

Eksamen

25.11.2016

REA3024 Matematikk R2

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler
Hjelpemidler på del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none">– viser regneferdigheter og matematisk forståelse– gjennomfører logiske resonnementer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler– vurderer om svar er rimelige– forklarer framgangsmåter og begrunner svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: <ul style="list-style-type: none">• Befolkning: www.dagbladet.no (06.05.2016)• Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3 \cos 2x$

b) $g(x) = e^{\sin x}$

c) $h(x) = \frac{x}{\sin x}$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^2 - 3x + 2) dx$

b) $\int x \cos x dx$

c) $\int 2x \sin x^2 dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

En rett linje går gjennom $A(0, 0)$ og $B(h, r)$ der h og r er to positive tall.

a) Bestem ligningen for linjen, uttrykt ved h og r .

Linjestykket AB roteres 360° om x -aksen. Vi får da et omdreiningslegeme.

b) Bestem et uttrykk for volumet til omdreiningslegemet.
Hva slags legeme har du regnet ut volumet til?

Oppgave 4 (6 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5, \quad D_f = \langle 0, 12 \rangle$$

- Bestem perioden til f .
- Bestem ekstremalverdiene y_{\min} og y_{\max} .
- Forklar hvorfor grafen vil ha alle sine vendepunkter på likevektlinjen. Bestem koordinatene til vendepunktene.
- Lag en skisse av grafen til f .

Oppgave 5 (5 poeng)

Vi har gitt differensialligningen

$$y'' - 4y' - 5y = 0$$

- Vis at $y = e^{rx}$ er en løsning til differensialligningen når $r^2 - 4r - 5 = 0$.
- Bestem den generelle løsningen til differensialligningen.
- Bestem den spesielle løsningen som tilfredsstillter betingelsene $y(0) = 6$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 6 (5 poeng)

Brøken B_n er definert ved at telleren er summen av de n første oddetallene, mens nevneren er summen av de n neste oddetallene.

- a) Regn ut $B_2 = \frac{1+3}{5+7}$, $B_3 = \frac{1+3+5}{7+9+11}$ og $B_4 = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$. Forkort svarene.
- b) Vis at summen av de n første oddetallene kan skrives $S_n = n^2$.
- c) Forklar at $B_n = \frac{S_n}{S_{2n} - S_n}$. Regn ut denne brøken.

Oppgave 7 (7 poeng)

Ligningen til en kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 6z = 14$$

- a) Vis at punktet $A(4, 3, 3)$ ligger på kuleflaten.
- b) Vis at kulen har sentrum i $S(1, -1, 3)$. Bestem radien til kulen.
- c) Bestem ligningen for tangentplanet α til kuleflaten i punktet A .

Et annet plan β går gjennom S og $B(1, 0, 1)$ og står normalt på α .

- d) Bestem ligningen til β .

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)



Ved inngangen til 2015 var folketallet i Norge 5 200 000. I en modell for befolkningsveksten antar vi at

- netto innvandring per år vil være 44 000
- antall som blir født per år, vil være 1,1 % av folketallet
- antall som dør per år, vil være 0,8 % av folketallet

Vi lar folketallet være $y(t)$, der t er antall år etter 2015.

a) Forklar at vi kan skrive

$$y' = 0,003y + 44000 \quad , \quad y(0) = 5200000$$

b) Løs differensialligningen.

c) Når vil folketallet passere 7 millioner ifølge denne modellen?
Hvor stor er vekstfarten i folketallet da?

Oppgave 2 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$$

- Bruk graftegner til å tegne grafen til f .
- Bruk CAS til å bestemme de eksakte koordinatene til topppunktene på grafen til f .
- Bestem det samlede arealet av områdene som er avgrenset av grafen til f og x -aksen.

Grafen til f roteres 360° om x -aksen.

- Bestem volumet av omdreiningslegemet som da framkommer.

Oppgave 3 (7 poeng)

To plan α og β er gitt ved

$$\alpha: x - y - 3 = 0$$

$$\beta: x + pz - 4 = 0, \quad p \in \mathbb{R}$$

- Vis at punktet $(4, 1, 0)$ ligger i begge planene.
- Bestem p slik at vinkelen mellom α og β blir 60° .
- Hvilken verdi for p vil gi den minste vinkelen mellom α og β ? Hvor stor er vinkelen da?

De to planene skjærer hverandre langs en linje ℓ .

- Bestem en parameterframstilling for ℓ uttrykt ved p .

Oppgave 4 (4 poeng)

Om en uendelig geometrisk rekke vet vi at

- summen er 8
- summen av de tre første leddene er 7

a) Sett opp et ligningssystem som uttrykker opplysningene ovenfor.

b) Bruk CAS til å bestemme kvotienten k og det første leddet a_1 i rekken.

