Arbeidshefte
Rekker
Eksamensoppgaver

Oppgave 1

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$s(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \ldots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekken.

b) Løs likningene

$$s(x) = 3 \text{ og } s(x) = \frac{1}{3}$$

Oppgave 2

En rekke er gitt ved

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n$$

a) Bestem a_{16} og S_{16}

b) Forklar at rekken er aritmetisk, og bruk dette til å finne et uttrykk for a_n og S_n.

c) Bestem hvor mange ledd rekken minst må ha for at $S_n > 400$.

Oppgave 3

a) En rekke er gitt ved

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \ldots$$

Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av den uendelige rekken.

b) En geometrisk rekke er gitt ved

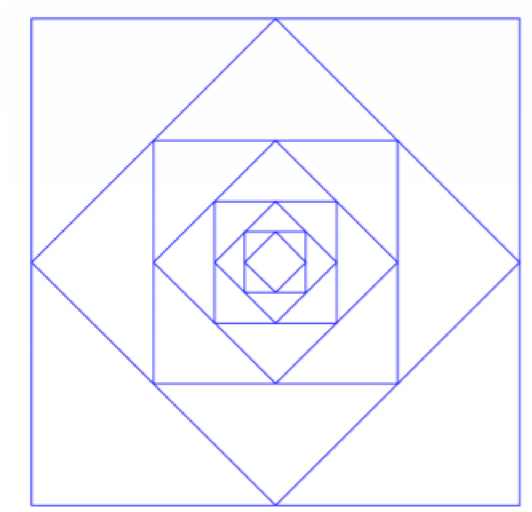
$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots$$

Bestem konvergensområdet og summen av rekken.

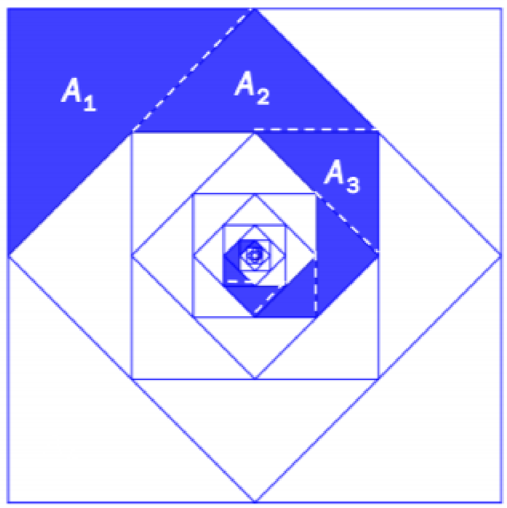
Oppgave 4

I et kvadrat med side 1 er det innskrevet et annet kvadrat med hjørner midt på sidene i det første kvadratet. I det andre kvadratet er det innskrevet et tredje kvadrat med hjørner midt på sidene i det andre kvadratet. Slik fortsetter det i en uendelig prosess. Se figur 1 nedenfor.

Vi lar $A_1, A_2, A_3, \ldots$ være en følge av arealer av rettvinklede trekanter. Disse danner en blå «spiral». Se figur 2 nedenfor.



Figur 1



Figur 2

a) Vis at arealene $A_1, A_2, A_3, \ldots$ danner en uendelig, geometrisk og konvergent tallfølge.

b) Bestem summen av rekken $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ på to måter:

- ved hjelp av relevante formler
- ved et geometrisk resonnement.

Oppgave 5

En uendelig rekke er gitt ved

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

a) Vis at $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \dfrac{1}{1-x}$, når $x \in \langle -1, 1 \rangle$

Det kan vises at

$$(1)' + (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \quad \text{når } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

b) Vis at

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{når } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

c) Bruk resultatet i oppgave b) til å vise at

$$1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots = 4$$

d) Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n):\ 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

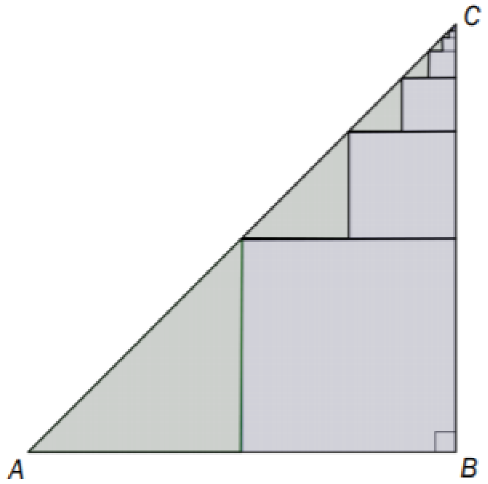
e) Bruk det du har funnet ovenfor til å bestemme $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

Oppgave 6

a) Vi har en uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ som er konvergent.
Vis at summen S av rekken kan skrives

$$S = \frac{a_1^{\ 2}}{a_1 - a_2}$$

Figuren nedenfor viser en rettvinklet og likebeint $\triangle ABC$ der katetene har lengde 12. Inne i trekanten har vi en rekke kvadrater (markert med blått på figuren). Det største kvadratet har side 6, det nest største har side 3, slik at sidene til kvadratene blir halvert i det uendelige.



b) Forklar at summen S av arealene til kvadratene kan skrives som en uendelig geometrisk rekke. Bruk formelen i oppgave a) til å bestemme S.

c) $\triangle ABC$ inneholder også uendelig mange rettvinklete og likebeinte trekanter (markert med grønt på figuren) der sidene også halveres fra gang til gang. Skriv summen av arealene til disse trekantene som en uendelig geometrisk rekke. Bestem denne summen.

d) Forklar hvordan du kunne ha funnet de to summene i oppgave b) og oppgave c) ved hjelp av et geometrisk resonnement.

Oppgave 7

a) En rekke er gitt ved

$$1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \ldots$$

Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av den uendelige rekken.

b) En geometrisk rekke er gitt ved

$$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots$$

Bestem konvergensområdet og summen av rekken.

Oppgave 8

En rekke er gitt ved

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n$$

a) Bestem a_{16} og S_{16}

b) Forklar at rekken er aritmetisk, og bruk dette til å finne et uttrykk for a_n og S_n.

c) Bestem hvor mange ledd rekken minst må ha for at $S_n > 400$.

Oppgave 9

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n): \quad a + ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Oppgave 10

Vi har gitt den uendelige rekken

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$$

Forklar at rekken konvergerer, og bestem summen av rekken.

Oppgave 11

Bevis påstanden ved induksjon

$$P(n):\ 1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+n\cdot(n+3)=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}\quad,\quad n\in\mathbb{N}$$

Oppgave 12

Vi har gitt rekken

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

a) Bestem et uttrykk for summen S_n av de n første leddene, og bestem hvor mange ledd vi må ta med for at S_n skal bli 1 600.

En uendelig rekke er gitt ved

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$

b) Forklar at dette er en konvergent, geometrisk rekke. Bestem summen av rekken.

Oppgave 13

Gitt rekken

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\cdots\qquad,\ x>0$$

1) Forklar at rekken er geometrisk, og at den konvergerer.

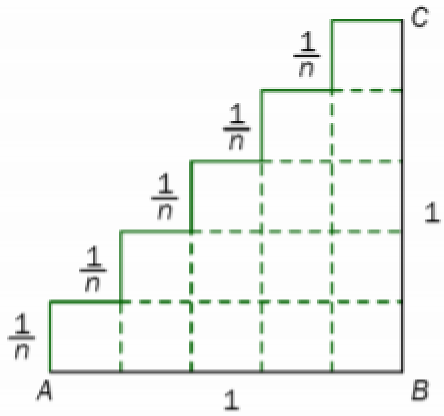
2) Vis at summen er gitt ved

$$S(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$$

Oppgave 14

En figur består av n søyler med kvadratiske ruter med side $\frac{1}{n}$. Den første søylen inneholder én rute, den andre to ruter, og så videre. Søyle nummer n inneholder n ruter.

Figuren nedenfor er tegnet for $n = 5$



a) Bestem arealet av figuren ovenfor.

b) Forklar at det samlede arealet av n søyler er

$$S_n = 1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Vis at summen av rekken kan skrives $S_n = \frac{n+1}{2n}$

c) Bruk rekken til å bestemme S_5. Kommenter svaret.

d) Vis at $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

Bruk også et geometrisk resonnement til å begrunne at svaret er riktig.

Oppgave 15

Vi har gitt den uendelige rekken

$$2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\cdots$$

a) Hva slags rekke er dette? Begrunn svaret ditt.

b) Bestem konvergensområdet til rekken.

c) Vis at summen av rekken er $S(x)=\frac{2x}{x-1}$

d) Tegn grafen til $S(x)$

e) Løs likningen $S(x)=-1$ og $S(x)=3$ både grafisk og ved regning.