R2 Testeksamen
Løsningsforslag

Poengfordeling

Del 1 - 23 poeng + Del 2 - 30 poeng = 53 poeng.

Karakterskala

oppgave	1	2	3	4	5	6
poeng		10	20	30	40	50

Del 1

Oppgave 1

Løs integralene

a)

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{-x}\,dx &= \left[-e^{-x}\right]_0^2 \\ &= -e^{-2} - (-e^0) \\ &= -\frac{1}{e^2} + 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{e^2-1}{e^2}}}\end{aligned}$$

b)

$$\int x \cdot \cos 2x\,dx = x \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) - \int 1 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$$

$$u = x\ ,\ u' = 1$$

$$v = \frac{1}{2}\sin(2x)\ ,\ v' = \cos(2x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx \\ &= \frac{x}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos(2x)) + C \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{4}(2x\sin(2x) + \cos(2x)) + C}}\end{aligned}$$

c)

$$\int \frac{2\ln x}{x}\ dx = 2\int \frac{u}{x}\cdot x\ du$$
$$u = \ln x\ ,\ u' = \frac{1}{x}, dx = x\cdot du$$
$$= 2\int u\ du$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}u^2 + C$$
$$\underline{\underline{= (\ln x)^2 + C}}$$

Alternativ løsning :

$$\int \frac{2\ln x}{x}\ dx = 2\int \frac{\ln x}{x}\ dx$$
$$u = \ln x\ ,\ u' = \frac{1}{x}$$
$$v = \ln x\ ,\ v' = \frac{1}{x}$$
$$2\int \frac{\ln x}{x}\ dx = 2\Big((\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\ dx\Big)$$
$$\int \frac{\ln x}{x}\ dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\ dx$$
$$2\int \frac{\ln x}{x}\ dx \underline{\underline{= (\ln x)^2 + C}}$$

Oppgave 2

Løs likningene

a)

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos x &= 1 \\
1 - \cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 \\
\cos x(1 - \cos x) &= 0 \\
\cos x &= 0 \\
x &= \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \\
\cos x &= 1 \\
x &\underline{\underline{= n \cdot 2\pi}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin 2x &= 3\cos 2x \ , \ x \in [0, 2\pi] \\
\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x &= 0 \\
A &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3} \\
2\sqrt{3}(\sin 2x \cdot \frac{1}{2} - \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) &= 0 \\
2\sqrt{3}(\sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{3}) &= 0 \\
2\sqrt{3}\sin(2x - \frac{\pi}{3}) &= 0 \\
\sin(2x - \frac{\pi}{3}) &= 0 \\
2x - \frac{\pi}{3} &= n \cdot \pi \\
2x &= \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \\
x &= \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{2} \\
L &= \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right\} \\
&\underline{\underline{L= \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right\}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin 2x &= 3\cos 2x \ , \ x \in [0, 2\pi] \\
\sqrt{3}\tan 2x &= 3 \ , \ x \in [0, 2\pi] \\
\tan 2x &= \frac{3}{\sqrt{3}} \\
\tan 2x &= \sqrt{3} \\
2x &= \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \\
x &= \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{2} \\
&\underline{\underline{L= \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right\}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

En aritmetisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$ har differanse $d = \frac{1}{3}$.
Bestem det første leddet a_1 når summen av de 31 første leddene er lik 620.

Finner først a_n uttrykt ved a_1
Setter denne inn i formelen for summen av rekka, og løser likningen.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + d(n-1) = a_1 + \frac{1}{3}(n-1) \\
s_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \\
s_{31} &= 620 \\
a_{31} &= a_1 + \frac{1}{3}(31-1) \\
&= a_1 + 10 \\
\frac{a_1 + a_1 + 10}{2} \cdot 31 &= 620 \\
\frac{2a_1 + 10}{2} &= 20 \\
2a_1 + 10 &= 40 \\
2a_1 &= 30 \\
a_1 &\underline{\underline{= 15}}
\end{aligned}$$

Oppgave 4

Et plan α er gitt ved likningen

$$\alpha : \sqrt{2}x + y + \sqrt{5}z = \sqrt{10}$$

a) Bestem skjæringspunktene mellom planet og koordinataksene.

Skjærer x-aksen når y og z er null : $\sqrt{2}x = \sqrt{10} \Rightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow S_x = \underline{\underline{(\sqrt{5}, 0, 0)}}$

Skjærer y-aksen når x og z er null : $y = \sqrt{10} \Rightarrow S_y = \underline{\underline{(0, \sqrt{10}, 0)}}$

Skjærer z-aksen når x og y er null : $\sqrt{5}z = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{2} \Rightarrow S_y = \underline{\underline{(0, 0, \sqrt{2})}}$

b) Bestem vinkelen mellom planet og x-aksen.

Retningsvektor for x-aksen er $\vec{r} = [1, 0, 0]$, $|\vec{r}| = 1$

Normalvektor for planet er $\vec{n} = [\sqrt{2}, 1, \sqrt{5}]$, $|\vec{n}| = \sqrt{2+1+5} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
\vec{r} \cdot \vec{n} &= [1, 0, 0] \cdot [\sqrt{2}, 1, \sqrt{5}] \\
&= \sqrt{2} \\
\vec{r} \cdot \vec{n} &= |\vec{r}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos v \\
&= 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos v \\
\cos v &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\
v &= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Da vil vinkelen mellom planet og x-aksen være $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$

Oppgave 5

a) Vis at

$$\int \tan x \; dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\begin{aligned}
\int \tan x \; dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx \\
u = \cos x \;, u' &= -\sin x \\
&= \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{1}{-\sin x} \; dx \\
&= -\int \frac{1}{u} \; dx \\
&= -\ln|u| + C \\
&= \underline{\underline{-\ln|\cos x| + C}}
\end{aligned}$$

b) Beskriv hvilket areal programmet nedenfor regner ut.
Funksjonen her er $f(x) = \tan x$
Loopen i linje 13-15 summerer rektangler der bredden er delta x, og høyden er f(x).
Summen som regnes ut er en tilnærmet verdi av det bestemte integralet fra 0 til $\frac{\pi}{3}$, altså arealet mellom grafen og x-aksen.

```
1  import math
2  def f(x):
3    return math.tan(x)
4
5  x_1=0
6  x_2=math.pi/3
7  delta_x=0.1
8
9
10 areal=0
11 x=x_1
12
13 while x<x_2:
14   areal=areal+delta_x*f(x)
15   x=x+delta_x
16
17 print('Arealet er ',areal)
```

c) Hva er den eksakte verdien til arealet, og hvordan kan vi endre programmet slik at det gir en bedre tilnærmingsverdi?
Den eksakte verdien av arealet er :

$$\begin{aligned}
\left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/3} &= (-\ln|\cos(\pi/3)| - (-\ln|\cos 0|) \\
&= -\ln 1/2 + \ln 1 \\
&= -(\ln 1 - \ln 2) + 0 \\
&= -(-\ln 2) \underline{\underline{= \ln 2}}
\end{aligned}$$

For å få et mer nøyaktig svar kan vi velge en mindre delta x

Oppgave 6

a)
$3n(n+1)$ er alltid delelig med 3, så det holder å vise at $n(n+1)$ er delelig med 2.

$n(n+1)$ er produkt av to påfølgende tall, da må et av tallene være et partall, partall er alltid delelig med 2, altså er $3n(n+1)$ alltid delelig med 6.

Eller vi kan bruke induksjonsbevis :

P(1) : $3 \cdot 1 \cdot (1+1)?3 \cdot 2 = 6$, er delelig med 6

P(n) : $3n(n+1) = 3n^2 + 3n$, antas sann, altså delelig med 6.

P(n+1) :

$$\begin{aligned} 3(n+1)((n+1)+1) &= 3(n+1)(n+2) \\ &= 3(n^2+3n+2) \\ &= 3n^2+9n+6 \\ &= 3n^2+3n+6n+6 \\ &= (3n^2+3n)+6(n+1) \end{aligned}$$

Første leddet er delelig med 6 - se P(n)
Andre leddet er delelig med 6 - $6(n+1)$
Da har vi vist at uttrykket er delelig med 6 for alle positive heltallige verdier av n.

b)
Bruk induksjon til å vise at $n^3 - n$ er delelig med 6 for alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(1) &: \ 1^3 - 1 = 0 \text{ som er delelig med 6} \\
P(n) &: \ n^3 - n \ \text{ er delelig med 6 - antas sann} \\
&: \ n^3 - n = n(n^2-1) = n(n+1)(n-1) = (n-1)\cdot n \cdot (n+1) \\
P(n+1) &: \\
(n+1)^3 - (n+1) &= (n+1)((n+1)^2 - 1) \\
&= (n+1)(n^2 + 2n + 1 - 1) \\
&= (n+1)(n^2 + 2n) \\
&= n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n \\
&= n^3 + 3n^2 + 2n \\
&= n^3 + (-\mathbf{n} + \mathbf{n}) + 3n^2 + 2n \\
&= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n \\
&= (n^3 - n) + 3n(n+1)
\end{aligned}$$

$n^3 - n$ er delelig med 6 - påstanden som antas sann.
$3n(n+1)$ er delelig med 6 - det er vist i oppgave a).

alternativ tankegang uten induksjonsbevis:

$$\begin{aligned}
&= (n+1)(n^2 + 2n) \\
&= n \cdot (n+1) \cdot (n+2)
\end{aligned}$$

Tre påfølgende tall vil alltid inneholde et tall som er delelig med 3, og et partall, altså delelig med 6.

Oppgave 7

Summen av en uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ er $\frac{9}{2}$.

Summen av de to første leddene i rekka er 4.

Bestem a_1 og kvotienten k.

Del 2

Oppgave 1

En bøye flyter på havet og beveger seg opp og ned i bølgene. Tabellen viser målinger av bøyens høyde over havbunnen ved ulike tidspunkter.

Tid (sek.)	0,5	1,2	2,1	3,2	4,5	5,7	6,4
Høyde (m)	26,8	27,4	26,8	25,1	24,9	26,7	27,4

a) Vis at funksjonen

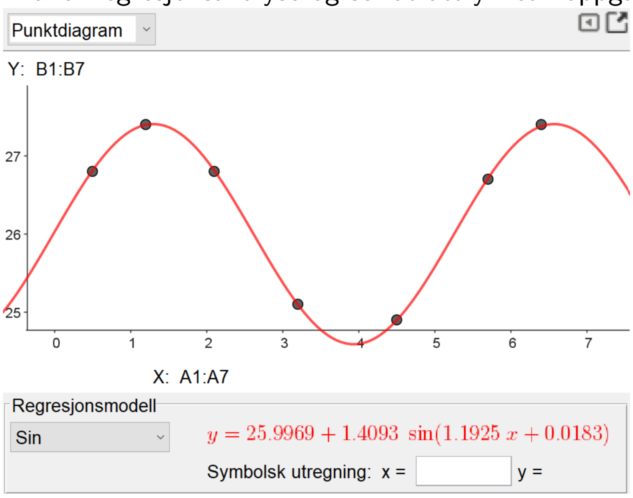
$$h(t) = 1,4\sin(1,2t) + 26\ ,\ \ t \in [0, 7]$$

er en god modell for høyden til bøyen etter t sekunder.

b) Bestem perioden til funksjonen. Hva forteller perioden om bevegelsen til bøyen?

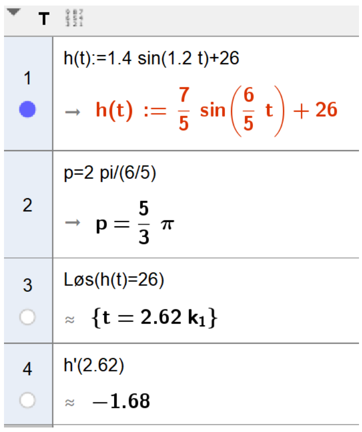
c) Ved hvilket tidspunkt har bøyen sin største fart nedover?

a)
Bruker regresjonsanalyse og ser at uttrykket i oppgaven tilsvarer mitt resultat.



b)
Perioden : $p = \frac{2\pi}{1.2} = \frac{5\pi}{3}$ - se linje 2
Perioden er <u>5.24 sekunder</u>

c)
Størst fart nedover har vi når grafen krysser likevektslinja på vei nedover.
Likevektslinja er $d = 26$.
Finner tidspunktet når grafen krysser likevekstlinja - linje 3,
sjekker av veksten her er negativ, altså grafen synker - linje 4.
<u>Størst fart nedover når $t = 2.62$ sekunder</u>.



Oppgave 2

En rekke er gitt ved

$$x + \frac{x}{(x+2)} + \frac{x}{(x+2)^2} + \frac{x}{(x+2)^3} + ...$$

a) Forklar at rekka er geometrisk.
Finner k :

$$\frac{\frac{x}{(x+2)}}{x} = \frac{1}{x+2}$$

Det finnes en $k = \frac{1}{x+2}$, altså er rekka geometrisk.

b) Bestem konvergensområdet for rekka.
Rekka konvergerer når $|k| < 1$

$$\begin{aligned} -1 <& k < 1 \\ -1 <& \frac{1}{x+2} < 1 \end{aligned}$$

Løser denne doble ulikheten i CAS og får at konvergensområdet er : $\underline{\underline{x \in \left\langle \leftarrow, -3 \right\rangle \cup \left\langle -1, \rightarrow \right\rangle}}$

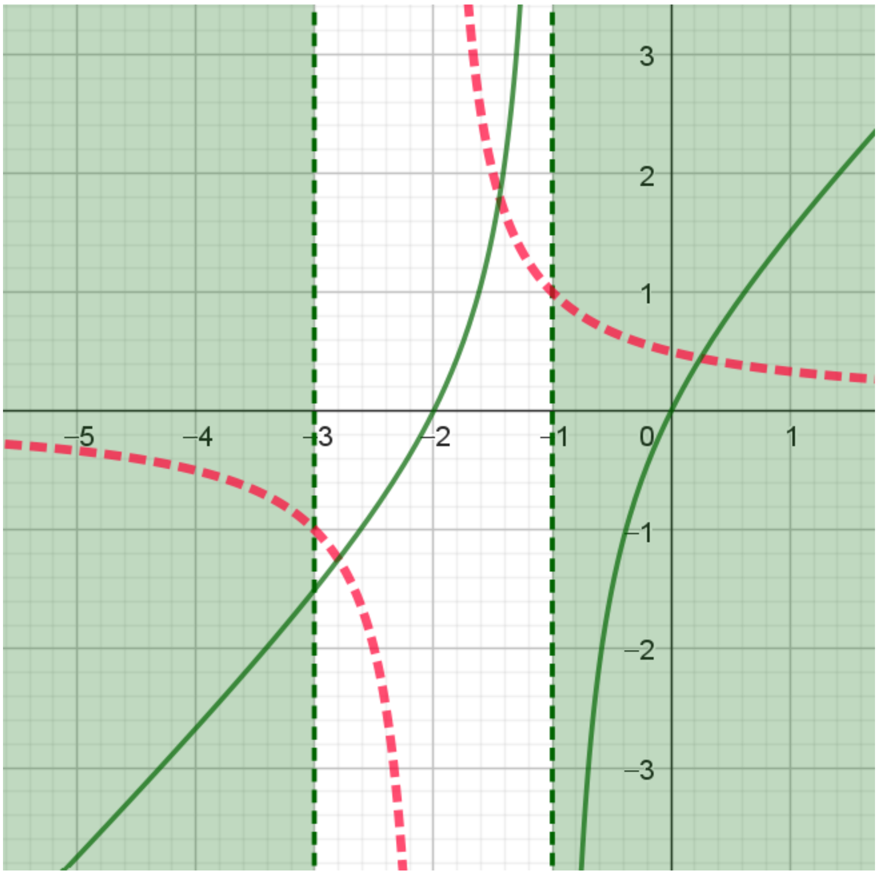
c) Bestem et utrykk for summen $s(x)$ av rekka.

Forutsetter at rekka konvergerer, ellers finnes ikke en slik funksjon.

$$s(x) = \frac{x}{1 - \frac{1}{x+2}} = \frac{x(x+2)}{x+2-1} = \underline{\underline{\frac{x(x+2)}{x+1}}}$$

d) For hvilke verdier av a har likningen $s(x) = a$ to løsning?

Denne funksjonen har løsning for alle verdier av a, men vi ser på grafen at i området der x er utenfor konvergensområdet vil vi bare ha én løsning.
To løsninger altså for $a < -\frac{3}{2}$



Oppgave 3

Et plan α skjærer koordinataksene i (2,0,0) , (0,1,0) og (0,0,5).

a) Vis at planet har likningen

$$\alpha : 5x + 10y + 2z = 10$$

1	A:=(2,0,0) → $A := (2,\ 0,\ 0)$
2	B:=(0,1,0) → $B := (0,\ 1,\ 0)$
3	C:=(0,0,5) → $C := (0,\ 0,\ 5)$
4	α:=Plan(A, B, C) → $\alpha : x \cdot 5 + y \cdot 10 + z \cdot 2 = 10$

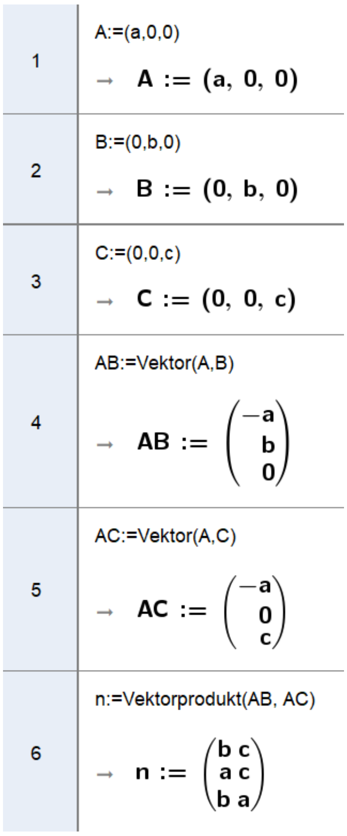
b) Finn avstanden fra origo til planet α.

5	D:=(0,0,0) → $D := (0,\ 0,\ 0)$
6	d:=Avstand((0,0,0), α) → $d := 10 \cdot \frac{\sqrt{129}}{129}$

c) Bestem likningen for den minste kuleflaten som både går gjennom origo og tangerer planet α.

Den minste kuleflaten vil ligge mellom planet og origo. Finner en linje gjennom origo normalt på planet for å finne tangeringspunktet.
Finner midtpunktet mellom origo og skjæringspunktet, og finner likningen til kula.

8	Løs(5 t * 5 + 10 t * 10 + 2 t * 2 = 10) → $\left\{t = \frac{10}{129}\right\}$
9	S:=(5*10/129,10*10/129,2*10/129) → $S := \left(\frac{50}{129}, \frac{100}{129}, \frac{20}{129}\right)$
10	R:=Midtpunkt(D, S) → $R := \left(\frac{25}{129}, \frac{50}{129}, \frac{10}{129}\right)$
11	a:=Kule(R, D) → $a := (x - 0.19)^2 + (y - 0.39)^2 + (z - 0.08)^2 = 0.19$



Planet β :

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)&=0\\ bc(x-a)+ac(y-0)+ba(z-0)&=0\\ bcx+acy+baz-abc&=0 \end{aligned}$$

Avstand fra origo til planet β:

$$\begin{aligned} q&=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ q&=\frac{|bc\cdot 0+ac\cdot 0+ab\cdot 0-abc|}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}\\ &=\frac{|-abc|}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}\\ &=\frac{abc}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

Posisjonsvektoren til en partikkel ved tiden t sekunder er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [\sin 2t, \cos t, 1/8t^2], t \in [0, 3]$$

Enheten på aksene er meter.

a) Vis at partikkelen treffer z-aksen, og bestem punktet på z-aksen den treffer.

Partikkelen treffer z-aksen dersom det finnes et (eller flere) verdier av t der både x- og y-koordinatet er null.

1	r(t):=Kurve(sin(2 t),cos(t),1/8 t^2,t,0,3) → $r := (\sin(2\,t), \cos(t), \frac{1}{8}\,t^2)$
2	Løs(sin(2 t)=0) → $\left\{t = \frac{1}{2}\,k_2\,\pi\right\}$
3	Løs(cos(t)=0) → $\left\{t = k_2\,\pi + \frac{1}{2}\,\pi\right\}$
4	A:=r(π / 2) → $A := \left(0, 0, \frac{1}{32}\,\pi^2\right)$

Partikkelen treffer z-aksen når $\underline{\underline{t = \frac{\pi}{2} = 1.57}}$ i punktet $\underline{\underline{A = (0, 0, \frac{\pi^2}{32}) = (0, 0, 0.31)}}$

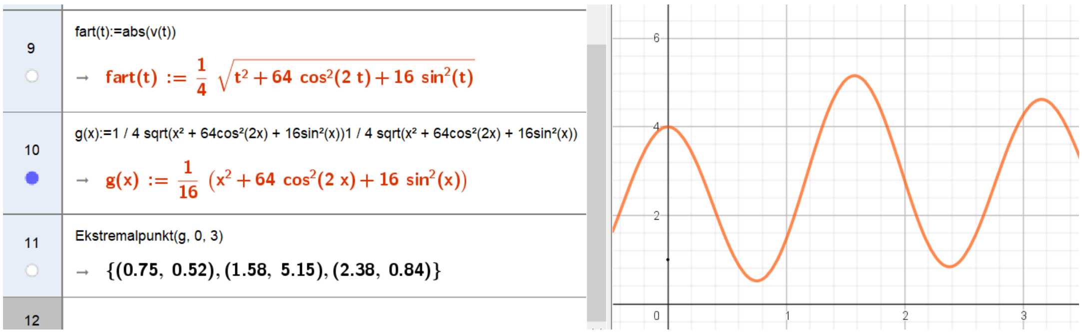
b) Når er farten til partikkelen parallell med yz-planet?

Farten er parallell med yz-planet når fartvektorenes x-koordinat er null, da er $t = \frac{\pi}{4}$, og farten er $v(\pi/4) = 0.71$

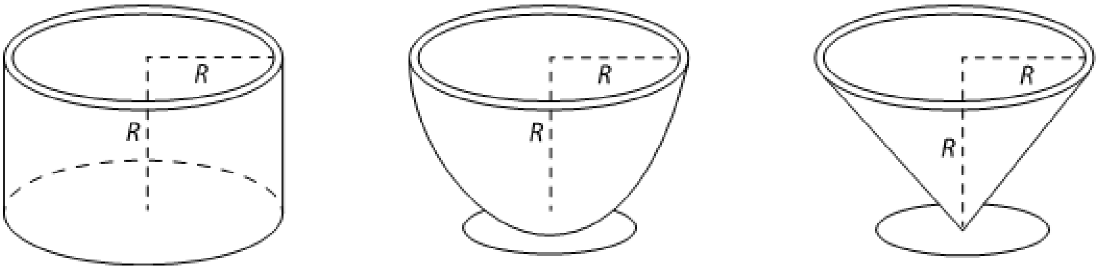
5	v(t):=Derivert(r(t)) ≈ $v(t) := (2\,\cos(2\,t), -\sin(t), 0.25\,t)$
6	Løs(2 cos(2 t)=0) → $\left\{t = \frac{1}{2}\,k_3\,\pi + \frac{1}{4}\,\pi\right\}$
7	B:=r(π / 4) → $B := \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{128}\,\pi^2\right)$
8	C:=r(3π / 4) → $C := \left(-1, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{128}\,\pi^2\right)$

c) Bestem den høyeste farten til partikkelen.

Den høyeste farten finner vi når $t = 1.58$, da er farten $\underline{\underline{5.15}}$



Oppgave 5

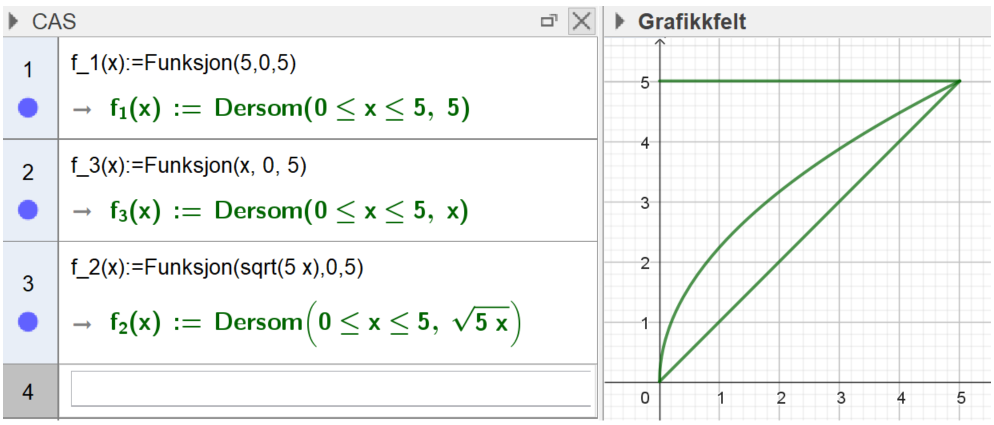


Tre porselenskopper er laget som på figuren. Koppen til venstre er en sylinder, koppen i midten er laget av en rotert parabel, mens koppen til høyre er en kjegle. Alle koppene har innvendig høyde og radius R. Tykkelsen på porselenet er det samme i alle koppene.

Undersøk volumet av koppene. Hvordan er forholdet mellom volum og hvor mye porselen som går med til å lage koppene?

Tips : Liggende parabel kan du tegne med funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$

Prøver meg fram med tall for å se formen på funksjonene :



Forholdet blir tilsynelatende likt, se utregninger på neste side.
Hvis vi her regner med tykkelsen vertikalt vil ikke dette bli riktig for kopp2 og 3 fordi sidene der ikke er horisontale.
Der ville det være riktigere å eventuelt beregne overflatearealet.

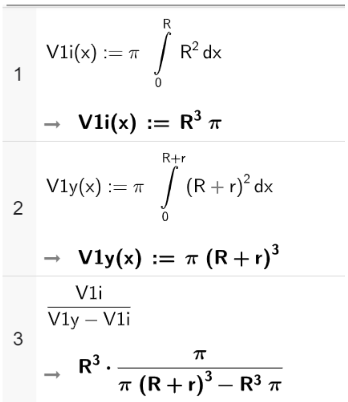
I kopp 1 har jeg ikke tatt med bunnen, det vil jo helt klare gi feil porselensmengde.
Konklusjonen :

kopp 1 gir dårligst utnyttelse av porselen ift.volum i koppen.
kopp 2 gir et volum på halparten av kopp 1
kopp 3 gir et volum på $1/3$ av kopp 1

Kopp 1 : Beskrives med en rett linje $f_1(x) = R$

Volum , indre =

$$V_1 i = \pi \int_0^R R^2 \, dx = R^3$$



Volum ytre

$$V_1 y = \pi \int_0^{R+r} (R+r)^2 \, dx = (R+r)^3$$

Volum porselen

$$V_1 p = V_1 y - V_1 i = \pi((R+r)^3 - R^3)$$

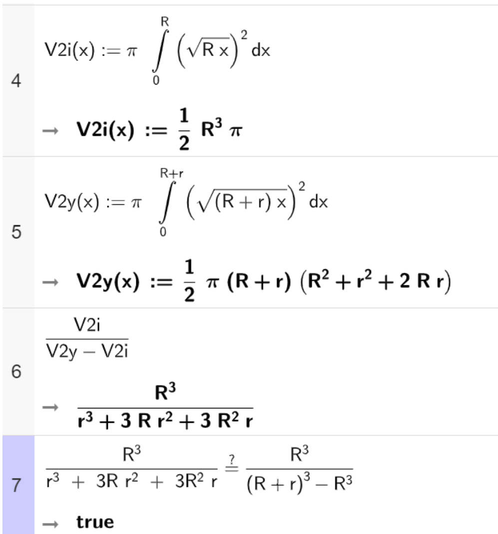
Forhold mellom volum og porselen

$$\frac{V_1 i}{V_1 p} = \frac{R^3}{(R+r)^3 - R^3}$$

Kopp 2 : Beskrives med en liggende parabel $f(x) = \sqrt{R \cdot x}$

Volum , indre

$$V_2 i = \pi \int_0^R \sqrt{R \cdot x}^2 \, dx = \frac{R^3}{2}$$



Volum ytre

$$V_2 y = \pi \int_0^{R+r} \sqrt{R \cdot x}^2 \, dx = \frac{(R+r)^3}{2}$$

Volum porselen

$$V_2 p = V_2 y - V_2 i = \frac{\pi}{2}((R+r)^3 - R^3)$$

Forhold mellom volum og porselen

$$\frac{V_2 i}{V_2 p} = \frac{R^3}{(R+r)^3 - R^3}$$

Kopp 3 : Beskrives med en skrå linje, med stigningstall 1, $f_2 = x$

Volum , indre

$$V_3 i = \pi \int_0^R x^2 \, dx = \frac{R^3}{3}$$

Volum ytre

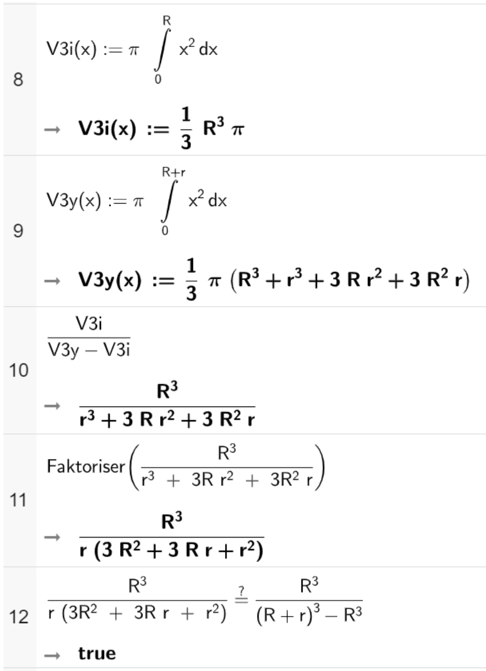
$$V_3 y = \pi \int_0^{R+r} x^2 \, dx = \frac{(R+r)^3}{3}$$

Volum porselen

$$V_3 p = V_3 y - V_3 i = \frac{\pi}{3}((R+r)^3 - R^3)$$

Forhold mellom volum og porselen

$$\frac{V_2 i}{V_2 p} = \frac{R^3}{(R+r)^3 - R^3}$$



Formelen for overflate av et omdreiningslegeme er

$$O = \pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Kopp 1- Overflate Vi må huske å ta med overflaten av bunnen.

$$\begin{aligned}
f1(x) &= R \\
O1(x) &= 2\pi \cdot R \cdot R + \pi R^2 \\
&= 3\pi R^2 \\
V1(x) &= \pi R^2 \cdot R \\
&= \pi R^3 \\
V1/O1 &= \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} \\
&= \frac{R}{2} \\
&= 0.5R
\end{aligned}$$

Kopp 2

1	f2(x):=sqrt(R x) → **f2(x) := $\sqrt{R\,x}$**
2	O2:=pi Integral(f2(x)*sqrt(1+(f2'(x))^2),x,0,R) → **O2 := $R^2\,\pi\,\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$**
3	V2:=pi Integral(f2(x)^2,x,0,R) → **V2 := $\frac{1}{2}\,R^3\,\pi$**
4	V2/O2 ≈ **0.59 R**

Kopp 3

5	f3(x):=x ≈ **f3(x) := x**
6	O3:=pi Integral(f3(x)*sqrt(1+(f3'(x))^2),x,0,R) → **O3 := $R^2\,\pi\,\frac{1}{2}\sqrt{2}$**
7	V3(x):=pi Integral(f3(x)^2,x,0,R) ≈ **V3(x) := 1.05 R^3**
8	V3/O3 ≈ **0.47 R**

Vi kan betrakte volumets forhold til overflaten siden tykkelsen er lik på porselenet.
Kopp 2 er best utnyttelse av porselenet : $0.59R$
Kopp 1 er nest best utnyttelse av porselenet : $0.50R$
Kopp 3 er dårligst utnyttelse : $0.47R$