Arbeidshefte

Rekker - Eksamensoppgaver
Løsningsforslag

Oppgave 1

$$S(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + ...$$

$k = \frac{1-x}{1} = 1 - x$
Derom rekka konvergerer må $k \in \left\langle -1, 1 \right\rangle$

$$-1 < (1-x) < 1$$
$$-2 < -x < 0$$
$$2 > x > 0$$

Konvergensområdet er da : $x \in \left\langle 0, 2 \right\rangle$ $S(x) = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$

$S(x) = 3$

$$\frac{1}{x} = 3$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Denne løsningen er gyldig siden $x = \frac{1}{3}$ ligger innenfor konvergensområdet.

$S(x) = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = 3$$

Denne løsningen er ikke gyldig siden $x = 3$ ligger utenfor konvergensområdet.

Oppgave 2

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + a_n$$

Dette er en aritmetisk rekke : $d = 2$

$a_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$
$a_{16} = 2 \cdot 16 - 1 = 31$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2$
$S_{16} = 16^2 = 256$

$S_n > 400$
$n^2 > 400$
$n > 20$

For at summen skal blir større enn 400 må vi ha minst 20 ledd.

Oppgave 3

$$1 + e^{-x} + e^{-2} + e^{-3} + ...$$

$k = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$-1 < \frac{1}{e} < 1$, altså en konvergent rekke.

$S = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ...$$

$k = \frac{1}{e^x}$
dersom $-1 < \frac{1}{e^x} < 1$, er dette en konvergent rekke.

$\frac{1}{e^x} > 0$ for alle verdier av x.

$\frac{1}{e^x} < 1$
$e^{-x} < 1$
$-x < 0$
$x > 0$
$S = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1}$

Oppgave 4

a)

$$A_1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$
$$A_2 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)$$
$$A_3 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot A_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$$
$$A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$$
$$k = \frac{1}{2}$$

altså en uendelig konvergent geometrisk rekke.

b)
Derom vi fargelegger trekantene i ulike farger kan vi se at det er plass til 4 like spiraler. Da vil arealet på den blå spiralen være $\frac{1}{4}$.

$$S = \frac{a_1}{1-k}$$
$$S = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Oppgave 5

a)

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x} \quad , \text{ når } x \in \big\langle -1, 1 \big\rangle$$

Rekka er geometrisk med $k = x$, altså er den konvergent når $x \in \big\langle -1, 1 \big\rangle$.

b)
Vi bruker setningen at :

$$(1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + ... = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \quad , \text{ når } x \in \big\langle -1, 1 \big\rangle$$

og deriverer den opprinnelige rekka, da får vi :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... = \frac{1}{(1-x)^2} \; , \text{ når } x \in \big\langle -1, 1 \big\rangle$$

c)

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + ... &= 4 \\ 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \end{aligned}$$

d)

$$P(n) : 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + ... + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

Oppgave 6

a)
Sum av en geometrisk konvergent uendelig rekke er : $S = \frac{a_1}{1-k}$

$$\begin{aligned} k &= \frac{a_2}{a_1} \\ S &= \frac{a_1}{1-\frac{a_2}{a_1}} \\ &= \frac{a_1 \cdot a_1}{(1-\frac{a_2}{a_1}) \cdot a_1} \\ &= \frac{a_1^2}{a_1 - a_2} \end{aligned}$$

b)
Det første kvadratet er $6 \cdot 6 = 36$. Neste kvadrat har sider som er halvparten av det første.
$6^2 + 3^2 + (3/2)^2 + (3/4)^2 + ... = 36 + 9 + 9/4 + 9/16 + ...$
$k = 9/36 = 1/4$, $k = \frac{9/16}{9/4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} s &= \frac{(6^2)^2}{6^2 - 3^2} \\ &= \frac{2^4 \cdot 3^4}{3^2(2^2 - 1} \\ &= \frac{16 \cdot 9}{4-1} \\ &= \frac{144}{3} \\ &= 48 \end{aligned}$$

c)

d)Arealet av hele trekanten : $A = \frac{1}{2} \cdot 12^2 = \frac{1}{2} \cdot 144 = 72$
Firkanter + trekanter $= 48 + 24 = 72$

Oppgave 7

a)

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + ...$$

Rekka er geometrisk og konvergent fordi det finnes en k slik at $k = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.72} < 1$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-k} \\ &= \frac{1}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{e}{e-1} \end{aligned}$$

b)

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ...$$

$k = e^{-x}$
Rekka konvergerer dersom :

$$\begin{aligned} -1 &< k < 1 \\ -1 &< \frac{1}{e^x} < 1 \\ -e^x &< 1 < e^x \end{aligned}$$

dvs .

$$\begin{aligned} -e^x &< 1 \\ e^x &> -1 \end{aligned}$$

Siden $e^x > 1$ vil den også være større enn -1.

$$\begin{aligned} e^x &> 1 \\ x &> \ln 1 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Altså er konvergensområdet $x \in \left\langle 0, \rightarrow \right\rangle$
og sum av den konvergente rekka er

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{e^x}{e^x - 1} \end{aligned}$$

Oppgave 8

a + b)
Dette er en aritmetisk rekke med $d = 2$ og $a_1 = 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + d(n-1) \\
&= 1 + 3(n-1) = 3n - 2 \\
a_{16} &= 3 \cdot 16 - 2 = 48 - 2 = 46 \\
s_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \\
&= \frac{1 + 3n - 2}{2} \cdot n \\
&= \frac{n \cdot (3n-1)}{2} \\
S_{16} &= \frac{n \cdot (3n-1)}{2} \\
&= \frac{16 \cdot (1 + 46)}{2} \\
&= 376
\end{aligned}$$

c)
Vi vet at $s_{16} = 376$ og $a_{16} = 46$. Da vil $s_{17} = 376 + 46 = 422 > 400$, Vi må altså ha 17 ledd.

Oppgave 9

$$\begin{aligned}
P(1) : a \cdot k^{1-1} &= a \cdot k^0 = a \\
a \cdot \frac{k^n}{k-1} &= a \cdot \frac{k^1 - 1}{k-1} = a \\
P(n) : a + ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{n-1} &= a \cdot \frac{k^n}{k-1} \\
P(n+1) : a + ak + ak^2 + ak^3 + ... + ak^{n-1} + ak^n &= a \cdot \frac{k^n}{k-1} + ak^n \\
&= \frac{ak^n + ak^n(k-1)}{k-1} \\
&= \frac{ak^n + ak^{n+1} - ak^n}{k-1} \\
&= \frac{ak^{n+1}}{k-1} \\
a \cdot \frac{k^{n-1}}{k-1} &= \frac{ak^{n-1}}{k-1}
\end{aligned}$$

Oppgave 10

$k = \frac{1}{3}$, da er $-1 < k < 1$ altså er rekka konvergent.

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Oppgave 11

$$\begin{aligned} P(1) : n \cdot (n+3) &= 1 \cdot (1+3) \\ &= 4 \\ \frac{n(n+1)(n+5)}{3} &= \frac{1 \cdot (1+1)(1+5)}{3} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 6}{3} \\ &= 4 \\ P(n) : 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + ... + n \cdot (n+3) &= \frac{n(n+1)(n+5)}{3} \\ P(n+1) : & \\ 1 \cdot 4 + .. + n \cdot (n+3) + (n+1)((n+1)+3) &= \frac{n(n+1)(n+5)}{3} + (n+1)(n+4) \\ &= \frac{n(n+1)(n+5) + 3(n+1)(n+4)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n(n+5) + 3(n+4))}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 3n + 12)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + 8n + 12)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+6)}{3} \\ \frac{n(n+1)(n+5)}{3} &= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+5)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+6)}{3} \end{aligned}$$

Oppgave 12

a)

$$
\begin{aligned}
1+3+5+\dots+(2n-1) &= s_n \\
a_n &= a_1 + d(n-1) \\
&= 1 + 2(n-1) \\
&= 2n-1 \\
s_n &= \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n \\
&= \frac{1+2n-1}{2}\cdot n \\
&= \frac{2n}{2}\cdot n \\
&= n^2 \\
s_n &= 1600 \\
n^2 &= 1600 \\
n &= 40
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2} &= S \\
k &= \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \\
S &= \frac{a_1}{1-k} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Oppgave 13

$$
\begin{aligned}
S(x) &= 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots \\
k &= \frac{1}{e^x} \\
& x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \text{ altså vil rekka konvergere.} \\
S(x) &= \frac{1}{1-\frac{1}{e^x}} \\
&= \frac{e^x}{e^x-1}
\end{aligned}
$$

Oppgave 14

a)
Arealet av en rute er :$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Arealet av figuren blir da :

$$\begin{aligned} s_5 &= \frac{1}{25} + 2\frac{1}{25} + 3\frac{1}{25} + 4\frac{1}{25} + 5\frac{1}{25} \\ &= \frac{1}{25} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ &= \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n^2} + 2 \cdot \frac{1}{n^2} + 3 \cdot \frac{1}{n^2} + 4 \cdot \frac{1}{n^2} + ... + n \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + ... + n) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(1+n)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} s_5 &= \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{5+1}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Derom vi deler opp figuren i uendelig mange kvadrater så vil arealet til kvadratene vært halvparten av $1 \cdot 1$.

Oppgave 15

a)
$k = \frac{\frac{2}{x}}{2} = \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{x}$
Det finnes en k slik at $k = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, altså er rekka geometrisk.

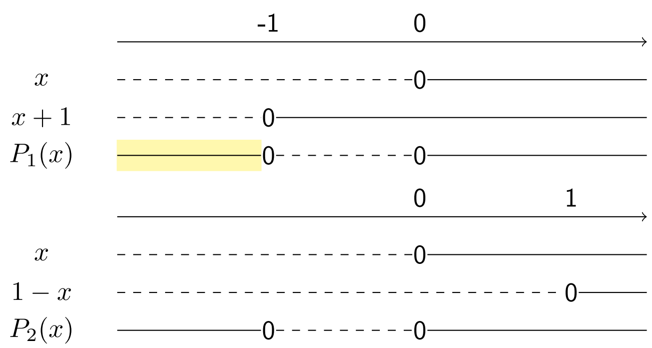
b)
Konvergensområde :

$$\begin{aligned} -1 &< k < 1 \\ -1 &> \frac{1}{x} < 1 \\ -x &> 1 < x \\ x &< -1 \\ x &> 1 \\ x &\in \left\langle \leftarrow, -1 \right\rangle \cup \left\langle 1, \rightarrow \right\rangle \end{aligned}$$

Den mest oversiktilige måten å se dette på er å lage fortegnslinjer :

$$\begin{aligned} k &> -1 \\ \frac{1}{x} &> -1 \\ \frac{1}{x} + 1 &> 0 \\ \frac{x+1}{x} &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &< 1 \\ \frac{1}{x} &< 1 \\ \frac{1}{x} - 1 &< 0 \\ \frac{1-x}{x} &< 0 \end{aligned}$$

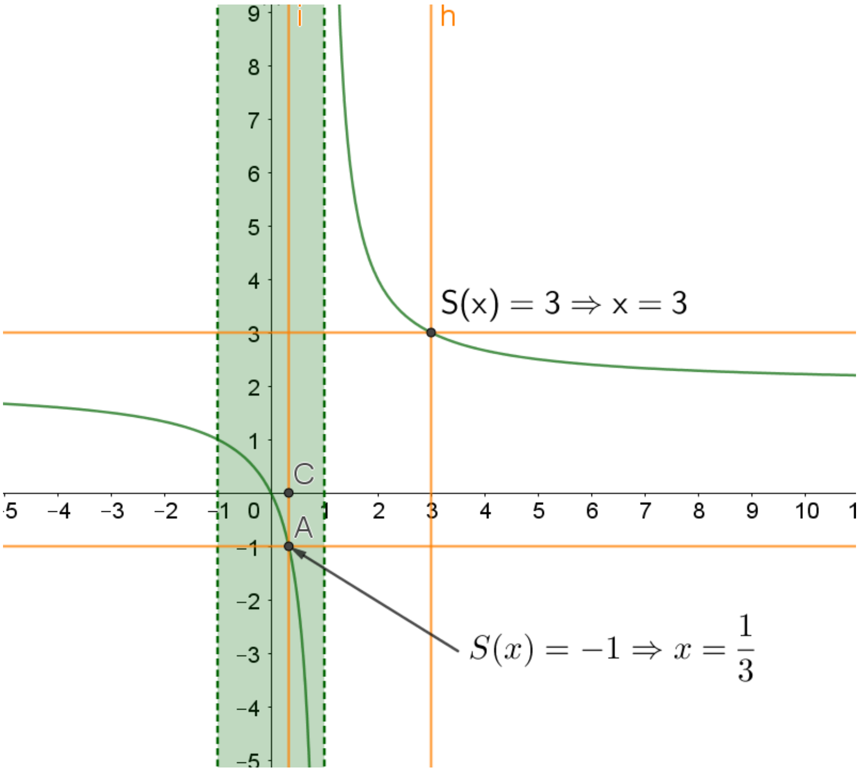


Kravet er at begge disse kravene tilfredsstilles :

c)

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{x}} \\ &= \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

d)
e)



$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x-1} &= -1 \\
\frac{2x+(x-1)}{x-1} &= 0 \\
\frac{3x-1}{x-1} &= 0 \\
3x-1 &= 0 \\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Dette er ikke en gyldig løsning fordi x er utenfor konvergensområdet.

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x-1} &= 3 \\
\frac{2x-3(x-1)}{x-1} &= 0 \\
\frac{-x+3}{x-1} &= 0 \\
-x+3 &= 0 \\
x &= 3
\end{aligned}$$