Arbeidshefte
Romgeometri
Eksamensoppgaver
Løsningsforslag

Oppgave 1 (Eksamen V2016 R2 Del 1 Oppgave 7)

Punktene $A(1,-4,1)$ og $B(3,0,5)$ ligger i planet α.

Vektoren $\vec{n_\alpha} = [k,1,-k]$ står normalt på α for en bestemt verdi av konstanten k.

a) Vis at planet α er gitt ved $2x+y-2z+4=0$

b) Planet α skjærer z-aksen i punktet C. Bestem koordinatene til C.

c) Bestem volumet av pyramiden ABCO, der O er origo.

d) En kule har sentrum i origo og tangerer planet α i et punkt P .Bestem koordinatene til punktet P .

Løsningsforslag

a)

> Punktene $A(1,-4,1)$ og $B(3,0,5)$ ligger i planet α.
> Vektoren $\vec{n_\alpha} = [k,1,-k]$ står normalt på α for en bestemt verdi av konstanten k.
> Vis at planet α er gitt ved $2x+y-2z+4=0$

Finner først $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [3-1, 0-(-4), 5-1]\\ &= [2,4,4]\\ &= 2[1,2,2]\end{aligned}$$

En vektor i planet vil stå vinkelrett på normalvektoren til planet, da får vi :

$$[1,2,2]\cdot[k,1,-k] = k+2-2k = 0 \;\Rightarrow\; k=2 \;\Rightarrow\; \vec{n_\alpha} = [2,1,-2]$$

Da blir planet α :

$$\begin{aligned}\alpha : 2(x-1)+(y+4)-2(z-1) &= 0\\ 2x+y-2z+4 &= 0\end{aligned}$$

b)

> Planet α skjærer z-aksen i punktet C. Bestem koordinatene til C.

Når planet skjærer z-aksen er $x = 0$ og $y = 0$
$\alpha : 2 \cdot 0 + 0 - 2z + 4 = 0 \;\Rightarrow\; z = 2 \Rightarrow C(0, 0, 2)$
c)

> Bestem volumet av pyramiden ABCO, der O er origo.

Finner $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{AC} = [0 - 1, 0 - (-4), 2 - 1] = [-1, 4, 1]$
$\overrightarrow{AO} = [0 - 1, 0 - (-4), 0 - 1] = [-1, 4, -1]$

Volum $=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AO}| = \frac{1}{6}|([2, 4, 4] \times [-1, 4, 1]) \cdot [-1, 4, -1])$

Finner først vektorproduktet :
$[2, 4, 4] \times [-1, 4, 1] = \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = [16 - 4, -(-4 - 2), -4 - 8] = [12, 6, -12] =$
$6[2, 1, -2]$

Setter så dette inn i formelen :
Volum $=\frac{1}{6}|[12, 6, -12] \cdot [-1, 4, -1]| = \frac{1}{6}| - 12 + 24 + 12| = \frac{1}{6}24 = 4$

d)

> En kule har sentrum i origo og tangerer planet α i et punkt P .Bestem koordinatene til punktet P .

$S = (0, 0, 0)$
Avstanden fra origo til planet er radius til kulen.

$$\begin{aligned} r &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 0 + 4}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Oppgave 2 (Eksamen H2015 R2 Del 1)

En kuleflate er gitt ved likningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$$

a) Vis at punktet $P(4, 1, 2)$ ligger på kuleflaten.

b) Bestem sentrum og radius til kulen.

c) Bestem en likning for tangentplanet til kulen i punktet P.

Løsningsforslag

a)

> En kuleflate er gitt ved likningen $x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$ Vis at punktet $P(4, 1, 2)$ ligger på kuleflaten.

Putter inn koordinatene i likningen for kuleflaten :
$4^2 - 2 \cdot 4 + 1^2 + 6 \cdot 1 + 2^2 - 4 \cdot 2 - 11 = 16 - 8 + 1 + 6 + 4 - 8 - 11 = 0$
altså ligger punktet P på kuleflaten.
b)

> Bestem sentrum og radius til kulen.

Vi omformer likinngen med fullstendige kvadrater :
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$ $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) + (z^2 - 4z + 4) = 11 + 1 + 9 + 4$
$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 5^2$
Altså er $r = 5$ og $S(1, -3, 2)$

c)

> Bestem en likning for tangentplanet til kulen i punktet P.

Vektoren $\overrightarrow{SP}$ står normalt på tangentplanet i P, så vi kan bruke denne som normalvektor.
$\overrightarrow{SP} = [4 - 1, 1 - (-3), 2 - 2] = [3, 4, 0]$
Da har vi normalvektor og et punkt i planet, og likningen blir da :
$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$
$3(x - 4) + 4(y - 1) + 0(z - 2) = 0$
$3x - 12 + 4y - 4 = 0$
$\alpha : 3x + 4y - 16 = 0$

Oppgave 3 (Eksamen H2015 R2 Del 1)

Punktene $A(1,2,2)$, $B(2,3,4)$ og $C(2,3,1)$ er gitt.

a) Bestem ved regning vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Forklar at C ikke ligger på linjen gjennom A og B.

c) Bestem en likning for planet α gjennom A, B og C.

d) Avgjør om punktet $D(2,2,3)$ ligger i α .

Løsningsforslag

a)

> Punktene $A(1,2,2)$, $B(2,3,4)$ og $C(2,3,1)$ er gitt.
> Bestem ved regning vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = [1,-5,6]$
$\overrightarrow{AC} = [-3,1,3]$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [-15-6, -(3+18), 1-15] \\ &= [-21,-21,-14] \\ &= -7[3,3,2] \end{aligned}$$

b)

> Forklar at C ikke ligger på linjen gjennom A og B.

Linja gjennom A og B har parameterframstillingen :

$$l = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 5t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

Setter inn koordinatene til C for å se om punktet ligger på linja :

$$l = \begin{cases} -2 = 1 + t \\ 3 = -2 - 5t \\ 1 = -2 + 6t \end{cases}$$

Dersom C ligger på linja må alle 3 t-verdiene være like, det er de IKKE, derfor ligger ikke C på linja.

c)

> Bestem en likning for planet α gjennom A, B og C.

$$\begin{aligned}\alpha : 3(x-1)+3(y-2)+2(z+2)&=0\\ 3x-3+3y-6+2z+4&=0\\ 3x+3y+2z-5&=0\end{aligned}$$

d)

Avgjør om punktet $D(2,2,3)$ ligger i α .

$$3\cdot 2+3\cdot 2+2\cdot 3-5\neq 0$$

altså ligger ikke punktet D i planet α.

Oppgave 4 (Eksamen H2015 R2 Del 2)

En kule K har sentrum i $S(-1,0,1)$ og radius 21 . En linje l går gjennom punktene $A(7,2,5)$ og $B(15,4,9)$. Bestem skjæringspunktene mellom linjen l og kulen K .
$S(-1,0,1)$, $r=\sqrt{21}$

$$\begin{aligned} K:(x+1)^2+y^2+(z-1)^2 &= (\sqrt{21})^2 \\ x^2+2x+1+y^2+z^2-2z+1 &= 21 \\ x^2+2x+y^2+z^2-2z-19 &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB}=[8,-2,4]=2[4,-1,2]\Rightarrow \vec{r}=[4,-1,2]$

$A=(7,-2,5)$, $B=(15,-4,9)$

$$l=\begin{cases} x=7+4t \\ y=-2-t \\ z=5+2t \end{cases}$$

Skjæringspunkt mellom K og l :

$$\begin{aligned} (7+4t)^2+2(7+4t)+(-2-t)^2+(5+2t)^2-2(5+2t)-19 &= 0 \\ (49+56t+16t^2)+(14+8t)+(4+4t+t^2)+(25+20t+4t^2)-(10+4t)-19 &= 0 \\ 16t^2+t^2+4t^2+56t+8t+4t+20t-4t+49+14+4+25-10-19 &= 0 \\ 21t^2+84t+63 &= 0 \\ 21(t^2+4t+3) &= 0 \\ (t+3)(t+1) &= 0 \\ t=-3 \vee t &= -1 \end{aligned}$$

Løsning ved å tenke fullstendige kvadrater :

$$\begin{aligned} (7+4t)^2+2(7+4t)+(-2-t)^2+(5+2t)^2-2(5+2t)-19 &= 0 \\ (7+4t)^2+2(7+4t)+1+(-2-t)^2+(5+2t)^2-2(5+2t)+1 &= 019+1+1 \\ (7+4t+1)^2+(-2-t)^2+(5+2t-1)^2 &= 21 \\ (4t+8)^2+(t+2)^2+(2t+4)^2 &= 21 \\ (4(t+2))^2+(t+2)^2+(2(t+2))^2 &= 21 \\ 16(t+2)^2+(t+2)^2+4(t+2)^2 &= 21 \\ 21(t+2)^2 &= 21 \\ (t+2)^2 &= 1 \\ t=-3 \vee t &= -1 \end{aligned}$$

Løsningsforslag

En kule K har sentrum i $S(1,0,1)$ og radius 21 .
En linje l går gjennom punktene $A(7,2,5)$ og $B(15,4,9)$.
Bestem skjæringspunktene mellom linjen l og kulen K .

Oppgave 5 (Eksamen V2015 R2 Del 1)

Punktene $A(3,0,0)$, $B(0,4,0)$ og $C(0,0,1)$ er gitt.

a) Bestem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Bestem arealet av $\triangle ABC$.

b) Punktene A, B og C ligger i et plan α. Bestem likningen for planet α.

c) En partikkel starter i origo $O(0,0,0)$. Etter tiden t er partikkelen i et punkt P gitt ved

$$\overrightarrow{OP} = \left[t, \frac{t^2}{3}, -\frac{t}{4}\right] \ , \ t \geq 0$$

Hvor lang tid tar det før partikkelen treffer planet ? Bestem koordinatene til punktet der partikkelen treffer .

Oppgave 6 (Eksamen V2015 R2 Del 2)

Hjørnene i en pyramide $ABCP$ er $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$, $C(1,1,0)$ og $P(t, 2t+1, t^2+2)$, $t \in R$

a) Bestem et uttrykk for volumet $V(t)$ av pyramiden.

b) Bestem koordinatene til P slik at $V(t) = \frac{7}{2}$

c) Bestem koordinatene til P slik at volumet $V(t)$ blir minst mulig.

Oppgave 7 (Eksempeloppgave 2015 R2 Del 1)

Likningen for en kuleflate er gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 8z - 4 = 0$$

Bestem ved regning sentrum og radius i kulen.

Oppgave 8 (Eksempeloppgave 2015 R2 Del 1)

Vektorene $\vec{u} = [1, 2, -1]$ og $\vec{v} = [-1, 1, -2]$ er gitt.

a) Bestem $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.

b) Et plan β går gjennom punktet $P(2, 0, 1)$. Videre er $\beta || \vec{u}$ og $\beta || \vec{v}$.

c) Vis at $\vec{n} = [-1, 1, 1]$ er en normalvektor til planet β.

d) Bestem likningen til planet β.

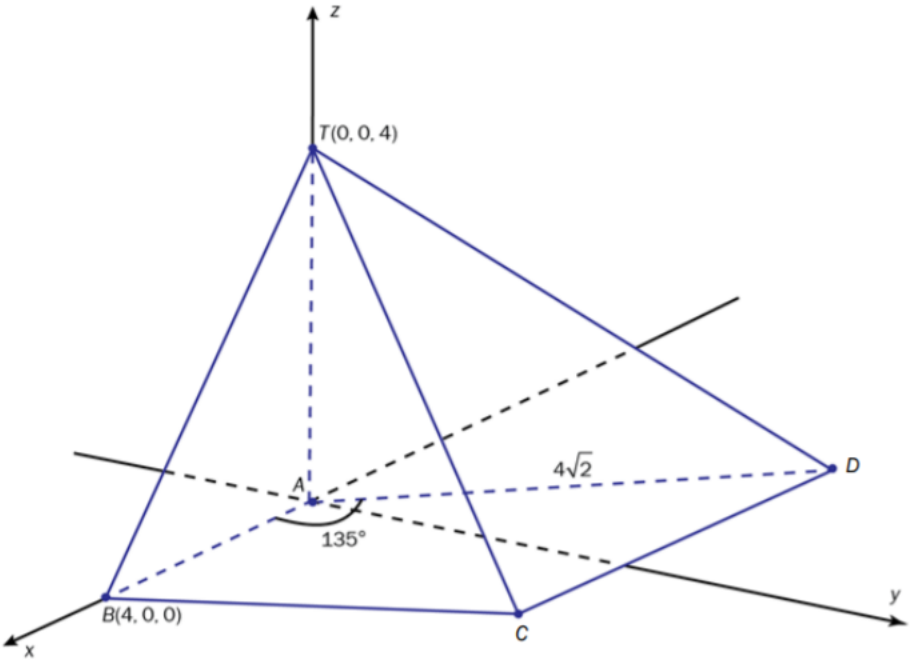
Oppgave 9 (Eksamen H2014 R2 Del 1)

Punktene $A(0,6,6)$, $B(0,0,7)$ og $C(6,0,5)$ ligger i planet α .

a) Bestem likningen til α .

b) Et punkt P ligger på linjen gjennom punktene $O(0,0,0)$ og $A(0,6,6)$. Bestem mulige koordinater til P slik at volumet av tetraederet $ABCP$ blir 42.

Oppgave 10 (Eksamen H2014 R2 Del 2)



En pyramide $ABCDT$ er gitt på figuren ovenfor. Pyramiden settes inn i et tredimensjonalt koordinatsystem slik at koordinatene til A, B og T er gitt ved $A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$ og $T(0,0,4)$. Punktene C og D ligger i xy-planet.

a) Vi setter $\angle BAD = 135^o$ og $AD = 4\sqrt{2}$. Vis at D har koordinatene $(4,4,0)$.

b) Punktet C er slik at $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Vis at C har koordinatene $(2,4,0)$.

c) Punktene B, D og T ligger i et plan α. Vis at likningen for α er $x+2y+z-4=0$.

d) Volumet av pyramiden $ABDT$ kalles V_1 og volumet av pyramiden $CBDT$ kalles V_2 . Bestem forholdet $\frac{V_1}{V_2}$.

Oppgave 11 (Eksamen H2014 R2 Del 1)

Et plan α er gitt ved likningen

$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Bestem likningen for den kuleflaten som har sentrum i punktet $S(11, 2, 6)$ og som har α som tangentplan.

b) Bestem koordinatene til tangeringspunktet mellom kuleflaten og planet α .

c) Et plan β er gitt ved

$$2x + y - 2z = 0$$

Dette planet skjærer kuleflaten langs en sirkel. Bestem radien i denne sirkelen.

Oppgave 12 (Eksamen H2014 R2 Del 2)

Punktene $A(4,3,1)$, $B(2,2,0)$ og $C(1,2,2)$ er gitt. En setning i geometrien sier:

> Et plan er entydig bestemt av tre punkter dersom disse punktene ikke ligger på en rett linje.

a) Bruk denne setningen til å vise at punktene A , B og C bestemmer et plan α entydig.

b) Bestem en likning til planet α .

c) Et punkt T har koordinatene $(2,5,41)$. Bestem t slik at volumet av pyramiden $ABCT$ blir 3.

Oppgave 13 (Eksamen H2014 R2 Del 2)

En kuleflate er gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 2 = 0$$

a) Vis at punktet$P(2, 3, 5)$ ligger på kuleflaten.

b) Bestem sentrum og radius til kulen.

c) Bestem likningen til planet som tangerer kuleflaten i punktet P.

Oppgave 14 (Eksamen V2012 R2 Del 2)

I et koordinatsystem er det gitt et punkt $P(5, -1, 4)$ og et plan

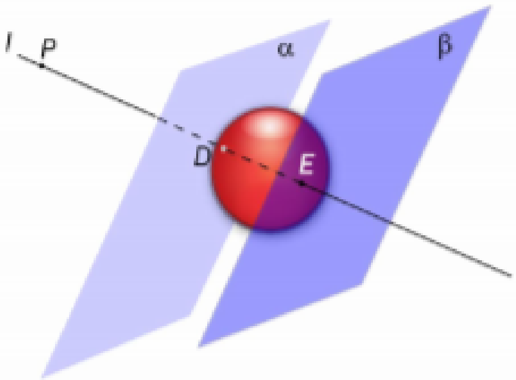
$$\alpha:\ 2x - 2y + z + 2 = 0$$

Punktene $A(0, 0, 4)$, $B(2, 0, 0)$ og $C(1, 1, 4)$ ligger i et annet plan β.

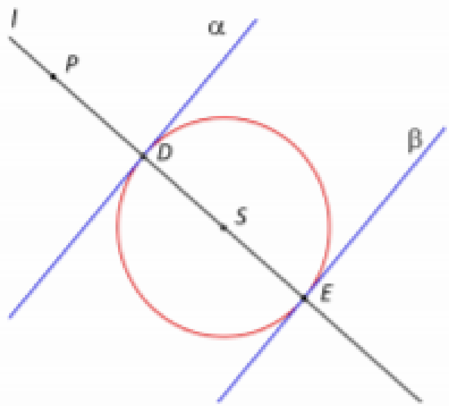
a) Bestem likningen til β, og forklar at $\alpha \parallel \beta$

b) Regn ut avstanden mellom planene α og β.

Planene α og β er begge tangentplan til en kule. Sentrum S i kula og de to tangeringspunktene D og E ligger på en rett linje l gjennom punktet P. Se figurene nedenfor.



Figur 1: Kule og plan i rommet



Figur 2: Tverrsnitt av kule og plan

c) Sett opp en parameterframstilling for l.

d) Bestem koordinatene til D og E.

e) Bestem likningen til kula.

a)
$\overrightarrow{AB} = [2-0, 0-0, 0-4] = [2, 0, -4]$
$\overrightarrow{AC} = [1-0, 1-0, 4-4] = [1, 1, 0]$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= [2, 0, -4] \times [1, 1, 0] \\
&= \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= [-4 - 0, -(-4 - 0), 0 - 2] \\
&= [-4, 4, -2] \\
&= -2[2, -2, 1]
\end{aligned}$$

Dette gir en normalvektor : $\vec{n_{beta}} = [2, -2, 1]$
$\beta : 2(x - 0) - 2(y - 0) + (z - 4) = 0$
$\beta : 2x - 2y + z - 4 = 0$
$\alpha : 2x - 2y + z + 2 = 0$ Dette gir en $\vec{n_{alpha}} = [2, -2, 1]$

Altså har planene lik normalvektor, det vil si at de er parallelle.

b) Avstand fra punkt til plan : $q = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Velger å regne ut avstanden fra A til α for å finne avstanden mellom planene.

$$\begin{aligned}
q &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\
&= \frac{4 + 2}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{6}{3} = 2
\end{aligned}$$

c) En linje som går ghennom P og står vinkelrett på planene :