

Eksamen

24.11.2017

REA3024 Matematikk R2

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none">– viser regneferdigheter og matematisk forståelse– gjennomfører logiske resonnementer– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler– forklarer framgangsmåter og begrunner svar– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger– vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: <ul style="list-style-type: none">• Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1 Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2 \sin 3x$

b) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$

c) $h(x) = x \cos x^2$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^3 - 3x + 2) dx$

b) $\int x e^{2x} dx$

c) $\int x \sqrt{x^2 + 1} dx$

Oppgave 3 (4 poeng)

Løs de trigonometriske likningene

a) $2 \sin(2x) - 1 = 0$, $x \in [0, 2\pi]$

b) $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$, $x \in [0, 2\pi]$

Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2 \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3, \quad x \in \langle -1, 5 \rangle$$

- Bestem toppunktene og bunnpunktene på grafen til f .
- Lag en skisse av grafen til f .
- Bestem arealet av området som er avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = 0$ og $x = 4$.

Oppgave 5 (8 poeng)

Gitt punktene $A(1, 0, 3)$, $B(3, 2, -1)$ og $C(0, 4, 4)$

- Bestem \vec{AB} , \vec{AC} og $\vec{AB} \times \vec{AC}$.
- Vis at punktene A, B og C ligger i planet α gitt ved likningen

$$9x + y + 5z = 24$$

En linje ℓ står normalt på planet α og går gjennom punktet $T(11, 7, 5)$.

- Bestem en parameterframstilling for linjen ℓ . Bestem skjæringspunktet mellom linjen ℓ og planet α .
- Bestem volumet av pyramiden $ABCT$.

Oppgave 6 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y'' - 9y' - 10y = 0$$

når $y(0) = 4$ og $y'(0) = 7$

Oppgave 7 (5 poeng)

En aritmetisk tallfølge a_n er definert ved at $a_n = 3n - 2$.

La $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

a) Bruk formelen for summen av en aritmetisk rekke til å vise at

$$s_n = \frac{3n^2 - n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Bruk induksjon til å bevise formelen for s_n som er gitt i oppgave a).

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Et firma skal sette opp en stolpe. Det gjør de ved å slå stolpen ned i jorda med en pælemaskin.

Det første slaget slår stolpen 12 cm ned i jorda. De neste slagene fører stolpen videre nedover, men stadig kortere for hver gang. Det viser seg at lengden som stolpen blir slått ned i jorda, blir redusert med 6,0 % for hvert slag.

- a) Hvor mange slag må de minst slå for å få stolpen mer enn 1,0 meter ned i jorda?
- b) Kan firmaet klare å slå stolpen så mye som 2,2 meter ned i jorda med denne pælemaskinen?

Oppgave 2 (6 poeng)

En linje ℓ går gjennom punktene $A(7, 12, 12)$ og $B(1, -6, -12)$.

- a) Bestem en parameterframstilling for linjen ℓ .

En kuleflate K har sentrum i origo og radius 5.

- b) Bestem skjæringspunktene mellom linjen ℓ og kuleflaten K .

Et plan α er gitt ved

$$\alpha: 4x - 3y + 7 = 0$$

Det er to plan som er parallelle med α , og som samtidig tangerer kuleflaten K .

- c) Bestem likningen for hvert av disse planene.

Oppgave 3 (6 poeng)

Bestanden av ørret i et bestemt fiskevann avtar med 3,0 % per år. Vi går ut fra at det er 10 000 ørreter i vannet ved starten av 2018.

- a) Forklar at differensiallikningen gitt ved

$$y' = -0,03y, \quad y(0) = 10\,000$$

kan brukes til å bestemme ørretbestanden $y(t)$ i vannet t år etter starten av 2018.

- b) Løs differensiallikningen.
Hvor mange ørreter vil det være i vannet i 2028?

Den lokale fiskeforeningen ønsker å sette ut et fast antall ørreter i vannet hvert år i ti år framover. Utsettingen starter tidlig i 2018 og skjer kontinuerlig over tiårsperioden. Målet er at det ved starten av 2027 skal være 15 000 ørreter i vannet.

- c) Sett opp og grunngi en differensiallikning som kan brukes til å bestemme hvor mange ørreter de må sette ut hvert år for å nå målet.
- d) Hvor mange ørreter må de sette ut hvert år for å nå målet?

Oppgave 4 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{2^2 - x^2} \quad , \quad x \in [-2, 2]$$

- a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f .
Tegn også inn linjen gitt ved $g(x) = f(1)$ i samme koordinatsystem som grafen til f .
- b) Bruk CAS til å bestemme arealet av sirkelsegmentet avgrenset av grafene til f og g .

Vi dreier dette sirkelsegmentet 360° om x -aksen.

- c) Bruk CAS til å bestemme volumet av omdreiningslegemet vi da får.

Funksjonen F er gitt ved

$$F(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \quad x \in [-r, r] \quad , \quad r > 1.$$

Linjen gitt ved $G(x) = F(1)$ skjærer grafen til F i punktene $(-1, F(-1))$ og $(1, F(1))$.

Området mellom grafene til F og G er et sirkelsegment. Vi roterer dette sirkelsegmentet 360° om x -aksen.

- d) Vis ved hjelp av CAS at volumet av omdreiningslegemet vi da får, er uavhengig av r .

