Utdanningsdirektoratet

Eksamen

24.05.2019

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du — viser regneferdigheter og matematisk forståelse — gjennomfører logiske resonnementer — ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner — kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler — forklarer framgangsmåter og begrunner svar — skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger — vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: — Tromsø: https://unsplash.com/photos/ist1RQOfkcE (04.02.2019) — Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 3\sin(4x+1) + x$

b) $g(x) = 4\sin x \cdot \cos x$

Oppgave 2 (5 poeng)

Bestem integralene

a) $\int (x^4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

b) $\int 4x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{4}{x^2 - 2x - 3}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 3 (4 poeng)

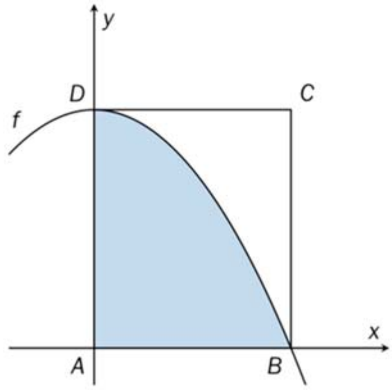
a) Bruk formelen for summen av en aritmetisk rekke til å regne ut

$$1 + 5 + 9 + \cdots + 157$$

b) En geometrisk rekke er gitt ved $a_3 = 1$ og $a_6 = \frac{1}{27}$.

Avgjør om den uendelige rekken $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer.
Bestem eventuelt summen av rekken.

Oppgave 4 (2 poeng)



Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = a^2 - x^2 \ , \text{ der } a > 0$$

Rektangelet $ABCD$ er gitt ved at

- A er origo
- B er det høyre skjæringspunktet mellom grafen til f og x-aksen
- D er toppunktet på grafen til f

Vis at arealet av det fargelagte området utgjør $\dfrac{2}{3}$ av rektangelets areal.

Oppgave 5 (8 poeng)

Vi har gitt punktene $A(3, 1, 0)$, $B(3, 2, 4)$ og $C(-1, 1, 4)$.

a) Vis at punktene ligger i planet α gitt ved

$$\alpha: \ x - 4y + z + 1 = 0$$

En linje ℓ står normalt på α og går gjennom A.

b) Bestem en parameterframstilling for ℓ.

En kuleflate tangerer α i A.

c) Forklar at kuleflaten er gitt ved likningen

$$(x-3-t)^2 + (y-1+4t)^2 + (z-t)^2 = 18t^2 \ , \text{ for en } t \in \mathbb{R}$$

Punktet $P(4, 1, 1)$ ligger på kuleflaten.

d) Bestem sentrum til kuleflaten.

Oppgave 6 (4 poeng)

Løs likningene

a) $\sin(2x)=1 \quad , \quad x \in [0,\ 2\pi]$

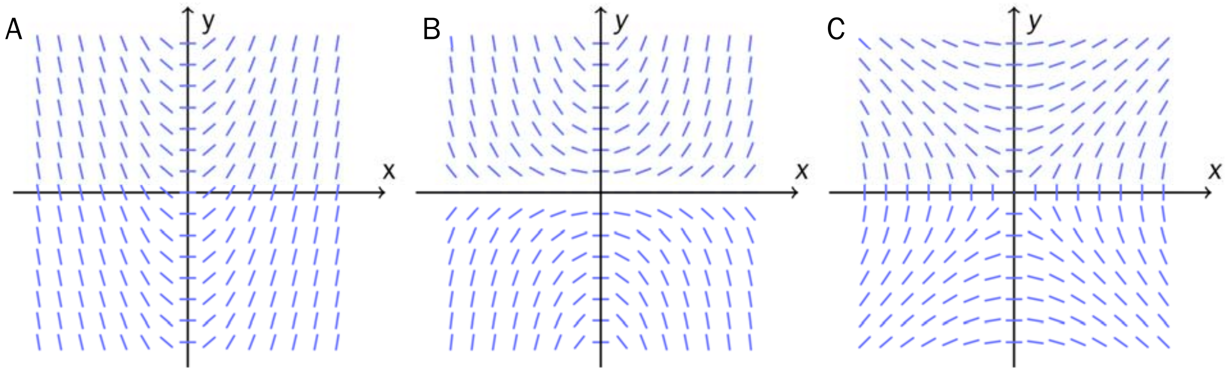
b) $\sin(\pi x)+\sqrt{3}\cos(\pi x)=0 \quad , \quad x \in [0,\ 2]$

Oppgave 7 (3 poeng)

Nedenfor har vi tegnet retningsdiagrammene til differensiallikningene

1) $y' = \dfrac{x}{y}$ 2) $y' = x \cdot y$ 3) $y' = 2x$

Argumenter for hvilket av retningsdiagrammene som hører til hver av de tre differensial-likningene.

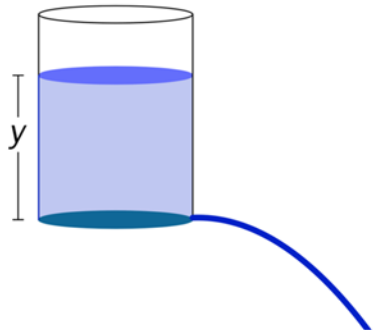


Oppgave 8 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise at påstanden $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \quad 3\cdot 4 + 6\cdot 5 + 9\cdot 6 + \cdots + (3n)\cdot(n+3) = n\cdot(n+1)\cdot(n+5)$$

Oppgave 9 (4 poeng)



Vann lekker ut fra et hull i bunnen av en sylinderformet tank med en fart som til enhver tid er proporsjonal med kvadratroten av vannhøyden y i tanken.

a) Sett opp en differensiallikning som svarer til opplysningene ovenfor.

Ved tiden $t = 0$ er vannhøyden 100 cm. Etter 2 timer er vannhøyden 81 cm.

b) Hvor lang tid vil det gå før tanken er tom?

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser vannstanden til tidevannet ved Leirvik på Stord 14. august 2018. Vannstanden er målt fra et nullnivå som heter sjøkartnull.

Klokkeslett	03.00	06.00	09.00	12.00	15.00	18.00	21.00	23.00
Vannstand (cm)	102	26	10	81	109	43	20	57

a) Bruk tallene fra tabellen til å lage en sinusfunksjon g som er en god modell for vannstanden.

Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 130\ \sin(0{,}501x - 0{,}532) + 148\,, \quad x \in [0\,,\,24\rangle$$

er en god modell for vannstanden til tidevannet i Tromsø x timer etter midnatt 14. august 2018.

b) Bestem perioden til f. Gi en praktisk tolkning av dette tallet.

c) Gi en praktisk tolkning av tallene 148 og 130 i modellen f.

d) Ved hvilke tidspunkter øker vannstanden med 50 cm per time?

Oppgave 2 (7 poeng)

Punktene $P(2, 4, -3)$ og $Q(0, 0, 1)$ ligger på en kuleflate K slik at PQ er en diameter til kuleflaten.

a) Vis at kuleflaten K er gitt ved likningen

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$$

Planet α er gitt ved

$$\alpha:\ x-y+z=7$$

b) Bestem eksakt den minste avstanden mellom kuleflaten K og planet α.

Et plan β er gitt ved likningen

$$\beta:\ 2x+y+t\cdot(z-3)=-1$$

c) Vis at avstanden mellom sentrum i kuleflaten K og planet β er gitt ved

$$d(t)=\frac{|5-4t|}{\sqrt{5+t^2}}$$

d) Bestem eksakte verdier for t slik at planet β tangerer kuleflaten K.

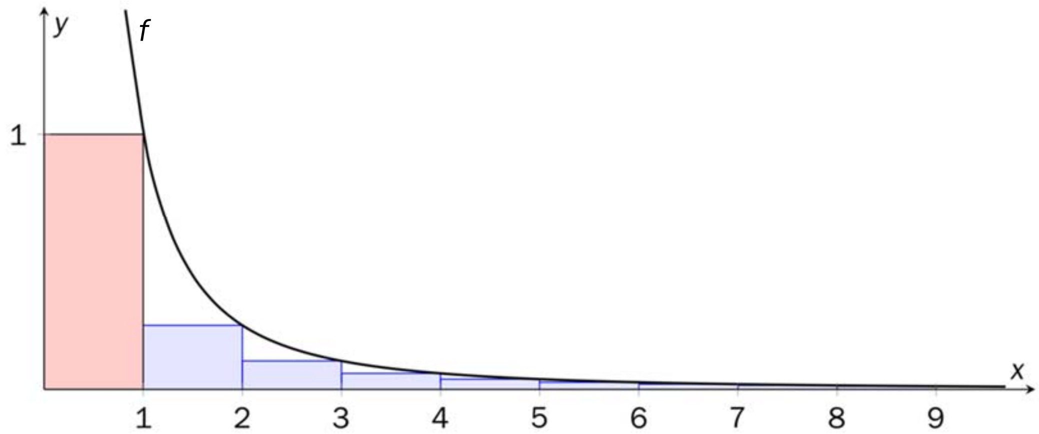
Oppgave 3 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

a) Bruk figuren nedenfor til å forklare at

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\leq 1+\int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx\ ,\quad k\in\mathbb{N}$$



Vi skal nå se på den uendelige rekken

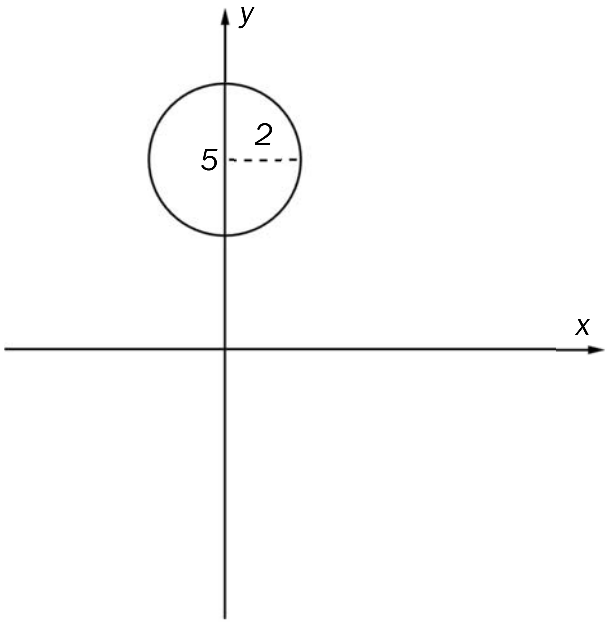
$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

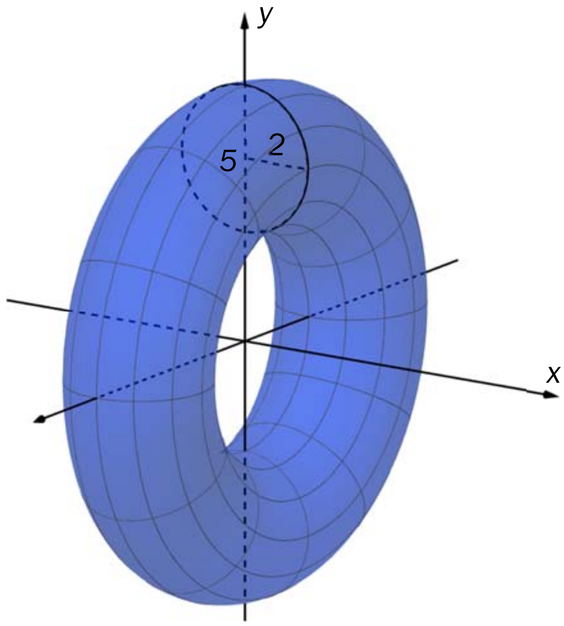
b) Bruk resultatet fra oppgave a) til å begrunne at $S<2$.

c) Bruk CAS til å bestemme en eksakt verdi for S.

Oppgave 4 (6 poeng)

En sirkel har sentrum i $(0, 5)$ og radius 2. Vi roterer denne sirkelen $360°$ om x-aksen. Da får vi et omdreiingslegeme som vist på figuren.





a) Forklar at grafene til f og g sammen danner sirkelen når f og g er gitt ved

$$f(x) = 5 + \sqrt{4 - x^2}$$

$$g(x) = 5 - \sqrt{4 - x^2}$$

b) Bruk CAS til å bestemme den eksakte verdien for volumet av omdreiingslegemet.

En annen sirkel har sentrum i $(2, 7)$ og radius 3. Vi roterer også denne sirkelen $360°$ om x-aksen.

c) Bruk CAS til å bestemme den eksakte verdien for volumet av dette omdreiingslegemet.