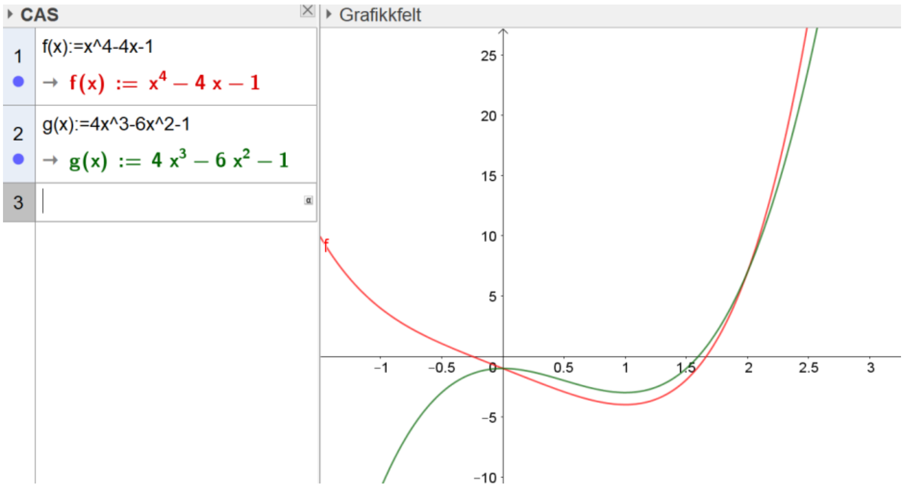
R2 Eksamen H18 del 2

Oppgave 1 (5 poeng)

a)



b)

Finner skjæringspunktene mellom f(x) og g(x)

Definerer nedre og øvre grense

Finner arealet av M ved integral

3	Løs(f=g) $\rightarrow \{x = 0, x = 2\}$
4	a:=0 $\rightarrow a := 0$
5	b:=2 $\rightarrow b := 2$
6	M:=Integral(g-f,a,b) $\rightarrow M := \frac{8}{5}$

c)

Definerer grafene i CAS

Finner skjæringspunktene

Og definerer øvre og nedre grense

Finner arealet ved integralregning.

Ser at svaret er uavhengig av r, siden r ikke finnes i svaret.

7	F(x):=x^4-4 r^3*x-1 $\rightarrow F(x) := x^4 - 4\,r^3\,x - 1$
8	G(x):=4r x^3-6r^2 x^2-r^4 $\rightarrow G(x) := -r^4 + 4\,r\,x^3 - 6\,r^2\,x^2$
9	Løs(F=G) $\rightarrow \{x = r - 1, x = r + 1\}$
10	a1:=r-1 $\rightarrow a1 := r - 1$
11	b1:=r+1 $\rightarrow b1 := r + 1$
12	N:=Integral(G-F,a1,b1) $\rightarrow N := \frac{8}{5}$

Oppgave 2 (7 poeng)

a)

$K_1: (x-2t)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4^2$

b)

Kula vil tangere yz-planet når x=2 eller x=-2

x=2 : t=1

x=-1 : t=-1

c)

$K_2: x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$\overrightarrow{OS} = (2t, 1,3)$

$|\overrightarrow{OS}| = \sqrt{4t^2 + 10}$

Kulene tangerer hverandre når avstanden er 4, fordi begge kulene har radius r=2.

1	K:=(x-2 t)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4 $\rightarrow$ $\mathbf{K: (y-1)^2 + (z-3)^2 + (-2\,t + x)^2 = 4}$
2	S:=(2t,1,3) $\rightarrow$ $\mathbf{S := (2\,t, 1, 3)}$
3	OS:=Vektor(S) $\rightarrow$ $\mathbf{OS := \begin{pmatrix} 2\,t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$
4	Løs(|OS|=4) $\rightarrow$ $\mathbf{\left\{t = -\frac{\sqrt{6}}{2}, t = \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}}$

d)

Avstanden kan angis som en funksjon av t : $f(t) = |OS| = \sqrt{2(2t^2 + 5)}$

Korteste avstand finner vi ved å derivere, og sette den deriverte lik null.

$f'(t) = 0 \rightarrow \quad t = 0$

Avstanden mellom S og O er da : $f(0) = \sqrt{10}$

Radien til K_2 er da $\sqrt{10} - 2$

5	f(t):=|OS| $\rightarrow$ $\mathbf{f(t) := \sqrt{2}\,\sqrt{2\,t^2 + 5}}$
6	Løs(f'(t)=0) $\rightarrow$ $\mathbf{\{t = 0\}}$
7	f(0) $\rightarrow$ $\mathbf{\sqrt{10}}$
8	sqrt(10)-2 $\rightarrow$ $\mathbf{\sqrt{10} - 2}$

Oppgave 3 (4 poeng)

2018 : 20 000 tonn CO_2

Reduserer med 15% pr.år f.o.m 2019

Setter x lik antall år etter 2018

a) Vi kan se på dette som en geometrisk rekke :

$$20000\ +\ 20000\cdot 0.85\ +\ 20000\cdot (0.85)^2 + \ldots + 20000\cdot (0.85)^{n-1} = 20000\cdot \frac{(0.85)^2-1}{0.85-1}$$

Vi kan definere en funksjon ved å bruke summeformelen for rekka

Etter 10 år vil da totalt utslipp være 107 083 tonn

(Vi kan også finne dette ved kommandoen Sum)

1	f(x):=20000 *(0.85^x-1)/(0.85-1)
	$\approx\ f(x)\ :=\ -133333.33\ e^{-0.16x} + 133333.33$
2	f(10)
	$\approx\ 107083.41$
3	Sum(20000*0.85^(n-1),n,1,10)
	$\approx\ 107083.41$

b)

Setter opp en likning der vekstfarten er ukjent.

Vekstfarten er o,73, altså må utslippene reduseres med 27% pr. år for å vale på samme nivå som utslippene fra oppgave a)

4	Løs(Sum(30000*x^(n-1),n,1,10)=107083.41)
	$\approx\ \{x = 0.73\}$
5	1-0.73
	$\approx\ 0.27$

Oppgave 4 (8 poeng)

a)

$$y' = 3.2 - 0.14\,y \quad , \quad y(0) = 200$$

Vannmengden i tanken = y

Endring i vannmengden = y’

Konstant fart renner inn, dette er altså ikke avhengig av vannmengden i tanken, da er mengden vann inn i tanken 3.2 liter / minutt.

Vannmengde ut er proporsjonal med vannmengden i tanken, da ser vi at proporsjonalitetsfaktoren k=0,14. Negativt fortegn fordi det renner ut av tanken.

Initialbetingelsen y(0)=200 betyr at det er 200 liter vann i tanken når vi starter, t=0

b)

Løser diff.likningen

c)

Etter 20 minutter er det 33,6 liter i tanken

1	f(x):=LøsODE(y'=3.2-0.14 y,(0,200)) $\approx$ $f(x) := 177.14\,e^{-0.14x} + 22.86$
2	f(20) $\approx$ 33.63

d)

INN : 1,5 liter pr. minutt

UT : k*y , der k er proporsjonalitetskonstanten

Diff.likningen blir da : $y' = 1.5 - k \cdot y$, f(0)=0 , $\lim_{x \to \infty} f(x) = 10$

Løser diff.likningen med f(0)=0 som initialbetingelser

Ser at leddet $\lim_{x \to \infty} -1.5e^{-k\,x} = 0$

Løser da likningen : $\frac{1.5}{k} = 10$, og får k=0.15

1	g(x):=LøsODE(y'=1.5-k y,(0,0)) $\approx$ $g(x) := \frac{-1.5\,e^{-kx} + 1.5}{k}$
2	1.5/k=10,k=1 NLøs: $\{k = 0.15\}$
3	Grenseverdi(e ^(- x), ∞) $\rightarrow$ 0

Da blir funksjonen $g(x) = -10\,e^{-0.15x} + 10$

Etter 20 minutter er det da 9,5 liter i denne tanken.

4	h(x):=ByttUt((-1.5e^(-k x) + 1.5) / k, k, 0.15) $\approx$ $h(x) := -10\,e^{-0.15x} + 10$
5	h(20) $\approx$ 9.5