R2 Testeksamen

Informasjon om prøven

Total prøvetid er inntil 5 timer, og delen uten hjelpemidler er på inntil 2 timer.

Med hjelpemidler betyr alle ikke-kommuniserende hjelpemidler.

Del 1 leveres inn før hjelpemidler tas fram.

Hjelpemidler

På delen med hjelpemidler er alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Veiledning om vurderingen

Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.

Framgangsmåte, utregning og forklaring skal belønnes – også om resultatet ikke er riktig.

Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at det vurderes i hvilken grad du

- viser kompetanse i kjerneelementene og matematisk forståelse
- gjennomfører logiske resonnementer
- ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner
- kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler
- vurderer om svar er rimelige
- forklarer framgangsmåter og begrunner svar
- skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Del 1

Oppgave 1

Løs integralene

a) $\int_0^2 e^{-x}\ dx$

b) $\int x \cdot \cos 2x\ dx$

c) $\int \frac{2\ln x}{x}\ dx$

Oppgave 2

Løs likningene

a) $\sin^2 x + \cos x = 1\ ,\ x \in \mathbb{R}$

b) $\sqrt{3}\sin 2x = 3\cos 2x\ ,\ x \in [0, 2\pi]$

Oppgave 3

En aritmetisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$ har differanse $d = \frac{1}{3}$.

Bestem det første leddet a_1 når summen av de 31 første leddene er lik 620.

Oppgave 4

Et plan α er gitt ved likningen

$$\alpha : \sqrt{2}x + y + \sqrt{5}z = \sqrt{10}$$

a) Bestem skjæringspunktene mellom planet og koordinataksene.

b) Bestem vinkelen mellom planet og x-aksen.

Oppgave 5

a) Vis at

$$\int \tan x \; dx = -\ln|\cos x| + C$$

b) Beskriv hvilket areal programmet nedenfor regner ut.

```python
import math
def f(x):
  return math.tan(x)

x_1=0
x_2=math.pi/3
delta_x=0.1


areal=0
x=x_1

while x<x_2:
  areal=areal+delta_x*f(x)
  x=x+delta_x

print('Arealet er ',areal)
```

c) Hva er den eksakte verdien til arealet, og hvordan kan vi endre programmet slik at det gir en bedre tilnærmingsverdi?

Oppgave 6

a) Forklar at 3n(n+1) er delelig med 6 når n er et positivt heltall.

b) Bruk induksjon til å vise at $n^3 - n$ er delelig med 6 for alle $n \in \mathbb{N}$.

Del 2

Oppgave 1

En bøye flyter på havet og beveger seg opp og ned i bølgene. Tabellen viser målinger av bøyens høyde over havbunnen ved ulike tidspunkter.

Tid (sek.)	0,5	1,2	2,1	3,2	4,5	5,7	6,4
Høyde (m)	26,8	27,4	26,8	25,1	24,9	26,7	27,4

a) Vis at funksjonen

$$h(t) = 1,4\sin(1,2t) + 26 \ , \ t \in [0,7]$$

er en god modell for høyden til bøyen etter t sekunder.

b) Bestem perioden til funksjonen. Hva forteller perioden om bevegelsen til bøyen?

c) Ved hvilket tidspunkt har bøyen sin største fart nedover?

Oppgave 2

En rekke er gitt ved

$$x + \frac{x}{(x+2)} + \frac{x}{(x+2)^2} + \frac{x}{(x+2)^3} + ...$$

a) Forklar at rekka er geometrisk.

b) Bestem konvergensområdet for rekka.

c) Bestem et utrykk for summen $s(x)$ av rekka.

d) For hvilke verdier av k har likningen $s(x) = k$ to løsninger?

Oppgave 3

Et plan α skjærer koordinataksene i (2,0,0) , (0,1,0) og (0,0,5).

a) Vis at planet har likningen

$$\alpha : 5x + 10y + 2z = 10$$

b) Finn avstanden fra origo til planet α.

c) Bestem likningen for den minste kuleflaten som både går gjennom origo og tangerer planet α.

d) Et plan β skjærer koordinataksene i (a,0,0) , (0,b,0) og (0,0,c).
Bestem et uttrykk for diameteren i den minste kuleflaten som både går gjennom origo og tangerer planet β.

Oppgave 4

Posisjonsvektoren til en partikkel ved tiden t sekunder er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [\sin 2t, \cos t, 1/8t^2], t \in [0, 3]$$

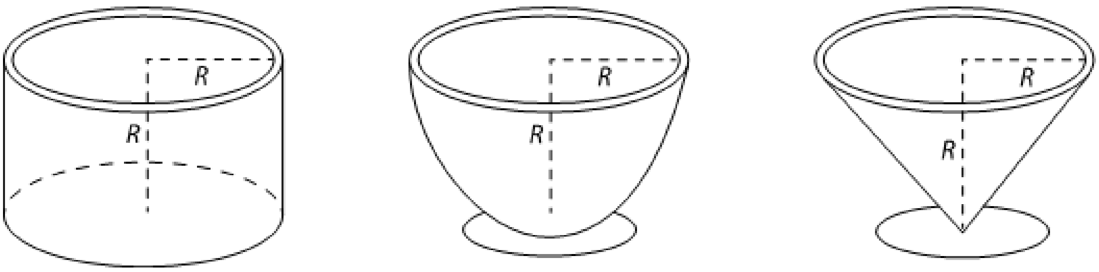
Enheten på aksene er meter.

a) Vis at partikkelen treffer z-aksen, og bestem punktet på z-aksen den treffer.

b) Når er farten til partikkelen parallell med yz-planet?

c) Bestem den høyeste farten til partikkelen.

Oppgave 5



Tre porselenskopper er laget som på figuren. Koppen til venstre er en sylinder, koppen i midten er laget av en rotert parabel, mens koppen til høyre er en kjegle. Alle koppene har innvendig høyde og radius R. Tykkelsen på porselenet er det samme i alle koppene.

Undersøk volumet av koppene. Hvordan er forholdet mellom volum og hvor mye porselen som går med til å lage koppene?
Tips : Liggende parabel kan du tegne med $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$