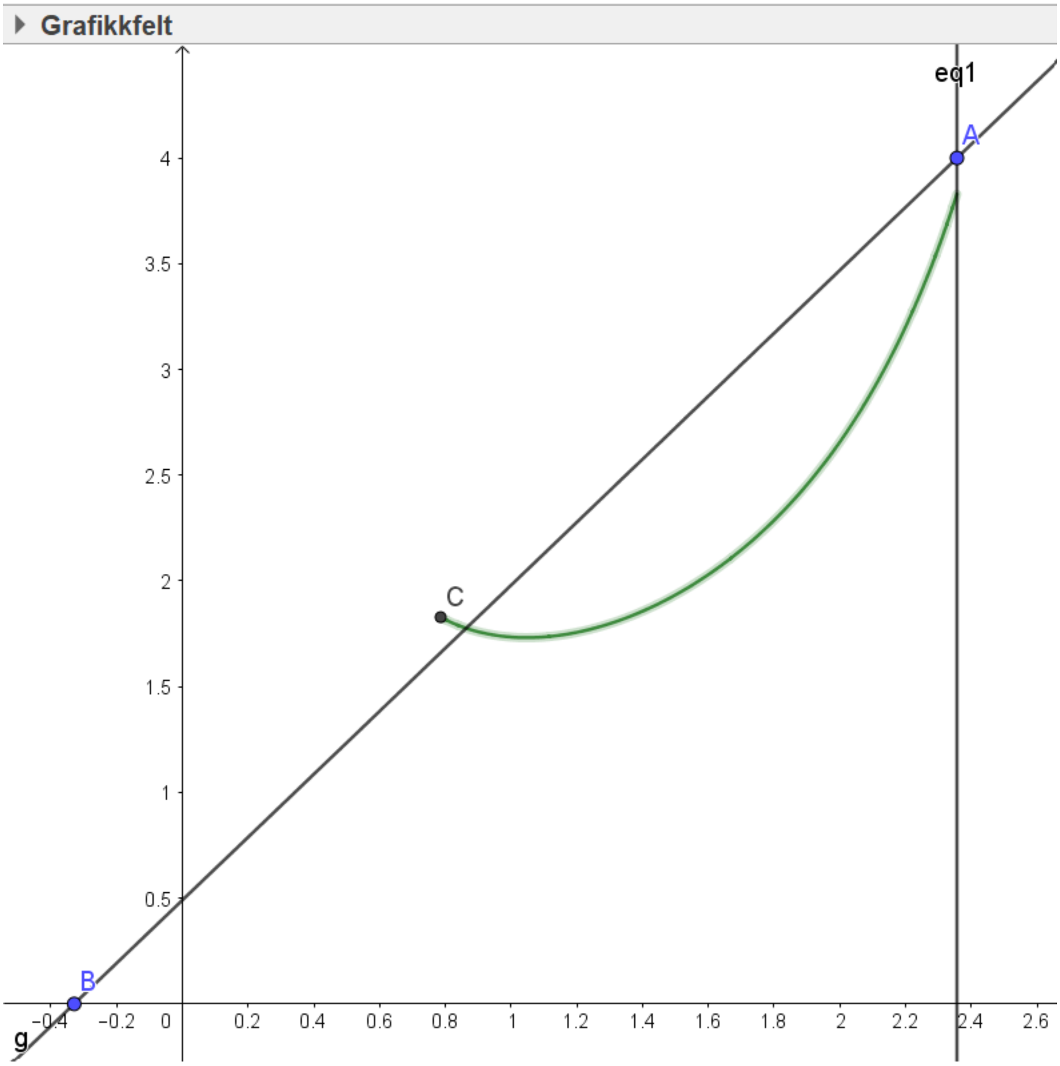
b)
For å sjekke om legemet får plass i kjeglen plasserer jeg kjeglens topp på $x = \frac{3\pi}{4}$
Høyden til kjeglen er : $h = \frac{136}{16\pi}$.

Da kan jeg beskrive kjeglen ved en rett linje gjennom punktene $A(\frac{3\pi}{4}, 4)$ og $B(\frac{3\pi}{4} - \frac{135}{16\pi}, 0)$
Radien i kjeglen $r = 4$ gir oss y-verdien til A, x-verdien til B ligger $h = \frac{135}{16\pi}$ lavere enn $\frac{3\pi}{4}$, som er toppen på legemet.

Sjekker så om $f(\pi/4)$ ligger over eller under linja.
Det ligger over linja altså får ikke legemet plass i kjeglen.

CAS

1	f(x):=(2 - cos(x)) / sin(x) → $f(x) := \frac{-\cos(x) + 2}{\sin(x)}$
2	F(x):=Funksjon(f, pi/4, 3 pi/4) → $F(x) := \text{Dersom}\left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq 3 \cdot \frac{\pi}{4}, \frac{-\cos(x) + 2}{\sin(x)}\right)$
3	Løs(1/3 pi 4^2 h=45) → $\left\{h = \frac{135}{16\,\pi}\right\}$
4	A:=(3 pi/4,4) → $A := \left(3 \cdot \frac{\pi}{4}, 4\right)$
5	B:=(3 pi/4-(135 / (16π)),0) → $B := \left(\frac{12\,\pi^2 - 135}{16\,\pi}, 0\right)$
6	C:=(pi/4,f(pi/4)) → $C := \left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2} - 1\right)$


Grafikkfelt
eq1
A
C
B
g
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
2.6