

Eksamen

28.05.2018

REA3024 Matematikk R2



## Bokmål

<b>Eksamensinformasjon</b>	
<b>Eksamenstid:</b>	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
<b>Hjelpemidler på Del 1:</b>	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
<b>Hjelpemidler på Del 2:</b>	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
<b>Framgangsmåte:</b>	Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.  Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.  Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
<b>Veiledning om vurderingen:</b>	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse</li><li>– gjennomfører logiske resonnementer</li><li>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner</li><li>– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler</li><li>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar</li><li>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger</li><li>– vurderer om svar er rimelige</li></ul>
<b>Andre opplysninger:</b>	Kilder for bilder, tegninger osv.: <ul style="list-style-type: none"><li>• Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet</li></ul>

## DEL 1 Uten hjelpemidler

### Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

- a)  $f(x) = \cos(\pi x - 2)$
- b)  $g(x) = x \cdot \sin x$

### Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

- a)  $\int (4x^2 + 3x) dx$
- b)  $\int 4x^2 \cdot \ln x dx$
- c)  $\int_0^{\sqrt{12}} \frac{2x}{x^2 + 4} dx$

### Oppgave 3 (3 poeng)

I en aritmetisk rekke  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  er  $a_2 = 4$  og  $a_5 = 13$ .

Bestem en eksplisitt formel for summen av denne rekken.

### Oppgave 4 (3 poeng)

En differensiallikning er gitt ved

$$y' = (\sin x) \cdot y^2$$

- a) Bestem den generelle løsningen av differensiallikningen.
- b) Bestem den løsningen av differensiallikningen som er slik at  $y(\pi) = 1$ .

### Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen  $f$  er gitt ved

$$f(x) = 1 - x^2$$

Et flatestykke er avgrenset av  $x$ -aksen og grafen til  $f$ .

a) Bestem arealet av flatestykket.

Vi får et omdreiningslegeme ved å dreie flatestykket  $360^\circ$  om  $x$ -aksen.

b) Bestem volumet av omdreiningslegemet.

### Oppgave 6 (8 poeng)

Funksjonen  $f$  er gitt ved

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right), \quad x \in \langle 1, 9 \rangle$$

a) Bestem eventuelle toppunkter og bunnpunkter på grafen til  $f$ .

b) Bestem nullpunktene til  $f$ .

c) Lag en skisse av grafen til  $f$ .

d) Løs likningen  $f(x) = \sqrt{3}$

## Oppgave 7 (6 poeng)

En kuleflate er gitt ved

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 8z - 20 = 0$$

- a) Vis at sentrum i kulen er  $S(3, -2, 4)$ . Bestem radien til kuleflaten.

Et plan er gitt ved

$$6x - 3y + 2z - 4 = 0$$

- b) Bestem avstanden fra kulens sentrum  $S$  til planet.

Skjæringen mellom kuleflaten og planet er en sirkel.

- c) Bestem arealet av sirkelen.

## Oppgave 8 (4 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$$

- a) Bestem konvergensområdet til rekken.
- b) For hvilke verdier av  $a$  har likningen  $S(x) = a$  løsning?

## DEL 2 Med hjelpemidler

### Oppgave 1 (6 poeng)

Funksjonene  $f$  og  $g$  er gitt ved

$$f(x) = -x^2 + 3x + 3$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafene til  $f$  og  $g$  i samme koordinatsystem.

Grafene til  $f$  og  $g$  avgrenser et flatestykke med areal  $A$ .

b) Bestem  $A$  ved hjelp av CAS.

Tyngdepunktet  $T$  til flatestykket er  $\left(\frac{M}{A}, \frac{N}{A}\right)$ , der  $M$  og  $N$  er gitt ved

$$M = \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) \, dx$$

$$N = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) \, dx$$

Tallene  $a$  og  $b$  er  $x$ -koordinatene til skjæringspunktene mellom grafene til  $f$  og  $g$ , der  $a < b$ .

c) Bestem koordinatene til  $T$  ved hjelp av CAS.

## Oppgave 2 (6 poeng)

Gitt punktene  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, t + 2, 3t)$ ,  $C(0, 4, t + 1)$  og  $D(t - 3, 8, 1)$ , der  $0 \leq t \leq 10$ .

- Bestem arealet av trekanten  $ABC$  for  $t = 2$ .
- Bruk CAS til å bestemme  $t$  slik at arealet til trekanten  $ABC$  blir lik 6.
- Bestem  $t$  slik at volumet av pyramiden  $ABCD$  blir størst mulig.

## Oppgave 3 (8 poeng)

I en by med 12 000 innbyggere sprer det seg en smittsom sykdom. Det viser seg at vekstfarten i antall smittede personer til enhver tid er proporsjonal med antall personer som ennå ikke er smittet. Vi lar  $k$  være proporsjonalitetskonstanten.

- Sett opp en differensiallikning som beskriver antall smittede personer  $y(t)$ , der  $t$  er antall uker etter at sykdommen ble oppdaget.

Da sykdommen ble oppdaget, var 100 personer smittet.

- Vis at  $y(t) = 12000 - 11900 \cdot e^{-kt}$

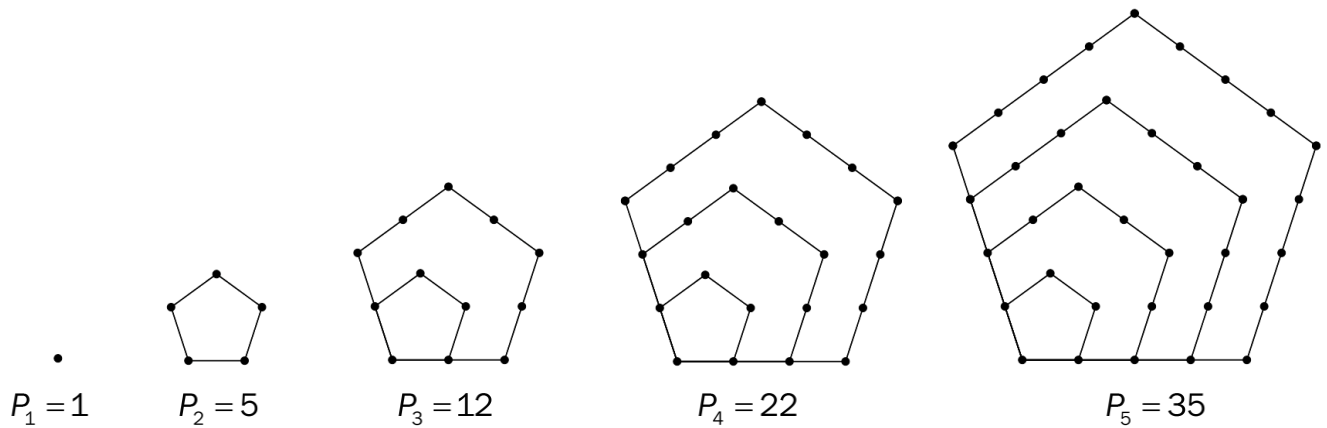
Etter 10 uker var 4 000 personer smittet.

- Bruk dette til å bestemme  $k$ .
- Ved hvilket tidspunkt var halvparten av innbyggerne i byen smittet av sykdommen?



## Oppgave 4 (4 poeng)

Figuren nedenfor viser hvordan femkantallene er bygd opp.



Femkantallene er gitt ved den rekursive formelen

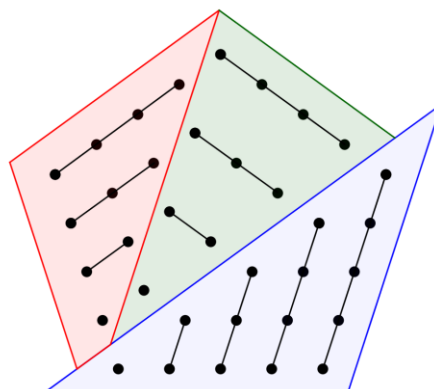
$$P_{n+1} = P_n + 3n + 1, \quad P_1 = 1$$

a) Vis ved induksjon at

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Mathias observerer at det er mulig å regne ut  $P_n$  som summen av tre trekantall, der trekantall nummer  $n$  er  $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ . Se figuren nedenfor. Han brukte dette til å

vise at  $P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$



Mathias' oppdeling av  $P_5$

b) Bruk ideen til Mathias til å utlede formelen for  $P_n$ .

