Arbeidshefte
Trigonometri - Eksamensoppgaver
Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin(x+x)\\ &= \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x\\ &\underline{\underline{= 2\sin x \cos x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x)\\ &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x\\ &\underline{\underline{= \cos^2 x - \sin^2 x}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x+x)\\ &= \sin(2x)\cdot\cos x + \cos(2x)\cdot\sin x\\ &= 2\sin x\cos x\cdot\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot\sin x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x\\ &= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x\\ &= 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x\\ &= 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x\\ &\underline{\underline{= 3\sin x - 4\sin^3 x}}\end{aligned}$$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x)\\ &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x\\ &\underline{\underline{= \cos^2 x - \sin^2 x}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2\\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)\\ &= 1\cdot\cos(2x)\\ &\underline{\underline{= \cos(2x)}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

Løs likningen

$$\sin x + \cos x = 1 \ , \ x \in [0, 2\pi]$$

Skriver om uttrykket til et rent sinusuttrykk :

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
\sin x + \cos x &= \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \underline{\underline{\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}}
\end{aligned}$$

Får da likningen :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= 1 \\
\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \vee x + \frac{\pi}{4} &= \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi \\
x = n \cdot 2\pi \vee x &= \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \\
x &= \underline{\underline{\left\{ 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 4

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \vee \left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \vee \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$\underline{\underline{x = \left\{\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{11\pi}{6}\right\}}}$$

Oppgave 5

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = -2\ ,\ \ x \in [\ 0, 2\pi\rangle$$

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = -2$$

$$1 - \sin^2 x - 3\sin^2 x = -2$$

$$4\sin^2 = 3$$

$$\sin^2 = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$\underline{\underline{x = \left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}\right\}}}$$

Oppgave 6

Horisontal avstand mellom topp og bunn er 2, da er perioden $p = 4$, da er $c = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
Vertikal avstand mellom topp og bunn er 4, da er amplituden $A = 2$
Likevektslinja er midt mellom topp og bunn, altså er $d = 5$
Toppunkt når $x = 0$ og periode på $p = 4$ gir en faseforskyvning på $-\frac{1}{4} \cdot p = 1$
Da blir sinusuttrykket :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\big(x - (\,-1)\big)\right) + 5 \\ &= \underline{\underline{2\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + 5}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

a)
Amplituden $A = \frac{1}{2}(7 - 3) = 2$
Likevektslinja $d = 5$
Faseforskyvningen : $\phi = 2$
Perioden $p = 3,57 - 0,43 = 3.14 \Rightarrow c = \frac{2\pi}{3.14}$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin(2(x - 0.43)) + 5 \\ &= \underline{\underline{2\sin(2x - 0.86) + 5}} \end{aligned}$$

b)
Cosinusfunksjonen har en annen faseforskyvning enn sinusfunksjonen. Vi måler ift. plassering av grafens toppunkt.

$$\begin{aligned} g(x) &= 4\sin(2(x + 0.35)) + 5 \\ &= \underline{\underline{2\sin(2x + 0.7) + 5}} \end{aligned}$$

Oppgave 8

$f(x) = a \cdot \sin(cx + \phi) + d$

Amplituden er halvparten av vertikal avstand fra topp til bunn : $a = \frac{1}{2}(8 - 2) = 3$

Måler perioden som 2* horisontal avstand mellom topp og bunn : $p = 2 \cdot (5 - 3) = 4$

Da blir $c = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{2}$

Likevektslinja ligger med avstand a under toppen : $d = 8 - 3 = 5$

Der grafen er på vei opp gjennom likevektslinja er punktet der vi måler faseforskyvningen. Siden grafen går gjennom $(0, 5)$ vil forskyvningen være $\phi = 0$.

DEL 2

Oppgave 9

a)

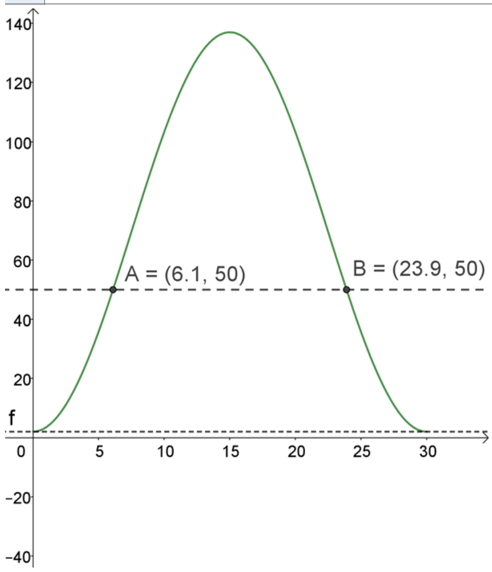
CAS

1 h(t):=-67.5 cos(pi/15 t)+69.5

$\rightarrow \ h(t) := \frac{-135}{2} \cos\left(\frac{1}{15}\, t\, \pi\right) + \frac{139}{2}$

2 H(t):=Funksjon(h, 0, 30)

$\rightarrow \ H(t) := \text{Dersom}\left(0 \leq t \leq 30, \frac{-135}{2} \cos\left(\frac{1}{15}\, t\, \pi\right) + \frac{139}{2}\right)$



Passasjerene er 50 meter over bakken etter 6.1 minutt og 23.9 minutter.

b)

Vendepunktene finner vi når $h''(t) = 0$

3 Løs(h"(t)=0)

$\rightarrow \ \left\{t = 15\, k_1 + \frac{15}{2}\right\}$

4 V_1:=(15/2,h(15/2))

$\approx \ V_1 := (7.5, 69.5)$

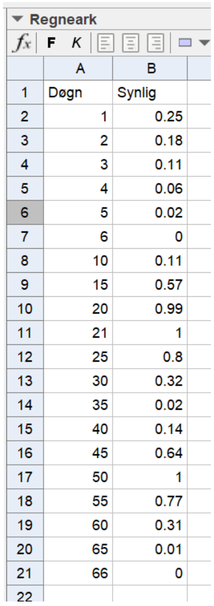
5 V_2:=((15/2+15),h(15/2+15))

$\approx \ V_2 := (22.5, 69.5)$

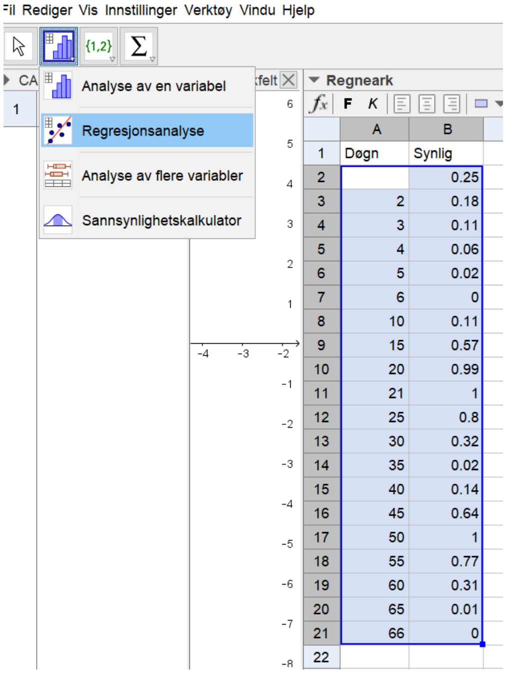
Da får vi 2 vendepunkter : $t = 15/2 \Rightarrow V_1 = (7.5, 69.5)$ og $V_2 = 22.5, 69.5$
I vendepunktene har vi ekstremalpunktene til den deriverte. Det vil si at i disse punktene er endringen i høyde størst.
Altså er $h'(7.5)$ der høyden over bakken øker raskest og $h'(22.5)$ er der høyden over bakken synker raskest.

Oppgave 10

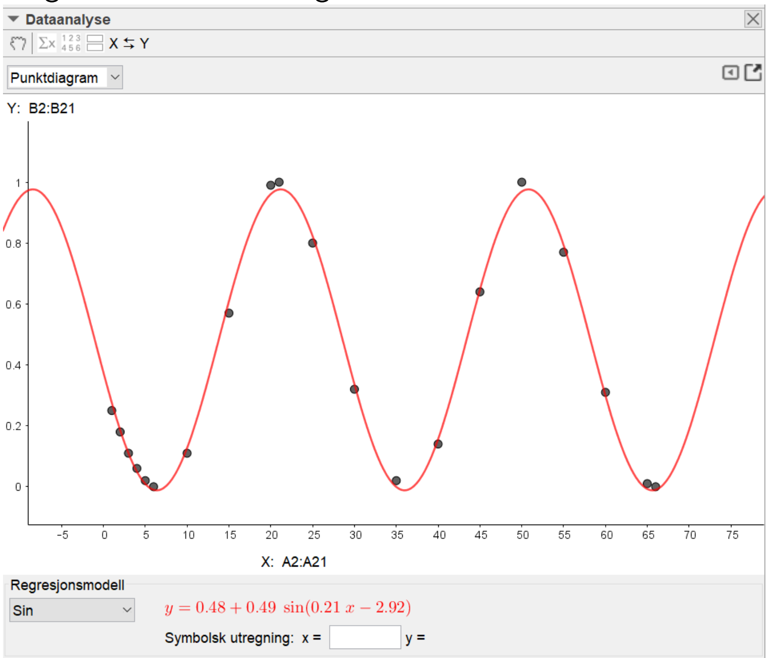
a)
Skriver inn tabellen i regnearket i Geogebra.
Merker tabellen og velger regresjonsanalyse.



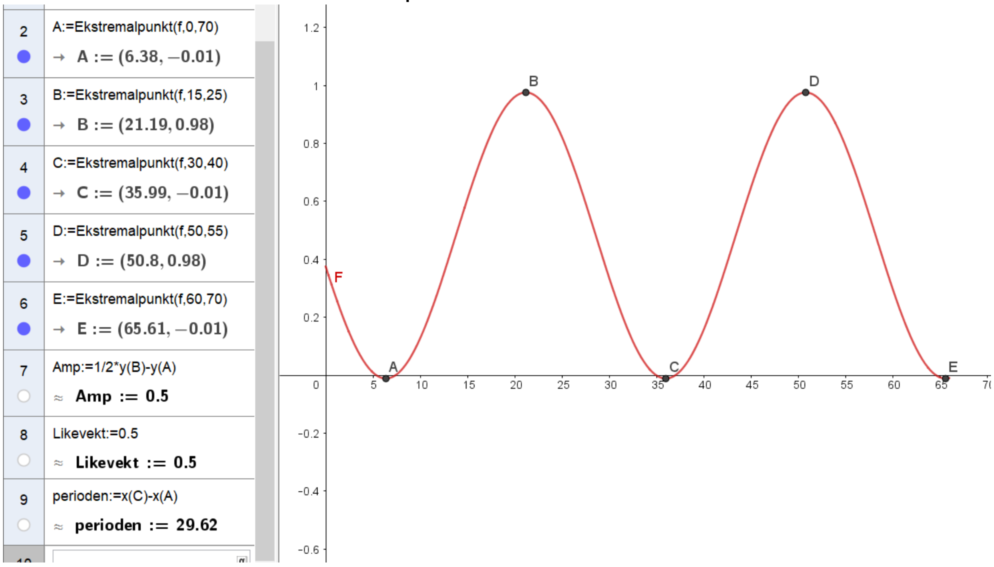
	A	B
1	Døgn	Synlig
2	1	0.25
3	2	0.18
4	3	0.11
5	4	0.06
6	5	0.02
7	6	0
8	10	0.11
9	15	0.57
10	20	0.99
11	21	1
12	25	0.8
13	30	0.32
14	35	0.02
15	40	0.14
16	45	0.64
17	50	1
18	55	0.77
19	60	0.31
20	65	0.01
21	66	0
22		



Velger sin som modell og får en sinusmodell :



Overfører grafen til grafikkfeltet pg bruker ekstremalpunktkommandoen. Da kan jeg regne ut de andre verdiene.
Amplituden $A = 0.5$ og likevektslinja er $d = 0.5$. Dette stemmer med at vi måler synligheten til månen i prosent, der 1 er fullmåne.
Perioden måles mellom 2 bunnpunkter.

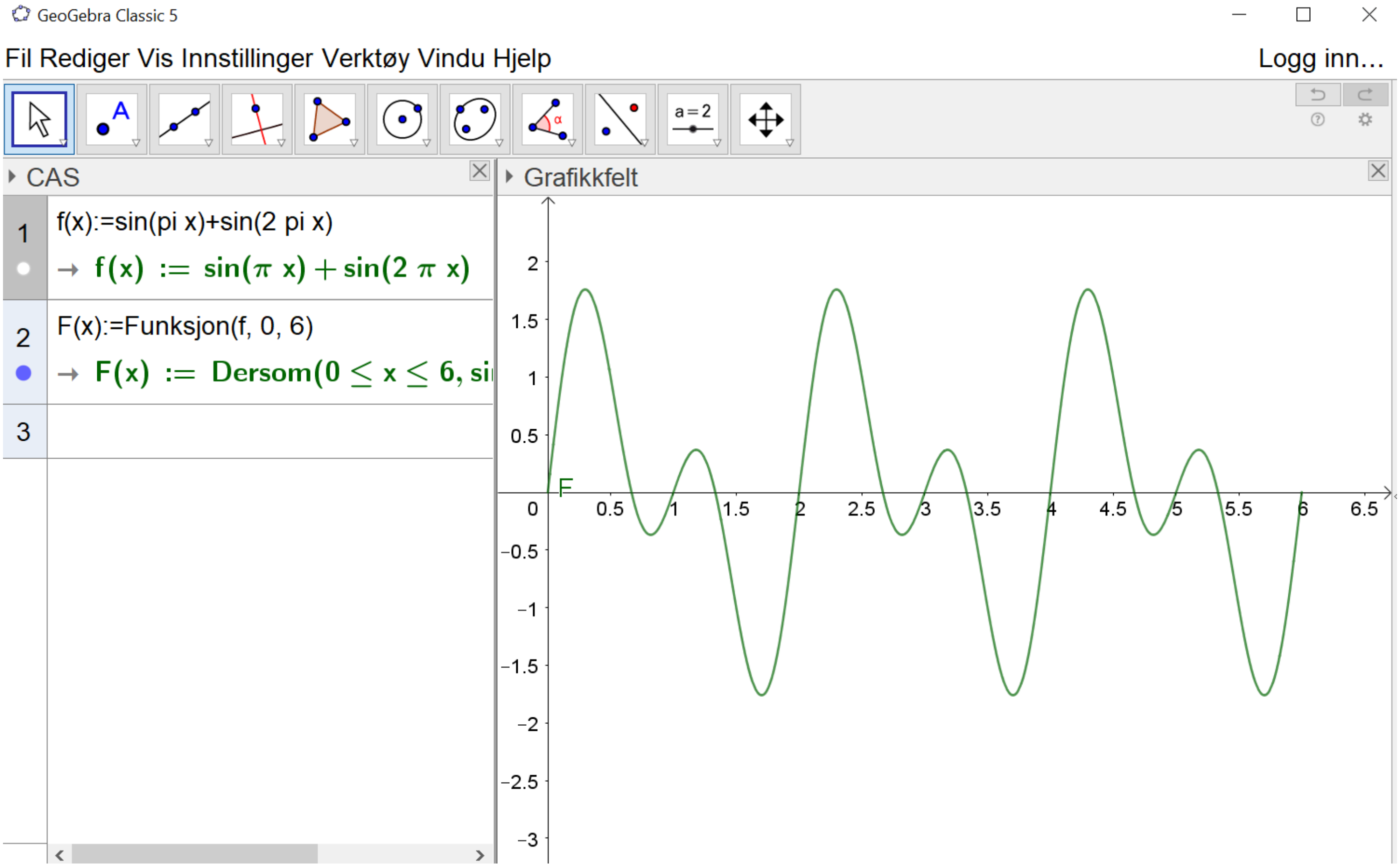


b)
Døgnene med halvmåne vil ligge på likevektslinja, og vi får døgnnr $= \{14, 28, 44, 58\}$

- G = (13.95, 0.5)
- H = (28.42, 0.5)
- I = (43.57, 0.5)
- J = (58.04, 0.5)

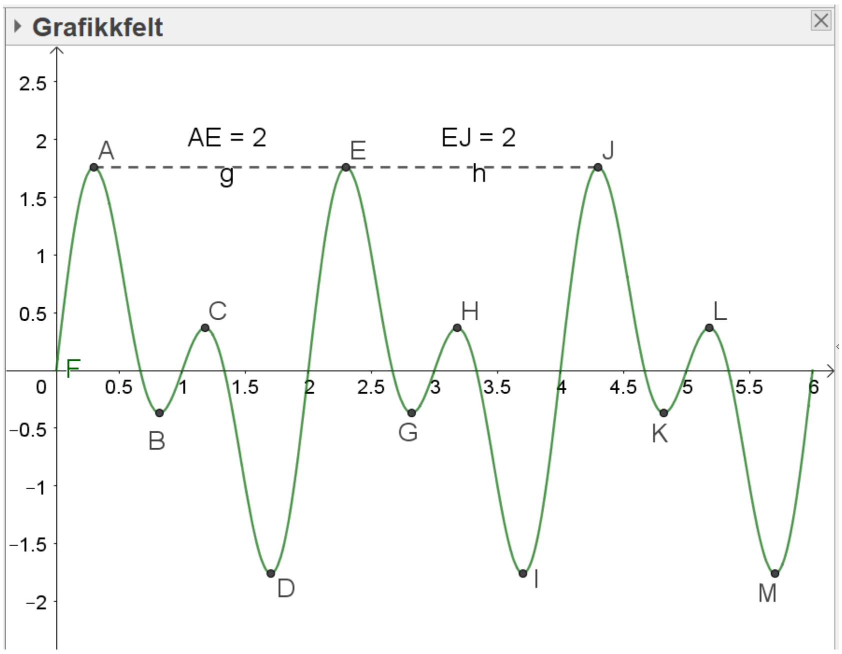
Oppgave 11

a)



b)

Måler avstanden mellom tilsvarende punkter på grafen og finner at den alltid er 2. Altså er det en periodisk funksjon med perioden $p = 2$



c)

$$\begin{aligned}\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) &= \sin(\pi x) + \sin(\pi x + \pi x)\\ &= \sin(\pi x) + 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)\\ &= \sin(\pi x)\big(1 + 2\cos(\pi x)\big)\end{aligned}$$

d)

$$\begin{gathered}\sin(\pi x)\big(1 + 2\cos(\pi x)\big) = 0\\ \sin(\pi x) = 0 \lor 1 + 2\cos(\pi x) = 0\\ \sin(\pi x) = 0 \lor \cos(\pi x) = -\frac{1}{2}\\ \pi x = n \cdot 2\pi \lor \pi x = \pi + n \cdot 2\pi \lor \pi x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \lor \pi x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi\\ x = n \cdot 2 \lor x = 1 + n \cdot 2 \lor x = \frac{2}{3} + n \cdot 2 \lor x = \frac{4}{3} + n \cdot 2\\ \underline{\underline{x = \left\{ 0,\ \frac{2}{3}\ ,\ 1\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ 2 \right\}}}\end{gathered}$$

Oppgave 12

Eksamen V2012 R2 Del 2

a)
25.mars blir dag nr. 30+30+25=85
Da ser vi at lyset blir slått på ca.kl.18.40
(0.65*60=39)

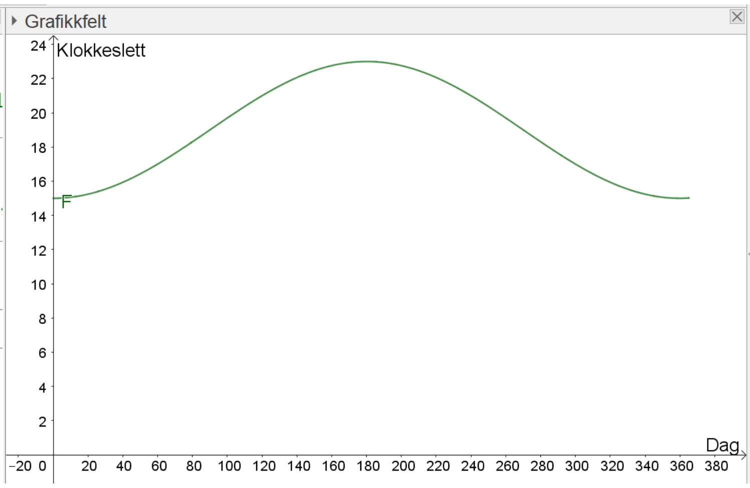
CAS

1 f(t):=19-4 cos(pi/180 t)
$\rightarrow\ f(t) := -4 \cos\left(\frac{1}{180}\, t\, \pi\right) + 1$

2 F(t):=Funksjon(f, 0, 365)
$\rightarrow\ F(t) := \text{Dersom}\left(0 \le t \le 365.\right.$

3 f(85)
$\approx\ 18.65$

4



b)
Perioden $p = 360$, som tilsvarer et år $(12 * 30)$
Amplutuden $A = 1/2(23 - 15) = 4$
Likevektslinja $d = 15 + 4 = 19$
Gjennomsnittlig tidspunkt vil være likevektslinja, altså kl.19.00.

5 Løs(f'(t)=0)
$\rightarrow\ \{t = 180\, k_1\}$

6 f(0)
$\rightarrow\ 15$

7 f(180)
$\rightarrow\ 23$

8 A=1/2 (23-15)
$\rightarrow\ A = 4$

9 d:=15+4
$\rightarrow\ d := 19$

c)
Lyset slås på kl.18 på dag 76 og dag 285.
Dag 76 er 17.mars , (76-31-28=17)

10 Løs(f(t)=18)
$\approx\ \{t = 360\, k_2 + 75.52, t = 360\, k_2 -$

11 t_1=75.52
$\approx\ t_1 = 75.52$

12 t_2=-75.52+360
$\approx\ t_2 = 284.48$

Dag 285 er 12.oktober , (31+28+31+30+31+30+31+31+30=273, 285-273=12)

d)

Dagslyset varer lengst når lyset slås på senest, dette er på grafebs bunnpunkt.
Finner bunnpunktet ved $f'(t) = 0$
Dag 180 er 29.juni , (31+28+31+30+31=151 , 180-151=29)
I følge denne modellen er den lengst dagen 29.juni.