FUNKSJONER - Eksamensoppgaver

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng)

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x)=\frac{ax+b}{x+c}$$

Følgende opplysninger er gitt om grafen til g

- Den har vertikal asymptote $x=-1$.
- Den skjærer x-aksen i $x=2$.
- Den skjærer y-aksen i $y=-4$.

a) Bestem funksjonsuttrykket til g.

Bruker opplysningene til å sette opp noen likninger.

Grafen av funksjonen har vertikal asymptote når nevneren er lik null

$x+c=0$ når $x=-1$

$-1+c=0$

$\underline{\underline{c=1}}$

Skjæringen med y-aksen gir

$$g(0)=-4$$

$$\frac{a\cdot 0+b}{0+c}=-4$$

$$\frac{b}{1}=-4$$

$$\underline{\underline{b=-4}}$$

Skjæringen med x-aksen gir

$$g(2)=0$$

$$\frac{a\cdot 2+b}{2+c}=0$$

$$2a+b=0$$

$$a=-\frac{b}{2}=-\frac{(-4)}{2}=\underline{\underline{2}}$$

Funksjonsuttrykket blir $\underline{\underline{g(x)=\frac{2x-4}{x+1}}}$

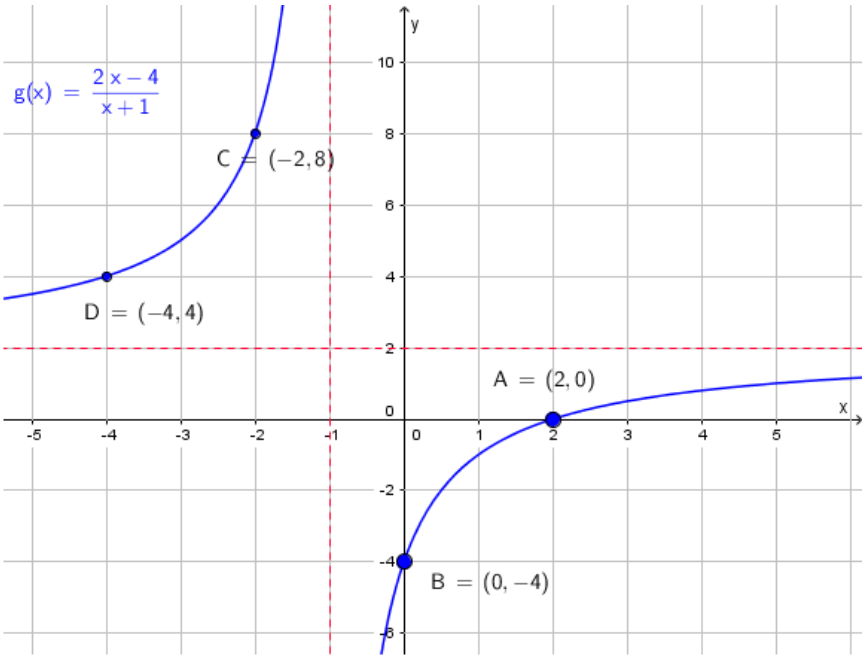
b) Tegn grafen til g med asymptoter i et koordinatsystem.

Markerer kjente punkter (A og B), og finner horisontal asymptote

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-4}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{2-0}{1-0}=2$$

Linjen $x=2$ er horisontal asymptote.

Regner ut punktene $C=(-2,g(-2))=(-2,8)$ og $D=(-4,g(-4))=(-4,4)$. Vi kan også bruke symmetri for å finne C og D.



Oppgave 2 (6 poeng)

En bedrift produserer en vare. De regner med at kostnadene K ved å produsere x enheter av varen per dag er

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 30x + 1000 \ , \quad 0 \le x \le 300$$

a) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til K i intervallet $[0,\ 100]$

Gjennomsnittlig vekstfart til K i intervallet er

$$\frac{K(100)-K(0)}{100-0} = \frac{\left(0{,}1\cdot 100^2 + 30\cdot 100 + 1000\right) - (1000)}{100} = \frac{1000+3000}{100} = \underline{\underline{40}}$$

b) Bestem $K'(100)$. Hva forteller dette svaret oss?

$K'(x) = 2\cdot 0{,}1x + 30 = 0{,}2x + 30$

$K'(100) = 0{,}2\cdot 100 + 30 = \underline{\underline{50}}$

Svaret sier at stigningstallet til tangenten til grafen når $x = 100$ er 50, som betyr at når bedriften produserer 100 enheter, koster det 50 kr å produsere én ekstra enhet (antar at det er kroner, selv om det ikke står i oppgaven).

Bedriften selger varen for 60 kroner per enhet til en butikk som kjøper alt bedriften klarer å produsere.

Hvor mange enheter må bedriften produsere per dag for å få størst mulig overskudd?

Vi finner overskuddsfunksjonen ved å trekke kostnadene fra inntektene

$O(x) = I(x) - K(x)$

$O(x) = 60x - \left(0{,}1x^2 + 30x + 1000\right) = -0{,}1x^2 + 30x - 1000$

Størst mulig overskudd oppnås når $O(x)$ har sin maksimale verdi i definisjonsområdet.

Overskuddsfunksjonen er en andregradsfunksjon med negativt andregradsledd, og vi kan derfor finne et toppunkt der den deriverte er lik null.

$$O'(x) = -2\cdot 0{,}1x + 30 = -0{,}2x + 30$$

Setter $O'(x) = 0$

$$-0{,}2x + 30 = 0$$
$$0{,}2x = 30$$
$$x = 150$$

Bedriften kan forvente størst overskudd ved en produksjon av <u>150 enheter.</u>

Oppgave 3 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \quad , \quad -1 < x < 5$$

a) Bestem nullpunktene til f.

$$f(x) = 0$$

$$-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 = 0 \qquad |\cdot 3$$

$$x^2(-2x+9) = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{9}{2}}}$$

b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt på grafen til f.

Setter $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -3 \cdot \frac{2}{3}x^2 + 2 \cdot 3x = -2x^2 + 6x$$

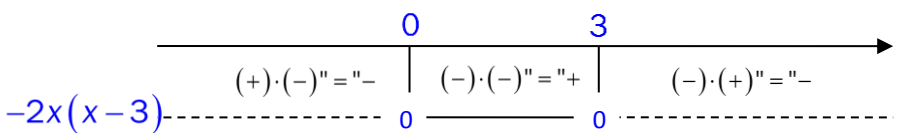
$$-2x^2 + 6x = 0$$

$$2x(-x+3) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

Faktoriseringsformelen gir $f'(x) = (-2x)(x-3)$

Vi bruker fortegnsskjema for å se når funksjonen stiger og synker. Vi tar stikkprøver for x-verdier mindre enn 0, x-verdier mellom 0 og 3 og x-verdier større enn 3.

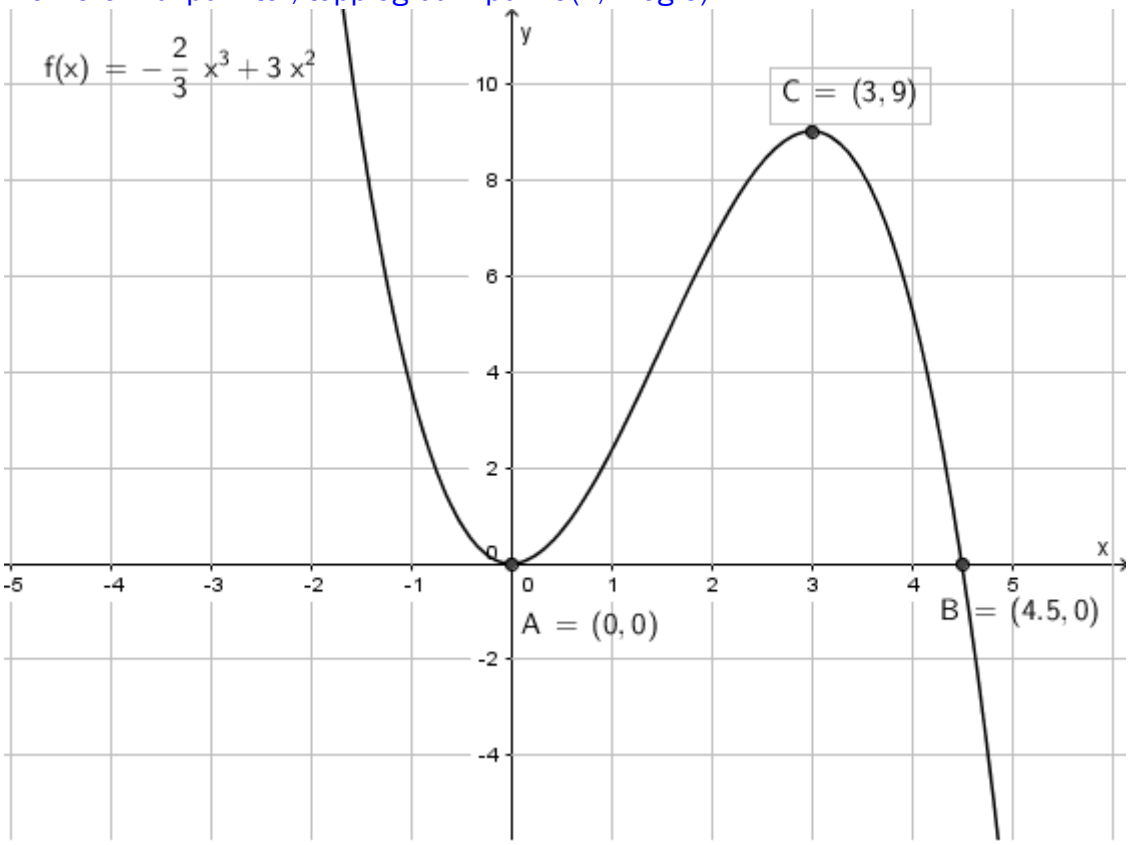


Bunnpunkt: $(0, f(0)) = \underline{\underline{(0,0)}}$

Toppunkt: $(3, f(3)) = \left(3, \left(-\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2\right)\right) = \underline{\underline{(3,9)}}$

c) Lag en skisse av grafen til f.

Markerer nullpunkter, topp og bunnpunkt (A, B og C).



Bestem likningen for linjen som tangerer grafen til f i punktet $(1, f(1))$.

Finner stigningstallet til tangenten

$f'(1) = -2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 4$

Finner $f(1) = -\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 = \frac{-2+9}{3} = \frac{7}{3}$

Bruker ettpunktsformelen

$y - y_1 = a(x - x_1)$

$y - \frac{7}{3} = 4(x - 1)$

$y = 4x - 4 + \frac{7}{3}$

$\underline{\underline{y = 4x - \frac{5}{3}}}$

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3-x^2-x+3$$

a) Bestem funksjonens gjennomsnittlige vekstfart i intervallet $[0,2]$.

Gjennomsnittlig vekstfart for funksjonen i intervallet $[0,2]$ er

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{(2^3-2^2-2+3)-(0^3-0^2-0+3)}{2}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}}$$

b) Bestem $f'(x)$ og bruk denne til å avgjøre om grafen til *f* stiger eller synker for $x=0$.

$f'(x)=3x^2-2x-1$

Jeg finner $f'(0)=3\cdot 0-2\cdot 0-1=-1$,

Når den deriverte er negativ vil det si at stigningstallet til tangenten i punktet er negativ.

<u>Grafen til funksjonen synker.</u>

c) Bestem *x*-verdien til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.

I eventuelle topp- og bunnpunkt er den deriverte lik null.

$f'(x)=0$

$3x^2-2x-1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-(-12)}}{6}=\frac{2\pm 4}{6}$$

$$x=1 \vee x=-\frac{1}{3}$$

Det betyr at $f'(x)=(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

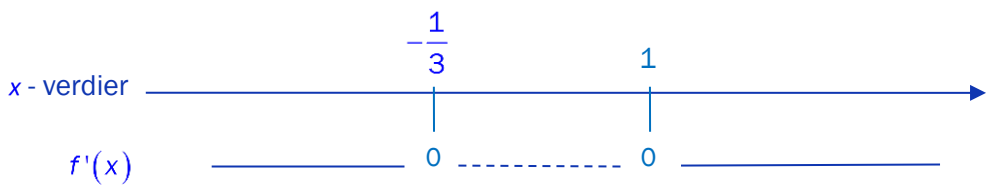
Jeg tar stikkprøver for å finne fortegnet til den deriverte i aktuelle intervall

$f'(-1)=3(-1)^2-2(-1)-1=4$ positivt

$f'(0)=3(0)^2-2(0)-1=-1$ negativt

$f'(2)=3(2)^2-2(2)-1=7$ positiv

Jeg lager fortegnslinje



Grafen stiger for $x<-\frac{1}{3}$, grafen synker for $-\frac{1}{3}<x<1$ og grafen stiger for $x>1$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)+3=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+3=\frac{-1-3+9+81}{27}=\frac{86}{27}=3\frac{5}{27}$$

Grafen har toppunkt i $\left(-\frac{1}{3},f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\underline{\underline{\left(-\frac{1}{3},3\frac{5}{27}\right)}}$

$f(1)=1^3-1^2-1+3=2$

Grafen har bunnpunkt i $(1,f(1))=\underline{\underline{(1,2)}}$

Oppgave 5 (4 poeng)

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x)=\frac{2x-3}{x+1} \quad , \quad x\neq -1$$

a) Bestem grafens skjæringspunkter med koordinataksene.

Grafen skjærer x-aksen når $g(x)=0$

$$\frac{2x-3}{x+1}=0$$
$$2x-3=0$$
$$2x=3$$
$$x=\frac{2}{3}$$

Grafens skjæring med x-aksen er $\underline{\underline{\left(\frac{2}{3},0\right)}}$

Grafen skjærer y-aksen for $x=0$

$$g(0)=\frac{2\cdot 0-3}{0+1}=-3$$

Grafens skjæring med y-aksen er $\underline{\underline{(0,-3)}}$

b) Lag en skisse av grafen til g med eventuelle asymptoter i et koordinatsystem.

Horisontal asymptote finner jeg ved å finne grenseverdien når x blir uendelig stor eller uendelig liten.

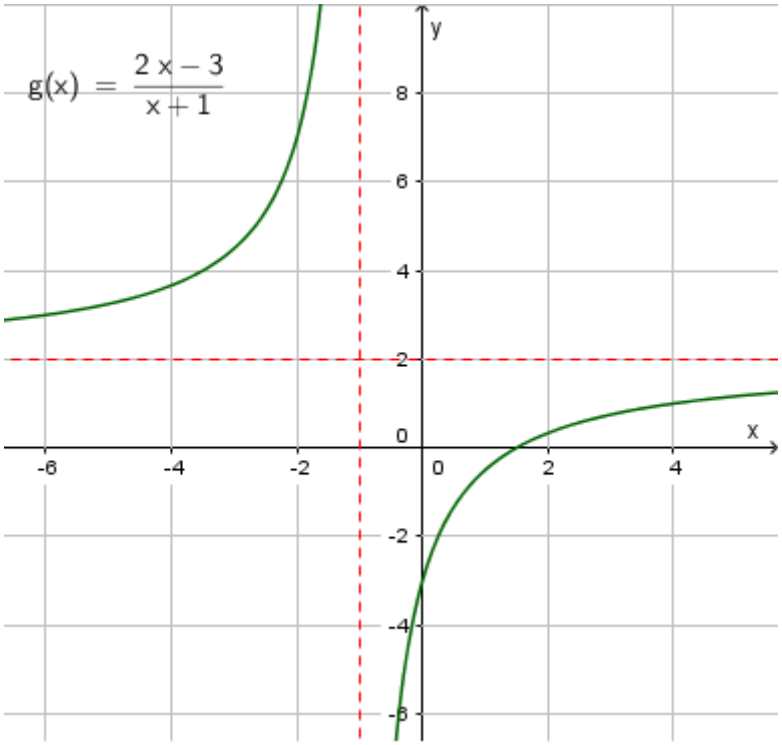
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=2$$

<u>Horisontal asymptote er i $y=2$.</u>

Vertikal asymptote finner jeg ved å sette nevnere lik null.

$x+1=0$

$x=-1$ er vertikal asymptote



Oppgave 6 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$f(x)=x^3-6x^2+9x-4, \quad D_f=\square$

a) Bestem $f'(x)$.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-4$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Setter $f'(x)=0$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2}$

$x = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

$x = 3 \vee x = 1$

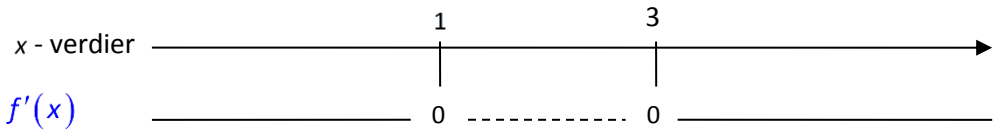
Vi vet nå at uttrykket $3x^2 - 12x + 9$ er lik null når $x = 3$ og når $x = 1$. Det er bare for disse verdiene av x at andregradsuttrykket skifter fortegn. Vi tar stikkprøve for x - verdier mindre enn 1, x - verdier mellom 1 og 3 og for x - verdier større enn 3.

Vi bruker det faktoriserte uttrykket når vi tar stikkprøvene.

$3x^2 - 12x + 9 = (x-1)(x-3)$

Vi setter inn $x = 0$ og finner:	$(0-1)(0-3)" = "(-)\cdot(-)$	positivt
Vi setter inn $x = 2$ og finner:	$(2-1)(2-3)" = "(+)\cdot(-)$	negativt
Vi setter inn $x = 4$ og finner:	$(4-1)(4-3)" = "(+)\cdot(+)$	positivt

Vi kan da sette opp fortegnslinjen



Toppunkt: $(1, f(1)) = \underline{\underline{(1,0)}}$ Bunnpunkt: $(3, f(3)) = \underline{\underline{(3,-4)}}$

c) Bestem likningen til tangenten til grafen i punktet $(0, f(0))$.

$(0, f(0)) = (0, -4)$

Stigningtallet til tangenten er lik den deriverte i tangeringspunktet:

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9$

Bruker ettpunktsformelen:

$y - y_1 = a(x - x_1)$

$y - (-4) = 9(x - 0)$

$y + 4 = 9x$

$\underline{\underline{y = 9x - 4}}$

d) Grafen til f har en annen tangent som er parallell med tangenten du fant i oppgave c). Bestem tangeringspunktet for denne tangenten.

$f'(x)=9$

$3x^2-12x+9=9$

$3x^2-12x=0$

$3x(x-4)=0$

$x=0 \vee x=4$

Tangeringspunktet til tangenten er i punktet $(4,f(4))=\underline{\underline{(4,0)}}$

Oppgave 7 (3 poeng)

En bedrift regner med at kostnadene i kroner ved å produsere x enheter av en vare per dag er gitt ved

$$K(x)=0{,}25x^2+100x+5000 \ , \ x\in[0,400]$$

Bedriften selger alle varene de produserer for 200 kroner per enhet.

a) Forklar at overskuddet O per dag er gitt ved

$O(x)=-0{,}25x^2+100x-5000$

Overskudd er inntekt minus kostnader:

$O(x)=I(x)-K(x)$

$O(x)=200x-(0{,}25x^2+100x+5000)$

$O(x)=-0{,}25x^2+100x-5000$

Bestem den produksjonsmengden som gir størst overskudd per dag. Hva blir det største overskuddet?

Størst mulig overskudd oppnås når funksjonen har toppunkt.

$O(x)=-0{,}25x^2+100x-5000$

$O'(x)=-0{,}5x+100$

$O'(x)=0$

$-0{,}5x+100=0$

$x=200$

$O(200)=-0{,}25\cdot 200^2+100\cdot 200-5000=-10000+20000-5000=5000$

Andregradsleddet er negativt, derfor har overskuddsfunksjonen et toppunkt.

<u>Størst overskudd oppnås ved produksjon av 200 enheter, da er overskuddet 5000 kr.</u>

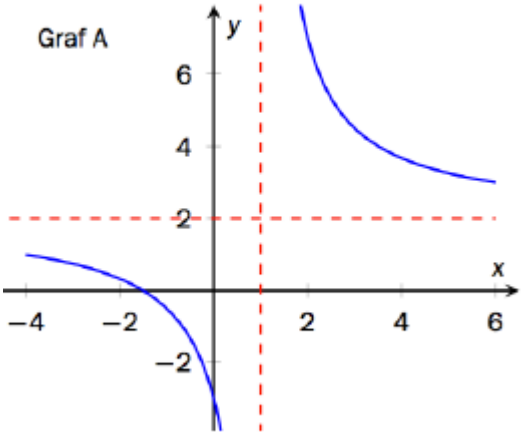
Oppgave 8 (4 poeng)

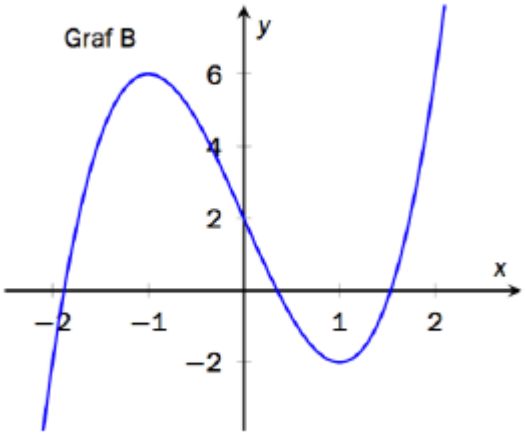
Funksjonene f, g, h og k er gitt ved

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2 \qquad h(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{x+3}{x-1} \qquad k(x) = 2x^3 - 6x + 2$$

På figuren nedenfor er det tegnet grafen av to av disse funksjonene.





a) Hvilken funksjon gir graf A? Begrunn svaret.

Graf A er en rasjonal funksjon med vertikal asymptote i $x = 1$. Dette stemmer for $g(x)$ og $h(x)$. Horisontal asymptote er i $x = 2$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x-1} \approx \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+3}{x-1} \approx \frac{2x}{x} = 2$$

Graf A tilhører funksjonen $h(x)$.

b) Hvilken funksjon gir graf B? Begrunn svaret.

Graf B er en polynomfunksjon av 3. grad med toppunkt for $x=-1$ og bunnpunkt for $x=1$.
Sjekker de to funksjonene med å derivere og sette den deriverte lik null.

$f(x)=x^3+x^2-2x+2$

$f'(x)=3x^2+2x-2$

$f'(x)=0$

$3x^2+2x-2=0$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{6}$

$x\neq1$

$k(x)=2x^3-6x+2$

$k'(x)=6x^2-6$

$k'(x)=0$

$6x^2-6=0$

$6(x^2-1)=0$

$x^2=1$

$x=1\vee x=-1$

Graf B tilhører funksjonen $k(x)$.

Oppgave 9 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2+2,\qquad D_f=\square$$

d) Bestem $f'(x)$.

$$f'(x)=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^2+2x=\underline{\underline{-2x^2+2x}}$$

e) Bruk den deriverte til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Setter uttrykket for deriverte lik null.

$-2x^2+2x=0$

$2x(-x+1)=0$

$x=0\vee x=1$

Vi vet nå at uttrykket $2x(-x+1)$ er lik null når $x=0$ og når $x=1$. Det er bare for disse verdiene av x at uttrykket kan skifte fortegn. Vi tar stikkprøver for x - verdier mindre enn 0, x - verdier mellom 0 og 1 og for x - verdier større enn 1.

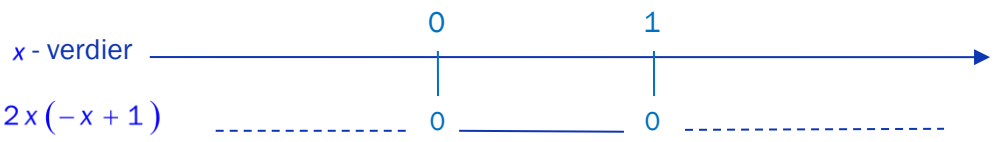
$2x(-x+1)$

Vi setter inn $x=-1$ og finner: $2(-1)(-(-1)+1)$"="$(-)(+)$negativ

Vi setter inn $x=\frac{1}{2}$ og finner: $2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)$"="$(+)(+)$positiv

Vi setter inn $x=2$ og finner: $2(2)(-2+1)$"="$(+)(-)$negativ

Vi kan da sette opp fortegnslinja



Grafen til funksjonen synker i intervallene $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ og $\langle 1, \rightarrow \rangle$ og stiger i intervallet $\langle 0,1 \rangle$.
Det betyr at $x = 0$ er et minimalpunkt og $x = 1$ er et maksimalpunkt.
Bunnpunkt $(0, f(0)) = \underline{\underline{(0,2)}}$

Toppunkt $(1, f(1)) = \left(1, \left(-\frac{2}{3} + 1 + 2\right)\right) = \underline{\underline{\left(1, \frac{7}{3}\right)}}$

f) Regn ut $f(3)$. Forklar ved hjelp av det du fant i oppgave b), at f bare har ett nullpunkt.

$$f(3) = -\frac{2}{3}3^3 + 3^2 + 2 = -18 + 9 + 2 = \underline{\underline{-7}}$$

Grafen av funksjonen er kontinuerlig i definisjonsområdet. Funksjonen har ingen nullpunkt i intervallet $\langle \leftarrow, 0 \rangle$ fordi grafen av funksjonen synker i dette intervallet mot bunnpunktet, som har positiv y-verdi, og grafen krysser ikke x-aksen. I intervallet $\langle 0,1 \rangle$ stiger funksjonsverdien fra 2 til $\frac{7}{3}$ og vil dermed heller ikke krysse x-aksen. I intervallet $\langle 1, \rightarrow \rangle$ synker funksjonen, og vil dermed krysse x-linja en gang, og vi har derfor bare et nullpunkt.

Oppgave 10 (5 poeng)

En bedrift produserer x enheter av en vare. Enhetskostnaden $E(x)$ kroner per produsert enhet er gitt ved

$$E(x) = 4x + 1200 + \frac{20000}{x} \quad , \quad x > 0$$

a) Hvor stor er enhetskostnaden dersom bedriften produserer 200 enheter av varen? Hva blir da den samlede produksjonskostnaden?

$$E(200) = 4 \cdot 200 + 1200 + \frac{20000}{200} = 800 + 1200 + 100 = 2100$$

Enhetskostnaden ved produksjon av 200 varer er <u>2100 kr</u>

Samlet produksjonskostnad er $200 \cdot 2100 \text{ kr} = \underline{\underline{420000 \text{ kr}}}$

Bedriften har inngått en avtale der de får solgt alt de produserer, for 2000 kroner per enhet.

b) Forklar at bedriftens overskudd O når det produseres x enheter, er gitt ved

$$O(x) = -4x^2 + 800x - 20000$$

Overskudd = Inntekt – kostnad

$$O(x) = 2000x - E(x) \cdot x = 2000x - \left(4x + 1200 + \frac{20000}{x}\right) \cdot x = 2000x - 4x^2 - 1200x - 20000$$

$$= -4x^2 + 800x - 20000$$

c) Hvilken produksjonsmengde gir størst overskudd?

Størst overskudd finner vi ved x-verdien til toppunktet av andregradsfunksjonen $O(x)$, som vender sin hule side ned pga. negativ koeffisient foran andregradsleddet.

Vi finner symmetriaksen ved $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-800}{-8} = 100$

En produksjonsmengde på <u>100 enheter</u> vil gi det største overskuddet.

Oppgave 11 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3-x \quad , \quad D_f=\square$$

Bruk definisjonen til den deriverte til å vise at $f'(x)=3x^2-1$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-\left(x^3-x\right)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)(x+\Delta x)-x-\Delta x-x^3+x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+2x^2\Delta x+x(\Delta x)^2+x^2\Delta x-2x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x-\Delta x-x^3+x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x-x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}\left(3x^2-x\Delta x+(\Delta x)^2-1\right)}{\cancel{\Delta x}}=\underline{\underline{3x^2-1}}$$

Oppgave 12 (4 poeng)

En rasjonal funksjon f er gitt ved

$$f(x)=\frac{ax+b}{x-1} \quad , \qquad D_f=\square\setminus\{1\}$$

Grafen til f skjærer $x-$aksen i $x=3$ og $y-$aksen i $y=6$.

a) Bestem a og b.

$$f(0)=\frac{a\cdot 0+b}{0-1}=6 \quad\Rightarrow\quad \frac{b}{-1}=6 \quad\Rightarrow\quad b=\underline{\underline{-6}}$$

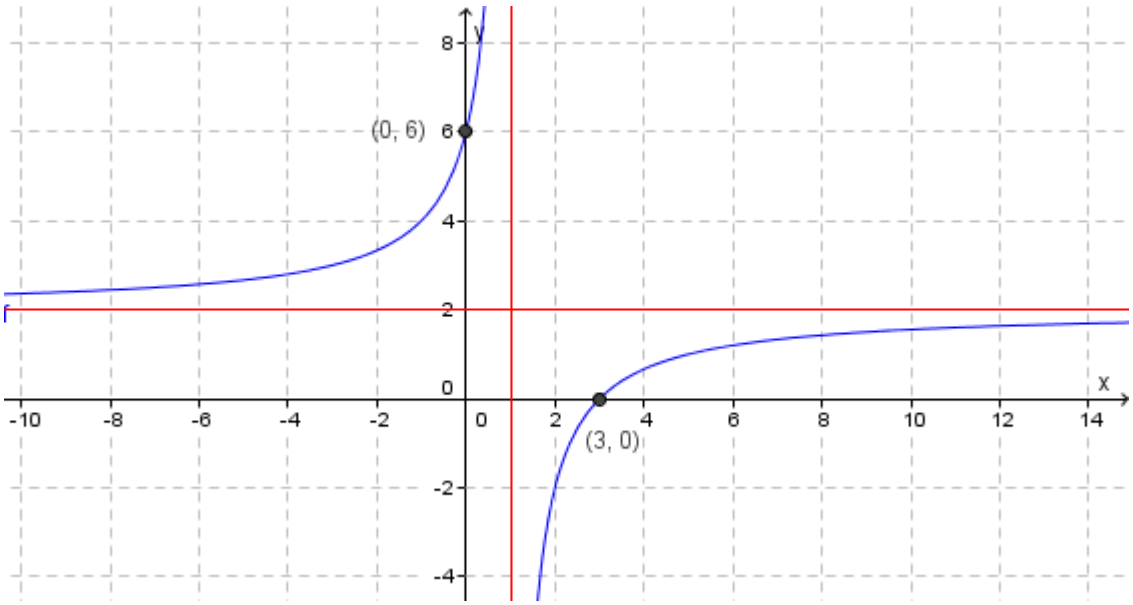
$$f(3)=\frac{a\cdot 3+(-6)}{3-1}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{3a-6}{3-1}=0 \quad\Rightarrow\quad 3a-6=0 \quad\Rightarrow\quad a=\underline{\underline{2}}$$

b) Tegn grafen til f.

$$f(x)=\frac{2x-6}{x-1} \quad , \qquad D_f=\square\setminus\{1\}$$

Grafen til funksjonen har loddrett asymptote for $x=1$. Funksjonen går mot 2 når x går mot

pluss eller minus uendelig.



Oppgave 13 (5 poeng)

En bedrift produserer x enheter av en vare. Kostnadene K (i kroner) er gitt ved

$$K(x) = 0{,}1x^2 - 10x + 20000$$

Inntektene I (i kroner) er gitt ved

$$I(x) = p \cdot x$$

Der p er salgsprisen per enhet for varen.

a) Vis at overskuddet O er gitt ved

$$O(x) = -0{,}1x^2 + (10+p)x - 20000$$

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ &= p \cdot x - \left(0{,}1x^2 - 10x + 20000\right) \\ &= p \cdot x - 0{,}1x^2 + 10x - 20000 \\ &= -0{,}1x^2 + (10+p)x - 20000 \end{aligned}$$

b) Hvilken produksjonsmengde gir størst overskudd dersom $p=140$?

For $p=140$ er $O(x)=-0{,}1x^2+(10+140)x-20000=-0{,}1x^2+150x-20000$

Jeg deriverer overskuddsfunksjonen

$O'(x)=-0{,}2x+150$

$O'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad -0{,}2x+150=0 \quad \Rightarrow \quad x=750$

$O'(100)=-20+150=130$ (Positivt) $\quad O'(1000)=-200+150=-50$ (Negativt)

Med en pris per enhet på 140 er overskuddet størst når det produseres 750 enheter.

c) For en bestemt salgspris p er overskuddet størst når bedriften produserer og selger 2000 enheter. Hva er denne salgsprisen p ?

$O(x)=-0{,}1x^2+(10+p)x-20000$

$O'(x)=-0{,}2x+(10+p)$

$O'(2000)=0 \quad \Rightarrow \quad -0{,}2\cdot 2000+(10+p)=0 \quad \Rightarrow p=400-10=\underline{\underline{390}}$

En salgspris på 390 gir størst overskudd.

Oppgave 14 (2 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=x^2+2x \quad , \qquad D_f=\square$$

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x)=2x+2$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-(x^2+2x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2\cdot x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+2x+2\cdot\Delta x-x^2-2x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+2\cdot\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2\cdot x+\Delta x+2)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+2+\Delta x)$$

$$\underline{\underline{=2x+2}}$$

Oppgave 15 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=3x^2-3x+1 \qquad , \qquad D_f=\square$$

Bestem $f'(2)$.

$f(x)=3x^2-3x+1$

$f'(x)=6x-3$

$f'(2)=6\cdot 2-3=\underline{\underline{9}}$

Oppgave 16 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=2x^3-6x^2 \qquad , \qquad D_f=\square$$

a) Bestem nullpunktene til f.

$f(x)=0 \iff 2x^3-6x^2=0 \iff 2x^2(x-3)=0 \iff x=\underline{\underline{0}} \vee x=\underline{\underline{3}}$

Nullpunktene til funksjonen er 0 og 3.

b) Bruk $f'(x)$ til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

$f(x)=2x^3-6x^2$

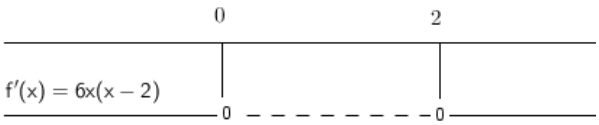
$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

Jeg ser av uttrykket at den deriverte er null for $x=0$ og $x=2$. Jeg tar stikkprøver og sjekker fortegnet til den deriverte for $x-$verdier mindre enn 0, mellom 0 og 2 og større enn 2.

$f'(-1)=6\cdot(-1)(-1-2)>0$

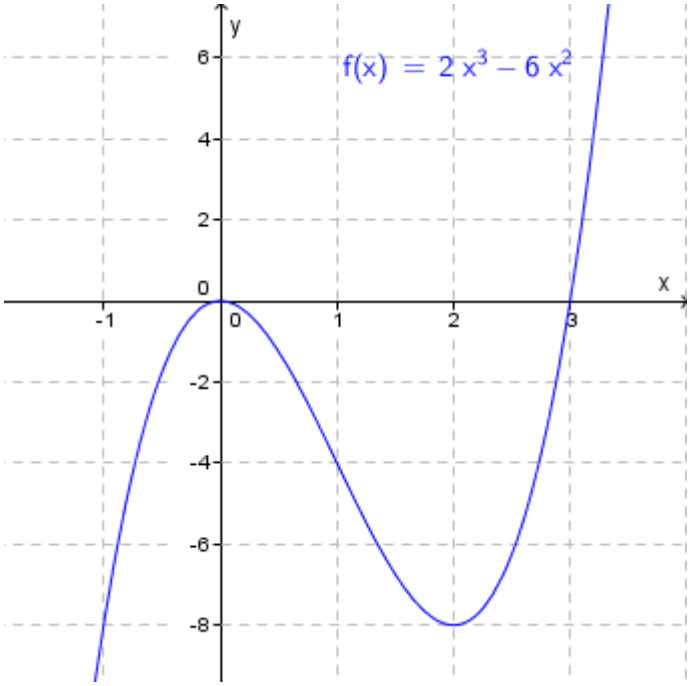
$f'(1)=6\cdot(1)(1-2)<0$

$f'(3)=6\cdot(3)(3-2)>0$



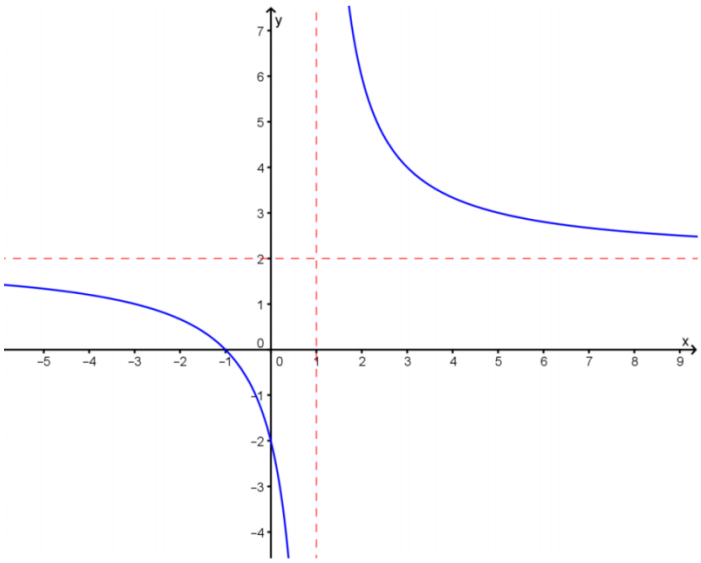
Grafen har toppunkt $(0,f(0))=\underline{\underline{(0,0)}}$ og bunnpunkt $(2,f(2))=\underline{\underline{(2,-8)}}$

c) Lag en skisse av grafen til f.



Oppgave 17 (2 poeng)

Grafen til funksjonen $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ er tegnet nedenfor.



Bruk figuren til å bestemme verdiene til a, b og c.

Grafen til funksjonen har loddrett asymptote for $x=1$. For denne $x-$verdi er nevneren lik null. Det vil si at $c\cdot 1-1=0 \;\Rightarrow\; c=\underline{\underline{1}}$.

Funksjonen går mot 2 når x går mot uendelig. Funksjonsuttrykket går mot $\dfrac{a}{c}$ når x går mot uendelig. Da er $\dfrac{a}{c}=2 \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{1}=2 \;\Rightarrow\; a=\underline{\underline{2}}$

Grafen viser at $f(-1)=0$. Da er

$$\frac{a\cdot(-1)+b}{c\cdot(-1)-1}=0 \;\Rightarrow\; \frac{2\cdot(-1)+b}{1\cdot(-1)-1}=0 \;\Rightarrow\; \frac{-2+b}{-1-1}=0 \;\Rightarrow\; -2+b=0 \;\Rightarrow\; b=\underline{\underline{2}}$$

Oppgave 18 (1 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=x^2 \qquad , \qquad D_f=\square$$

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x)=2x$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2\cdot x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2\cdot x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$$

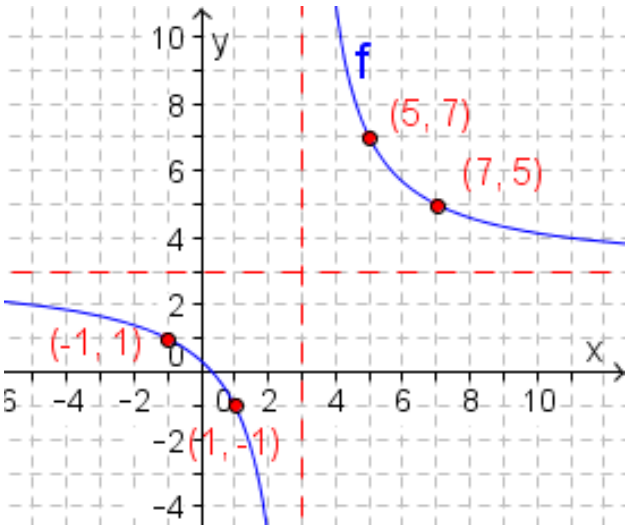
$$=2x$$

Oppgave 19 (3 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{3x-1}{x-3}$$

a) Lag en skisse av grafen til f.



b) Bestem gjennomsnittlig veksthastighet for funksjonen fra $x=4$ til $x=7$.

$$\text{Gjennomsnittlig veksthastighet}=\frac{f(7)-f(4)}{7-4}=\frac{\frac{3\cdot 7-1}{7-3}-\frac{3\cdot 4-1}{4-3}}{3}=\frac{\frac{20}{4}-\frac{11}{1}}{3}=\frac{5-11}{3}=\underline{\underline{-2}}$$

Oppgave 20 (3 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2-12x+1$$

a) Bestem $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot 3x^2+2x-12$$

$$f'(x)=\underline{\underline{2x^2+2x-12=2\left(x^2+x-6\right)}}$$

b) Tegn fortegnslinjen til $f'(x)$. Bruk denne til å avgjøre hvor grafen til f stiger, og hvor den synker.

Vi setter $f'(x)=0$

$$f'(x)=2x^2+2x-12=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+x-6=0$$

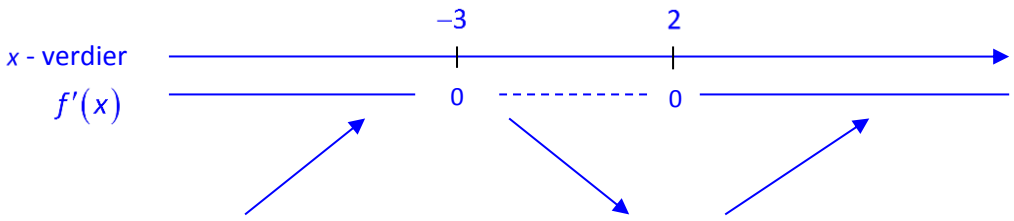
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$

$$x=-3 \quad \vee \quad x=2$$

Det er bare i nullpunktene at uttrykket for den deriverte kan skifte fortegn. Vi velger derfor tilfeldige verdier i hvert av de aktuelle intervallene $\langle\leftarrow,-3\rangle$, $\langle -3,2\rangle$ og $\langle 2,\rightarrow\rangle$ for å se om uttrykket er positivt eller negativt

$$f'(-4)=2\cdot(-4+3)\cdot(-4-2)=2\cdot(-1)\cdot(-6)>0$$
$$f'(0)=2\cdot(0+3)\cdot(0-2)=2\cdot(3)\cdot(-2)<0$$
$$f'(3)=2\cdot(3+3)\cdot(3-2)=2\cdot(6)\cdot(1)>0$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Vi ser av fortegnslinjen at

$\underline{\underline{\text{Grafen stiger for } x\in\langle\leftarrow,-3\rangle \text{ og i } x\in\langle 2,\rightarrow\rangle\text{. Grafen synker for } x\in\langle -3,2\rangle}}$

Oppgave 21 (4 poeng)

Vi har gitt funksjonen

$$f(x)=x^3-3x$$

a) Bestem eventuelle null-, topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Jeg finner eventuelle nullpunkter ved å sette $f(x)=0$

$$x^3-3x=0$$
$$x(x^2-3)=0$$
$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$$
$$x=\underline{\underline{0}} \ \vee \ x=\underline{\underline{\sqrt{3}}} \ \vee \ x=\underline{\underline{-\sqrt{3}}}$$

Jeg finner eventuelle topp- og bunnpunkter ved å sette $f'(x)=3x^2-3=0$

$$3x^2-3=0$$
$$x^2-1=0$$
$$(x+1)(x-1)=0$$
$$x=\underline{-1} \ \vee \ x=\underline{1}$$

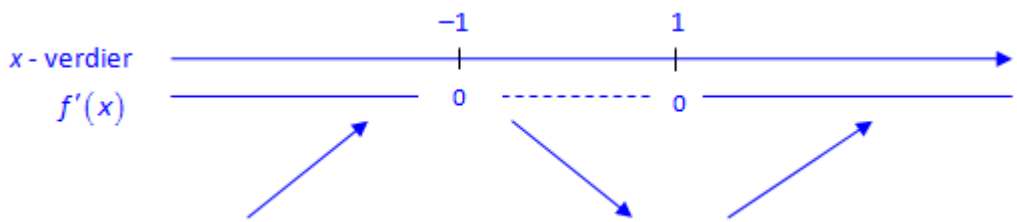
Jeg regner så ut noen verdier for den deriverte for $x<-1$, for $-1<x<1$ og for $x>1$.

$f'(-2)=3\cdot(-2)^2-3=9 \ \Rightarrow \ f(x)$ vokser når $x<-1$

$f'(0)=3\cdot(0)^2-3=-3 \ \Rightarrow \ f(x)$ avtar når $-1<x<1$

$f'(2)=3\cdot(2)^2-3=9 \ \Rightarrow \ f(x)$ vokser når $x>1$

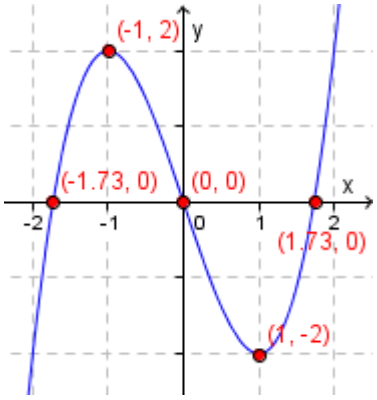
Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Det betyr at f har toppunkt $(-1,f(-1))=(-1,(-1)^3-3(-1))=\underline{\underline{(-1,2)}}$

og at f har bunnpunkt $(1,f(1))=(1,1^3-3\cdot 1)=\underline{\underline{(1,-2)}}$

b) Lag en skisse av grafen til f.



Oppgave 22 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=2x^2+1$$

Vis at $f'(x)=4x$ ved å bruke definisjonen av den deriverte.

$$f(x)=2x^2+1$$
$$f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^2+1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^2+1-(2x^2+1)}{\Delta x}$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\left(x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)+1-2x^2-1}{\Delta x}$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^2+4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2+1-2x^2-1}{\Delta x}$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^2+4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2+1-2x^2-1}{\Delta x}$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(4x\cdot+2\cdot\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(4x\cdot+2\cdot\Delta x)$$
$$f'(x)=\underline{\underline{4x}}$$

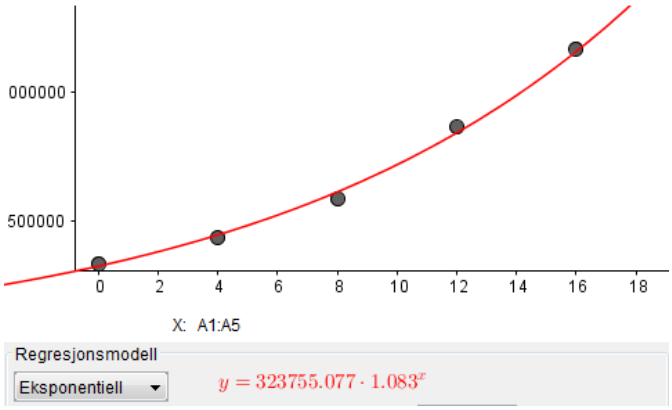
DEL 2

Oppgave 23 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser produksjonen av norsk oppdrettslaks i noen år fra 1997 til 2013.

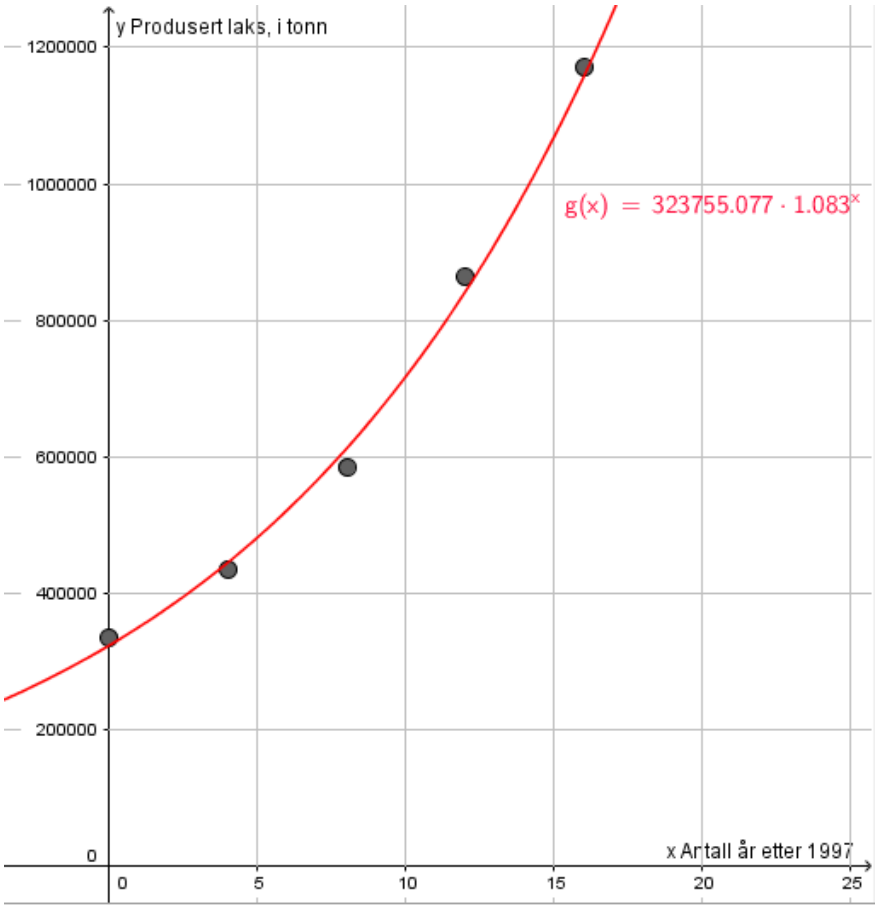
Årstall	1997	2001	2005	2009	2013
Produsert laks, i tonn (t)	335 000	435 000	585 000	863 000	1 170 000

a) La x være antall år etter 1997. Framstill tallene i tabellen ovenfor i et koordinatsystem. Bestem en eksponentiell modell som passer bra med tallene i tabellen.
Hvor mange prosent vokser produksjonen per år?
La verdiene inn i regneark i GeoGebra, og velger regresjonsanalyse med eksponentiell modell.



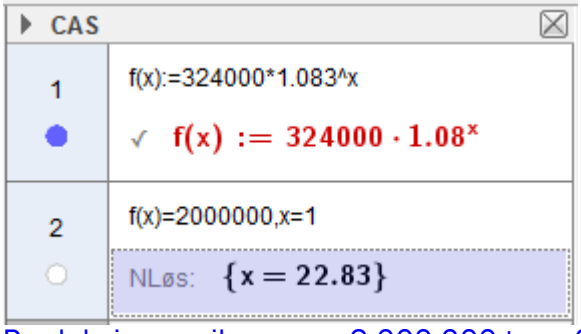
Regresjonen gir modellen $f(x) = 323755 \cdot 1{,}083^x$ som gir en årlig vekst på

$(1{,}083 - 1) \cdot 100\% = \underline{\underline{8{,}3\%}}$



I resten av oppgaven vil vi bruke modellen $f(x) = 324000 \cdot 1{,}083^x$

b) Når vil produksjonen passere 2 000 000 t?
Definerer funksjonen i GeoGebra, og løser likningen



Produksjonen vil passere 2 000 000 tonn 22,8 år etter 1997, det vil si helt på slutten av 2019.

c) Når vil produksjonsveksten for første gang være større enn 100 000 t per år?
Deriverer funksjonen i GeoGebra, og løser likningen

3	f(x) Derivert: $324000\left(\frac{1083}{1000}\right)^x \ln\left(\frac{1083}{1000}\right)$
4	f(x)=100000 NLøs: $\{x = 16.97\}$

Produksjonsveksten vil først være større enn 100 000 t per år etter omtrent 17 år, det vil si i årsskiftet 2013/2014.

Oppgave 24 (6 poeng)

Salgsprisen P i kroner per kilogram for et bestemt fiskeslag er gitt ved

$$P(x) = 0{,}5x^2 - 10x + 60 \quad , \quad 0 \le x \le 8$$

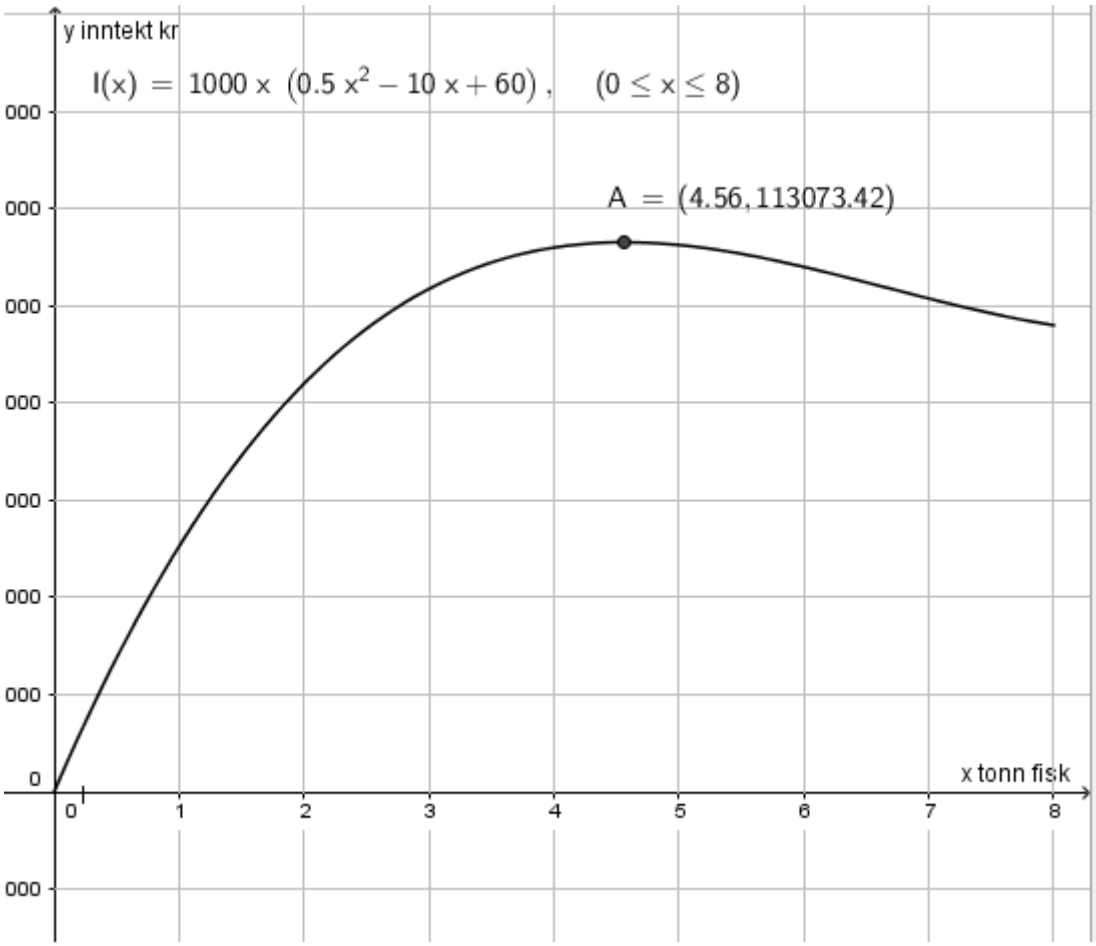
Der x er antall tonn fisk som selges per uke.

a) Forklar at den totale inntekten I fra fiskesalget en uke er gitt ved

$$I(x) = 1000 \cdot x \cdot P(x)$$

Den totale inntekten er antall tonn som selges, x, multiplisert med salgsprisen i kroner per kg, $P(x)$, multiplisert med 1000 for å få salgsprisen per tonn.

b) Bruk graftegner til å bestemme hvilken fiskemengde som gir størst inntekt.
Hvor stor er inntekten da?
Tegner grafen av funksjonen med kommandoen «Funksjon, Start, Slutt», og finner toppunktet A med kommandoen «Ekstremalpunkt».



Størst inntekt oppnås ved salg av 4,56 tonn fisk, inntekten er da ca. 113 073 kr.

En annen modell F for prisen per kilogram er gitt ved

$$F(x) = 0{,}5x^2 - ax + 60 \quad , \quad 0 \le x \le 8$$

der a er et positivt tall.

For en bestemt verdi av a blir inntektene størst når det selges 3t.

c) Bruk CAS til å bestemme denne verdien av a.
Finner funksjonen for inntekten på samme måte som i a). Deriverer funksjonen i CAS. Vi vet at det er størst inntekt når $x = 3$, setter derfor den deriverte lik null i dette punktet for å finne a. Sjekker at grafen har toppunkt ved å se om x- verdier mindre enn 3 gir positiv funksjonsverdi for den deriverte funksjonen, og x- verdier større enn 3 gir negativ funksjonsverdi for den deriverte funksjonen.

CAS

1	I(x):=1000*x*(1/2x^2-a*x+60) → $I(x) := 1000\,x\left(\frac{1}{2}\,x^2 - a\,x + 60\right)$
2	I'(3) = 0 Løs: $\left\{a = \frac{49}{4}\right\}$
3	ByttUt[I, a, 49/4] → $500\,x^3 - 12250\,x^2 + 60000\,x$
4	i(x):=500x³ - 12250x² + 60000x → $i(x) := 500\,x^3 - 12250\,x^2 + 60000\,x$
5	i'(2) → 17000
6	i'(3.5) → -7375

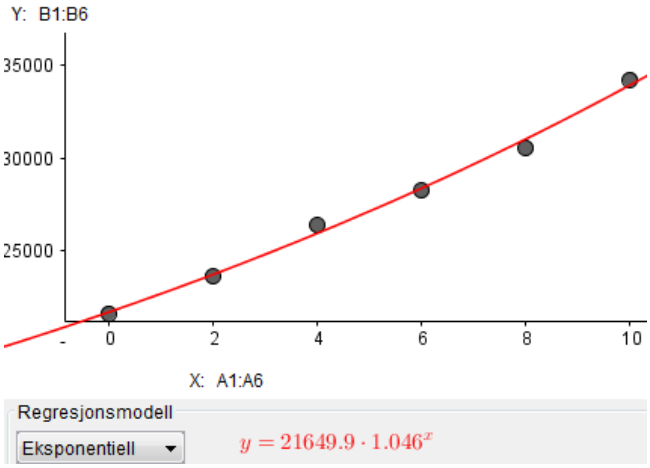
For å få størst inntekt når $x = 3$, må $\underline{\underline{a = \frac{49}{4}}}$.

Oppgave 25 (8 poeng)

Tabellen nedenfor viser gjennomsnittlig månedslønn for heltidsansatte norske arbeidstakere i
noen år i tidsrommet 1998 - 2008.

Årstall	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Gjennomsnittlig månedslønn	21 600	23 600	26 350	28 250	30 550	34 250

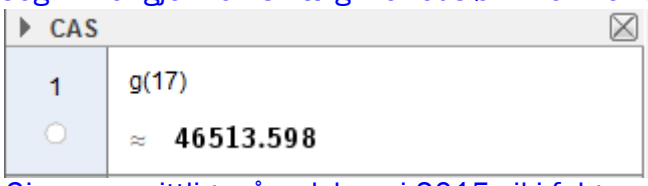
a) Bruk regresjon til å finne en eksponentialfunksjon som beskriver månedslønnen som funksjon av antall år etter 1998. Hva er den årlige prosentvise lønnsveksten ifølge denne modellen?
Jeg bruker regresjonsanalyse i GeoGebra, setter 1998 som $x = 0$, og velger eksponentiell modell



En eksponentiell funksjon som modell for gjennomsnittlig månedslønn er gitt ved $g(x) = 21649{,}9 \cdot 1{,}046^x$

Den prosentvise årlige endringen er i følge modellen 4,6 %.

b) Hva blir gjennomsnittlig månedslønnen i 2015 ifølge denne modellen?
Jeg finner gjennomsnittlig månedslønn i år 2015 når $x = 17$

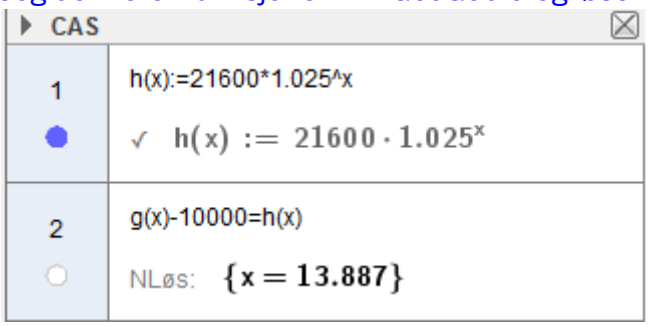


Gjennomsnittlig månedslønn i 2015 vil i følge modellen være omtrent 46 500 kroner.

Prisene på varer og tjenester har økt med ca. 2,5 % per år de siste tiårene.

c) Lag en modell for den gjennomsnittlige månedslønnen *x* år etter 1998 dersom lønnen følger prisutviklingen.
Om prisveksten skal være 2,5 % får vi en vekstfaktor på 1,025 og en startverdi på 21600. En modell for situasjonen kan være funksjonen $h(x) = 21600 \cdot 1{,}025^x$.

d) I hvilket år ville modellen i oppgave a) ha gitt en gjennomsnittlig månedslønn som er 10 000 kroner høyere enn den gjennomsnittlige månedslønnen i modellen i oppgave c)?
Jeg definerer funksjonen h i GeoGebra og løser likningen

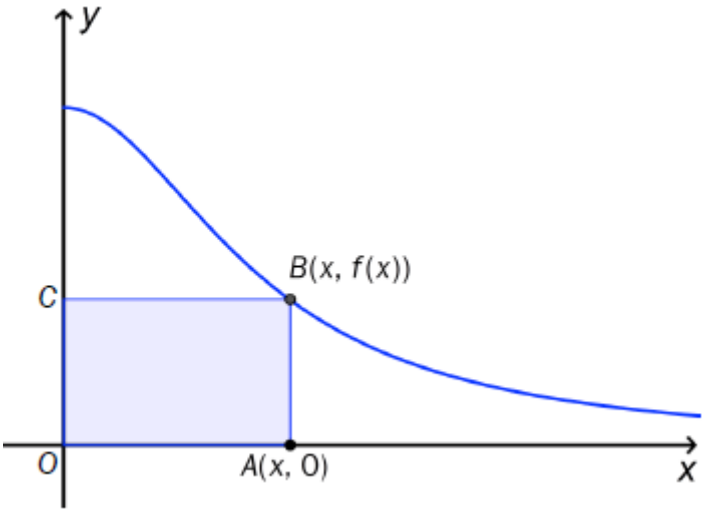


På slutten av 2011, vil modellen i a) gi 10 000 kroner høyere gjennomsnittslønn enn modellen i c).

Oppgave 26 (5 poeng)

På figuren nedenfor ser du grafen til funksjonen *f* gitt ved

$$f(x)=\frac{5}{x^2+2},\quad x>0$$



Rektangelet *OABC* er laget slik at *B* ligger på grafen til *f*.

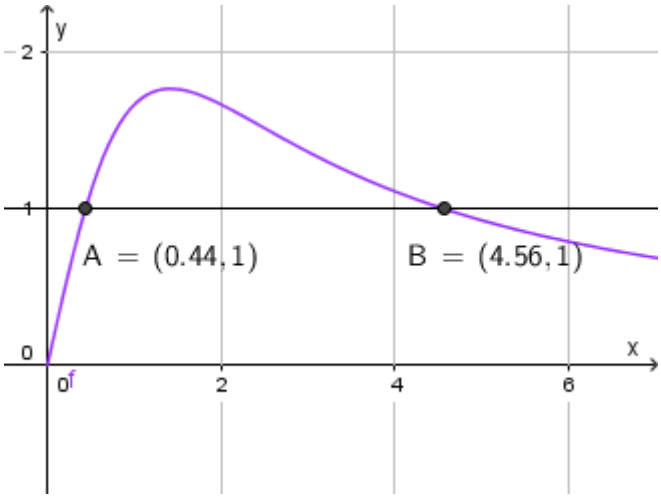
a) Vis at arealet *F* til rektangelet kan skrives som

$$F(x)=\frac{5x}{x^2+2}$$

Areal av et rektangel er lengde multiplisert med høyde. Lengden er x og høyden er f(x).

$$A=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{5}{x^2+2}=\frac{5x}{x^2+2}$$

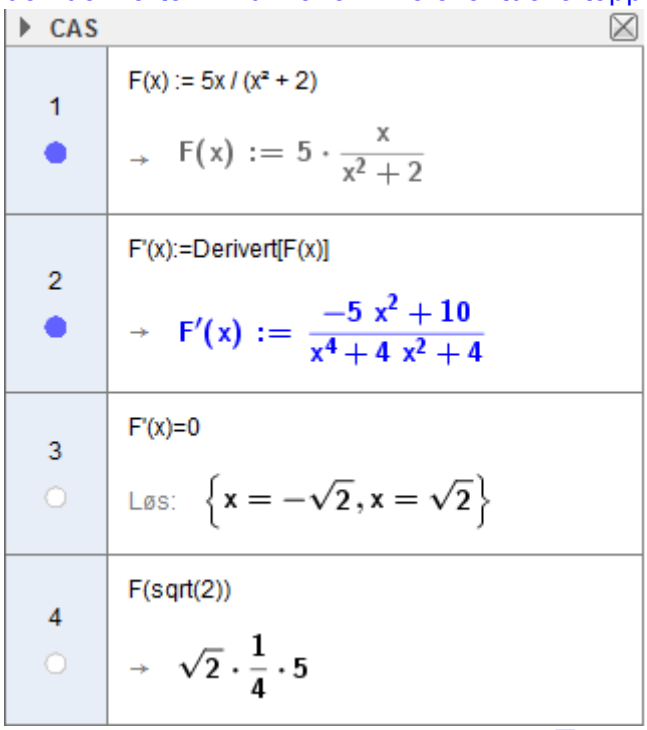
b) Bruk graftegner til å bestemme *x* slik at rektangelet får areal lik 1,0.
Jeg tegnet grafen til $F(x)$ i GeoGebra sammen med linjen $y=1{,}0$, Deretter valgte jeg kommandoen «Skjæring mellom to objekt» og fant de to punktene A og B.



Arealet er lik 1,0 når $x = 0{,}44$ og $x = 4{,}56$.

c) Bruk CAS til å bestemme eksakt *x*-verdi når rektangelet har størst mulig areal. Bestem det største arealet.

Jeg bruker CAS i GeoGebra til å derivere funksjonen for arealet, *F*(*x*). Setter deretter den deriverte lik null for å finne eventuelle topp og bunnpunkter.



Funksjonen har ekstremalpunkt for $x = \sqrt{2}$. Jeg kan se bort fra den negative løsningen fordi funksjonen bare er definert for positive tall. Jeg ser også av grafen i b) at dette er et toppunkt.

Det største mulige arealet er $F\left(\sqrt{2}\right) = \frac{5}{4}\sqrt{2}$

Oppgave 27 (6 poeng)

En bedrift produserer en bestemt vare. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall produserte enheter av varen per uke og de totale kostnadene.

Antall produserte enheter per uke, x	80	120	170	330	420	700
Totale kostnader i kroner, $K(x)$	27 000	31 000	36 500	59 000	74 500	137 000

a) Bestem en andregradsfunksjon K som med god tilnærming kan brukes til å beregne kostnadene $K(x)$. Hva blir kostnadene i en uke der det produseres 220 enheter?

La verdiene fra tabellen inn i regneark GeoGebra

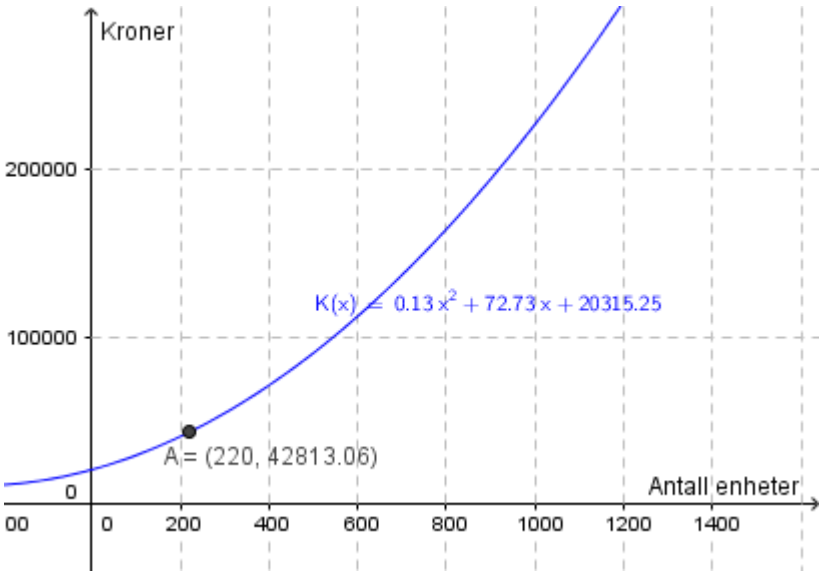
Regneark

	A	B
1	80	27000
2	120	31000
3	170	36500
4	330	59000
5	420	74500
6	700	137000

Brukte kommandoen "RegPoly[<Liste med punkt>, <Polynomgrad>]

Fikk funksjonen $K(x)=0{,}13x^2+72{,}7x+20315$.

Markerte punktet $(220, f(220))$ se punkt A på grafen.



Kostnadene for 220 enheter er 42813 kr.

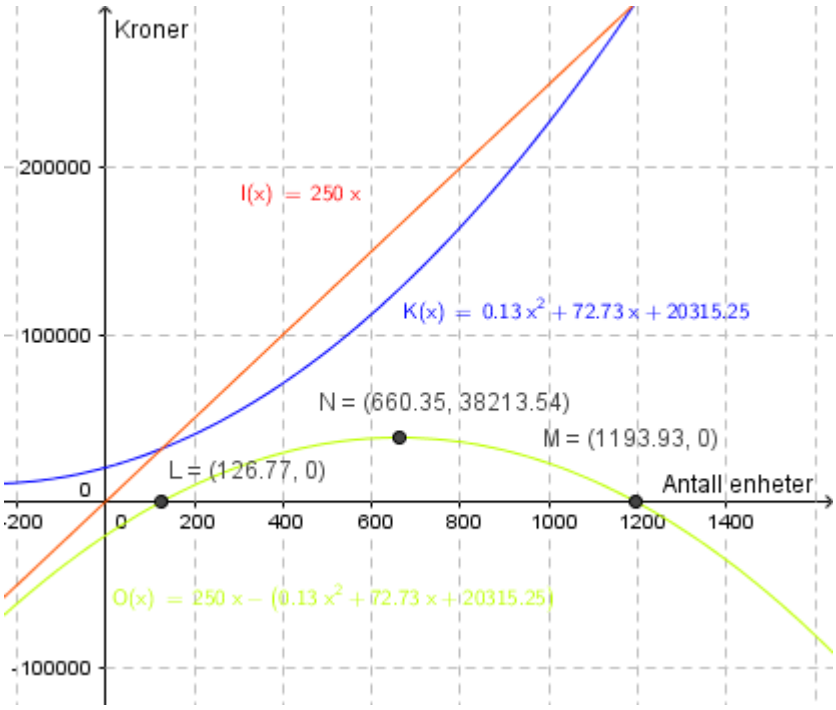
Varen selges for 250 kroner per enhet.

b) Bestem hvor mange enheter bedriften må produsere og selge for å få overskudd.

Definerer inntektsfunksjonen $I(x)=250x$

Tegner grafen til overskuddsfunksjonen $O(x)=I(x)-K(x)$

Jeg bruker kommandoen "Nullpunkt[<polynom>]" og finner når overskuddet er null. Se punktene L og M på grafen.



Bedriften får overskudd når grafen til overskuddsfunksjonen ligger over x-aksen.

Bedriften får overskudd når det produseres mellom 127 og 1194 enheter (Se punktene L og M).

c) Bestem det største overskuddet som bedriften kan oppnå med denne prisen. Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge for å få størst mulig overskudd?

Bruker kommandoen "Ekstremalpunkt[<Polynom>]" for $O(x)$ og får toppunket N (se grafen i b).

Størst mulig overskudd oppnås ved produksjon av 660 enheter, det totale overskuddet er da 38214 kr.

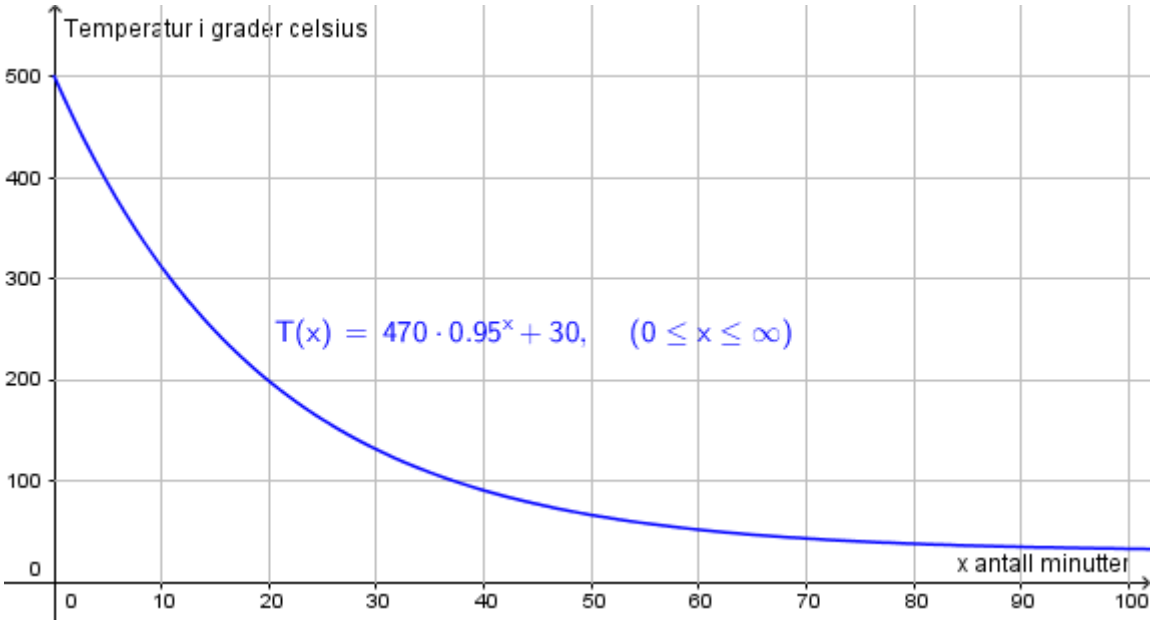
Oppgave 28 (6 poeng)

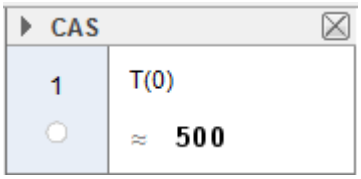
En smed skal bearbeide et metallstykke. Metallet lar seg bearbeide bare når temperaturen er 150 °C eller høyere. Temperaturen T, målt i grader celsius, er gitt ved

$$T(x) = 470 \cdot 0{,}95^x + 30$$

der x er tiden, målt i minutter, etter at metallstykket blir tatt ut av ovnen.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til T. Bestem temperaturen til metallet idet det blir tatt ut av ovnen.

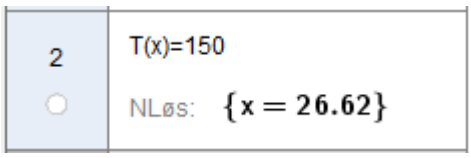




Temperaturen til metallet idet det blir tatt ut av ovnen er 500 grader Celsius.

b) Hvor lang tid har smeden på seg til å bearbeide metallstykket? Hva er temperaturen i rommet der smeden arbeider?

Temperaturen må være 150° eller høyere.



Smeden har 26,6 minutter på seg.

Temperaturen i metallet vil nærme seg temperaturen i rommet når x blir stor. Vi ser at når x blir stor, vil $T(x)$ gå mot 30 grader, fordi $0{,}95^x$ da går mot null.

Temperaturen i rommet er 30 grader.

c) Smeden ønsker 10 min ekstra tid til å bearbeide metallet. Hva må i så fall temperaturen i metallet være når han starter bearbeidingen?

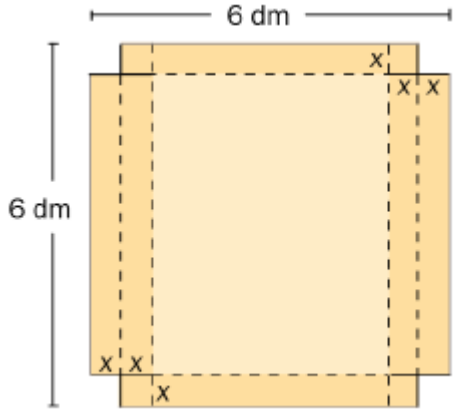
Ti minutter ekstra blir 36,62 minutter. Temperaturfunksjonen må da gi 150 grader etter 36,62 minutter. Da må faktoren foran $0{,}95^{36{,}62}$ endres. Vi kaller denne faktoren for y og løser likningen

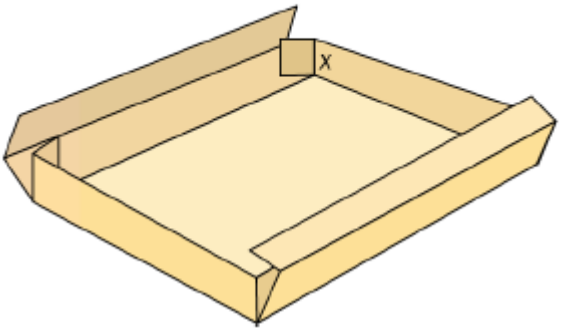
3	y*0.95^36.62+30=150 ✓ $y\ 0.95^{36.62} + 30 = 150$
4	y*0.95^36.62+30=150 NLøs: $\{y = 785.13\}$

Starttemperaturen må være $\left(785 \cdot 0{,}95^{0} + 30\right)$ °C $= \underline{\underline{815\ °C}}$

Oppgave 29 (6 poeng)

En bedrift lager esker av kvadratiske pappstykker med side lik 6 dm. Dette gjør de ved å klippe ut hjørner som vist nedenfor og brette langs de stiplede linjene.





a) Forklar at volumet V, målt i kubikkdesimeter, til hver eske er gitt ved

$V(x) = 8x^3 - 36x^2 + 36x \quad , \quad x \in \langle 0, 1{,}5 \rangle$

$l = 6 - 4x, b = 6 - 2x, h = x$

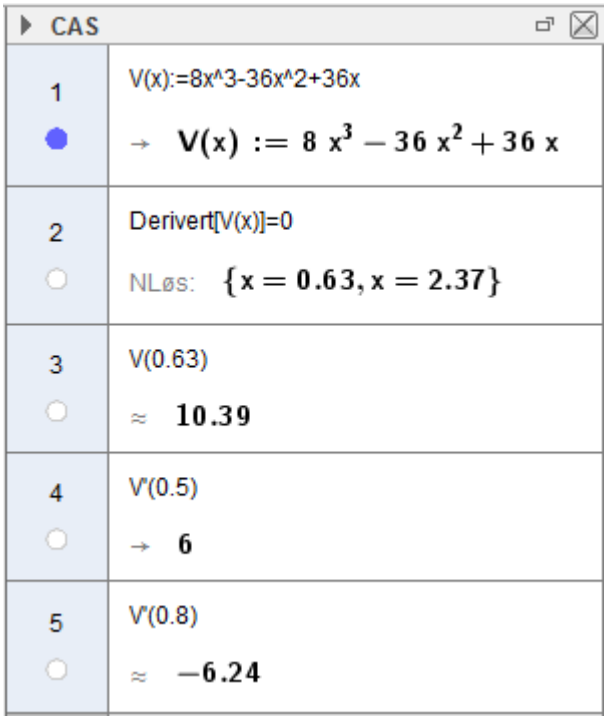
$V = l \cdot b \cdot h$

$V = (6 - 4x)(6 - 2x) \cdot x$

$V = (36 - 24x - 12x + 8x^2)x$

$V = 8x^3 - 36x^2 + 36x$

b) Bruk CAS til å bestemme x slik at volumet blir størst mulig. Bestem dette største volumet.
Jeg skriver likningen inn i GeoGebra, og setter den deriverte lik null. Løsningen x=2,37 er ikke i definisjonsområdet, så jeg bruker bare løsningen x=0,63. Finner størst volum ved å løse $V(0{,}63)$. For å sjekke om dette er et toppunkt, undersøker jeg fortegnet til den deriverte på hver side av punktet



Størst volum er lik 10,4 dm^3.

Bedriften skal også lage andre esker der de bruker kvadratiske pappstykker med side lik a dm. De klipper og bretter på samme måte som ovenfor.

c) Bruk CAS til å vise at det maksimale volumet til disse eskene er $\frac{\sqrt{3}}{36}a^3$.

Jeg finner den nye funksjonen ved å ta lengde ganger bredde ganger høyde

$l = a - 2x, b = a - 4x, h = x$

$V(x) = (a-2x)(a-4x)x$

$V(x) = 8x^3 - 6ax^2 + a^2x \qquad , x \in \left\langle 0, \frac{a}{4} \right\rangle$

For å finne den største verdien for volumet deriverer jeg funksjonen og setter den deriverte lik null.

Løsning nummer to (linje 3 i bildet nedenfor)er ikke i definisjonsområdet, da dette er mer enn a/4, så den ser jeg bort fra. Jeg kan fjerne absoluttverditegnene, fordi a er definert positiv.

Jeg undersøker om punktet er et toppunkt med å sette inn verdier mindre enn x og større

enn x for å sjekke at punktet er et toppunkt. Velger $x=\frac{a}{12}<x=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)a}{12}<x=\frac{3a}{12}$.

CAS	
1	V(x):=8x^3-(6a)x^2+(a^2)x → $V(x) := 8\,x^3 - 6\,a\,x^2 + a^2\,x$
2	V'(x):=Derivert[V(x)] → $V'(x) := a^2 + 24\,x^2 - 12\,a\,x$
3	V'(x)=0 Løs: $\left\{x = \frac{1}{4}\,a - \frac{\sqrt{3}}{12}\,\lvert a\rvert, x = \frac{1}{4}\,a + \frac{\sqrt{3}}{12}\,\lvert a\rvert\right\}$
4	V'(a/12) → $\frac{1}{6}\,a^2$
5	V'(3a/12) → $-\frac{1}{2}\,a^2$
6	V(a/4-a*(sqrt(3)/12)) → $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{36}\,a^3$

Maksimalt volum er $\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{36}a^3}}$

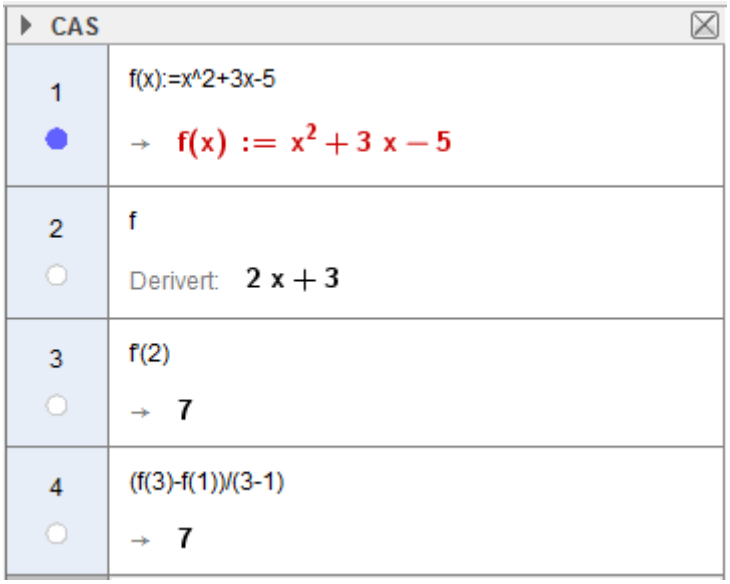
Oppgave 30 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 3x - 5 \quad , \quad D_f = \square$$

a) Bestem den momentane vekstfarten til f i punktet $(2, f(2))$ og den gjennomsnittlige vekstfarten til f i intervallet $[1,3]$.

Vi bruker CAS i GeoGebra.

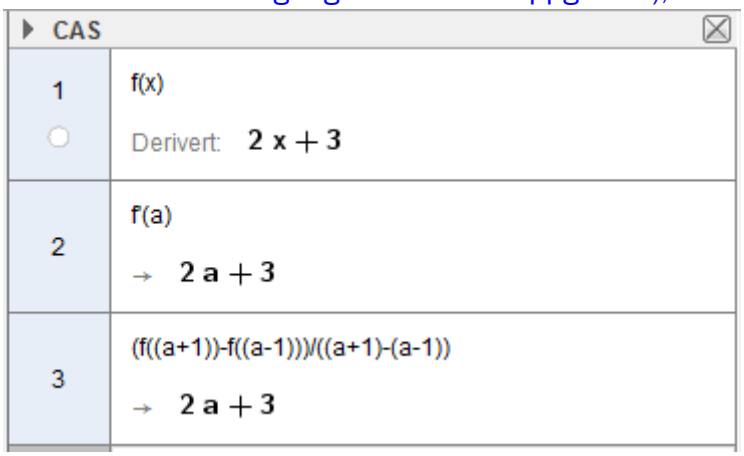


Den momentane vekstfarten i punktet $(2, f(2))$ er lik 7.

Den gjennomsnittlige vekstfaten til f i intervallet $[1,3]$ er lik 7.

b) Bestem den momentane vekstfarten til f i punktet $(a, f(a))$ og den gjennomsnittlige vekstfarten til f i intervallet $[a-1, a+1]$. Tallet a er en konstant. Sammenlign svarene og kommenter.

Bruker samme fremgangsmåte som i oppgave a), men bytter ut tallet 2 med a.

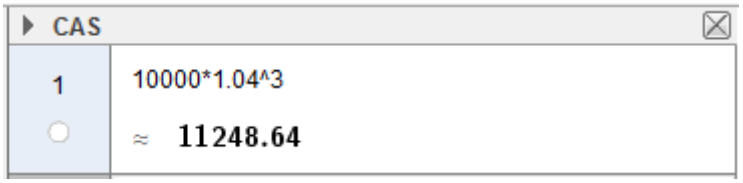


Vi ser at den momentane vekstfarten til f i punktet $(a, f(a))$ er lik den gjennomsnittlige vekstfarten til f i intervallet $[a-1, a\pm 1]$. Dette gjelder for alle verdier av a.
Det er interessant av vi her har funnet en ny metode for å regne ut den deriverte i et punkt for akkurat denne funksjonen.

Oppgave 31 (5 poeng)

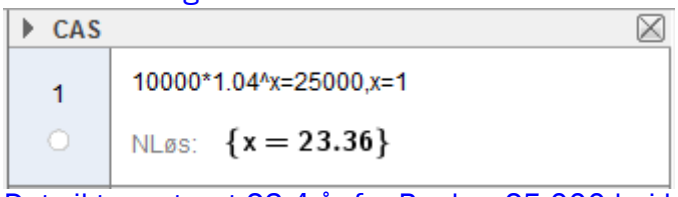
For nøyaktig tre år siden satte Per inn 10 000 kroner på en sparekonto. Kontoen har en fast årlig rente på $4{,}0\%$.

a) Hvor mye penger har Per på sparekontoen i dag?



Per har 11 248,64 kr på sparekontoen etter 3 år.

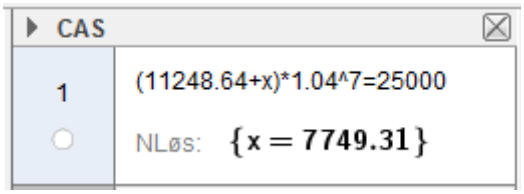
b) Hvor mange år vil det gå fra han satte inn pengene, til han har 25 000 kroner på kontoen, dersom han lar pengene bli stående på kontoen?
Vi løser likningen



Det vil ta omtrent 23,4 år før Per har 25 000 kr i banken.

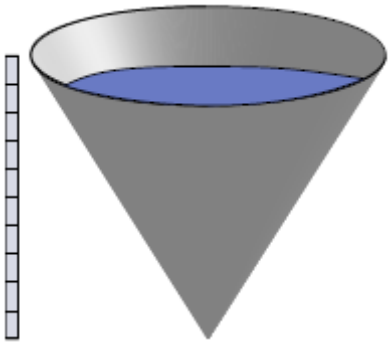
Per bestemmer seg for å sette inn mer penger på kontoen.

c) Hvor mye penger må han sette inn på sparekontoen i dag for at det til sammen skal stå 25 000 kroner på kontoen om sju år?
Vi løser likningen



Per må sette inn 7750 kr i dag for å kunne ta ut 25 000 kr om 7 år.

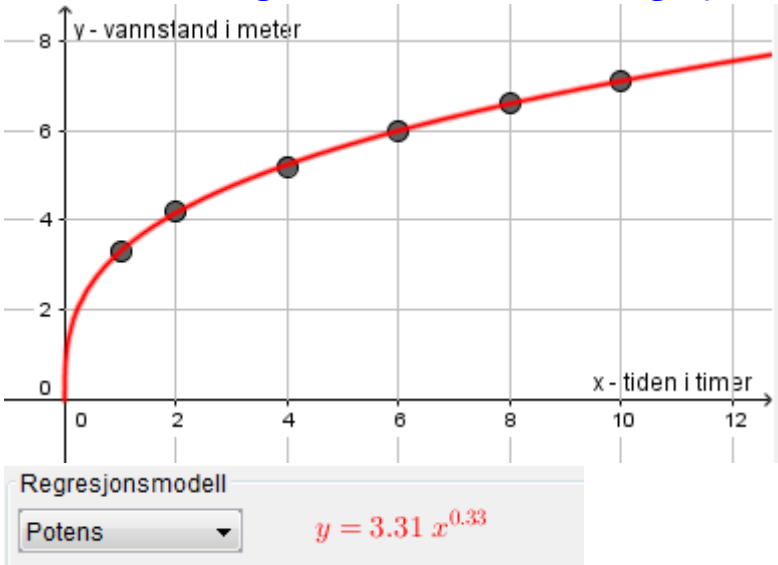
Oppgave 32 (6 poeng)



En vanntank har form som en rett kjegle. Tanken er 10,0 m høy. En pumpe fyller 18 m^3 vann på tanken hver time. Det tappes ikke noe vann ut av tanken. Tabellen viser vannstanden i tanken ved ulike tidspunkt.

Tid i timer	1	2	4	6	8	10
Vannstand i meter	3,3	4,2	5,2	6,0	6,6	7,1

d) Sett punktene fra tabellen inn i et koordinatsystem med tiden langs x-aksen og vannstanden langs *y*-aksen. Lag en potensfunksjon som passer med tallene fra tabellen.
La inn tabellen i regneark i GeoGebra. Brukte regresjonsanalyse.



Potensfunksjonen for høyden på vannstanden i meter etter tiden x i timer, er $h(x) = 3{,}31x^{0.33}$.

e) Bestem hvor mange timer det går før tanken er full.
Hvor mye vann er det i tanken da?
Tanken er full når høyden er 10 meter. Løser likningen

CAS

1	h(x):=3.31x^0.33 ✓ $h(x) := 3.31\ x^{0.33}$
2	h=10,x=1 NLøs: $\{x = 28.51\}$
3	28.51*18 ≈ 513.18

Etter 28,5 timer (28 timer og omtrent 30 minutter), er tanken full.
Det fylles 18 m^3 per time, så etter 28,5 timer er det 513,2 m^3 i tanken.

Det skal bygges en ny tank med samme form, men høyere. Den nye tanken skal romme 1000 m^3.

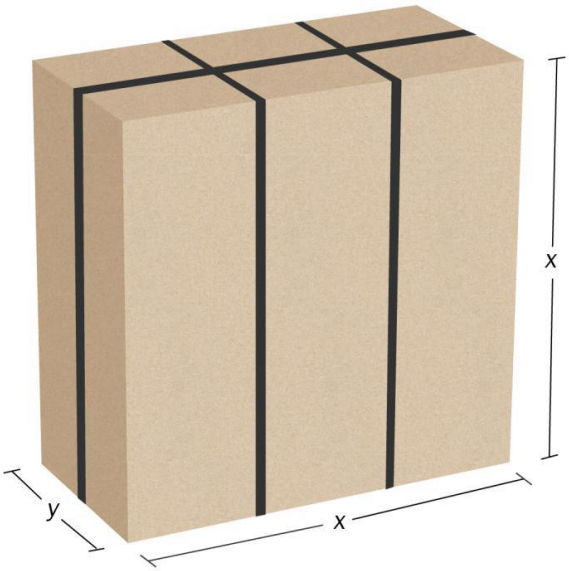
Hvor lang tid tar det for pumpen å fylle den nye tanken?
Hvor høy blir den nye tanken?
Pumpen fyller 18 m^3 per time. Vi løser likningen

4	18x=1000 NLøs: $\{x = 55.56\}$
5	h(55.56) ≈ 12.46

Pumpen bruker 55.56 timer (55 timer og 34 minutter) på å fylle opp 1000 m^3.
Vi finner høyden i den nye tanken ved å regne ut $h(55{,}55) = 12{,}46$ hvor vi forutsetter at modellen fra oppgave a) også gjelder for den nye tanken.
Høyden i den nye tanken er 12,5 m.

Oppgave 33 (3 poeng)

Vi skal lage en pakke med form som en rett prisme. Pakken har bredde lik y cm, lengde lik x cm og høyde lik x cm. Vi vil sikre pakken med svart pakkebånd. Se figuren nedenfor.



Vi ser at lengden av pakkebåndet er $8x+4y$. Vi vil lage pakken slik at den har størst mulig volum når vi bruker akkurat 900 cm med pakkebånd.

a) Vis at volumet $V(x)$ av pakken kan skrives som

$$V(x)=-2x^3+225x^2$$

Begrensning av pakkebånd $8x+4y=900 \Rightarrow y=-2x+225$

Volum $=l\cdot b\cdot h=x^2\cdot y=x^2(-2x+225)=-2x^3+225x^2$

b) Bestem x og y slik at volumet av pakken blir størst mulig. Kommenter svaret ditt. Bestem det største volumet, målt i kubikkdesimeter.

Vi deriverer volumfunksjonen og finner toppunktet i CAS i GeoGebra.

CAS

1	V(x):=-2x^3+225x^2 ≈ $V(x) := -2x^3 + 225x^2$
2	V(x) Derivert: $-6x^2 + 450x$
3	-6 x² + 450x=0 NLøs: $\{x = 0, x = 75\}$
4	V'(10) → 3900
5	V'(80) → −2400
6	V(75) → 421875

Vi sjekker at punktet er et toppunkt ved å se at deriverte endres fra positivt til negativt.
Esken har størst volum når $x = 75$ og $y = -2x + 225 = 75$, altså når esken er en kube med like sider.
Størst mulig volum er $421875\ \text{cm}^3 = \underline{\underline{422\ \text{dm}^3}}$

Oppgave 34 (5 poeng)

Funksjonen f gitt ved

$$f(x)=x^4-8x^2+16 \qquad , \qquad D_f=\square$$

a) Bestem skjæringspunktet mellom grafen til f og $y-$aksen.

Grafen skjærer $y-$aksen når $x=0$

$f(0)=0^4-8\cdot 0^2+16=\underline{\underline{16}}$

b) Løs likningen $f(x)=0$

Jeg definerer likningen og løser den i CAS i GeoGebra

1	f(x):=x^4-8x^2+16 → $f(x) := x^4 - 8x^2 + 16$
2	f(x)=0 NLøs: $\{x=-2, x=-2, x=2, x=2\}$

c) Bruk $f'(x)$ til å bestemme koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkt på grafen til f.

Jeg finner hvor den deriverte er null, positiv og negativ og funksjonsverdiene til topp- og bunnpunkter.

3	f'(x)=0 NLøs: $\{x=-2, x=0, x=2\}$
4	f'(-3) ≈ -60
5	f'(-1) ≈ 12

6	f'(1) ≈ -12
7	f'(3) ≈ 60
8	f'(-2) ≈ 0

9	f'(0) ≈ 16
10	f'(2) ≈ 0

Grafen til f stiger når den deriverte er positiv og synker når den deriverte er negativ.

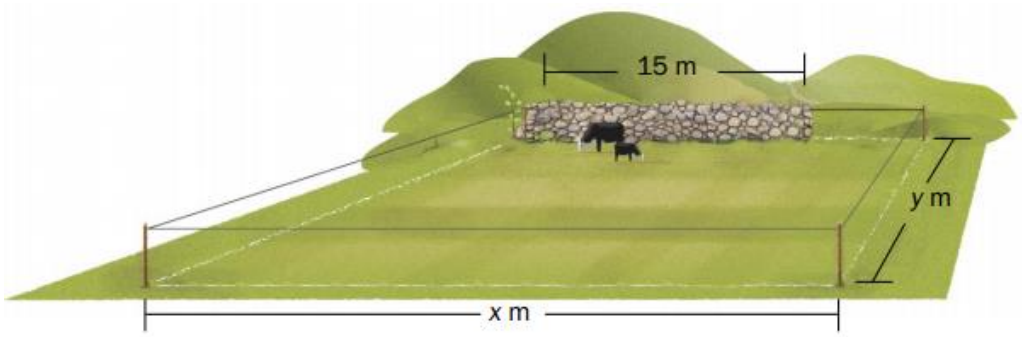
Dette viser at grafen til f har et bunnpunkt for $x=-2$ og $x=2$, og toppunkt for $x=0$.

Bunnpunkter: $\underline{\underline{(-2,0)}}$ og $\underline{\underline{(2,0)}}$

Toppunkt: $\underline{\underline{(0,0)}}$

Oppgave 35 (6 poeng)

En bonde skal gjerde inn et rektangelformet område med areal 625 m^2. Hun skal bruke en 15 m lang steinmur som en del av det inngjerdede området. Til resten av området skal hun bruke et gjerde med lengde G.
Området er skissert på figuren nedenfor. På skissen er sidene i rektangelet kalt x og y.



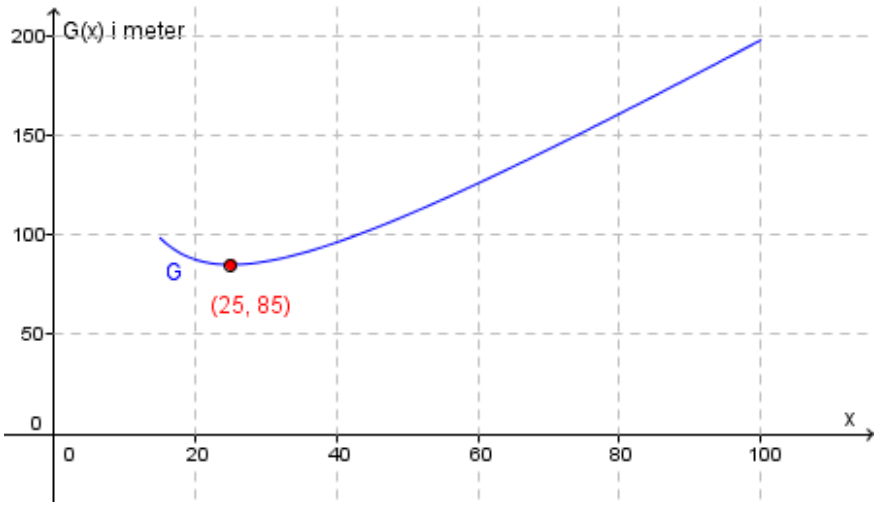
a) Vis at lengden G av gjerdet kan skrives som

$$G(x)=\frac{1250}{x}+2x-15 \quad , \qquad x>15$$

$$x\cdot y=625 \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{625}{x}$$

$$G(x)=x+2y+(x-15)=x+2\frac{625}{x}+x-15=\underline{\underline{\frac{1250}{x}+2x-15}}$$

b) Tegn grafen til G



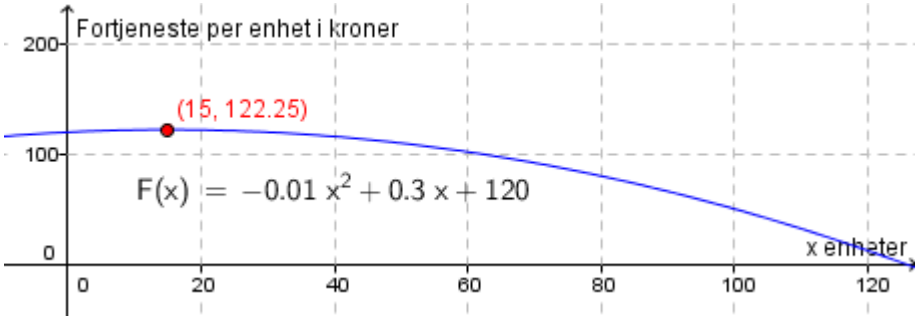
c) Hva er det korteste gjerdet bonden kan bruke? Hva slags rektangel får vi da?
Jeg brukte kommandoen «Ekstremalpunkt[<funksjon>,<start>,<slutt>]» og fant at det korteste gjerdet er på 85 meter. Da er $x=25$ og $y=\frac{625}{25}=25$. Rektangelet er da et kvadrat.

Oppgave 36 (5 poeng)

En bedrift produserer og selger x enheter av en vare per dag. Fortjenesten F per enhet (målt i kroner) er gitt ved

$$F(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}3x + 120$$

a) Hvor mange enheter må bedriften produsere for at fortjenesten per enhet skal bli størst mulig?
Jeg tegner grafen F i GeoGebra og finner toppunkt med kommandoen «Ekstremalpunkt»



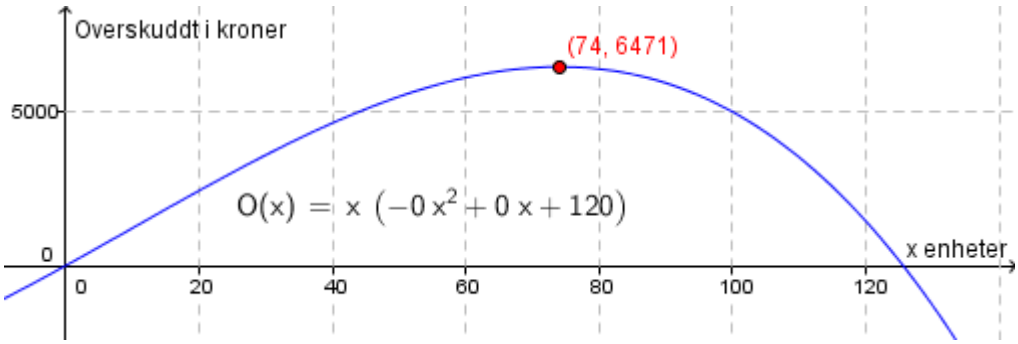
Bedriften må produsere 15 enheter.

b) Forklar at overskuddet O til bedriften per dag er gitt ved

$$O(x) = x \cdot F(x)$$

Samlet overskudd for bedriften må være lik fortjenesten(overskuddet) per enhet multiplisert med antall enheter som produseres og selges.

c) Bestem den produksjonsmengden som gjør overskuddet størst mulig.
Hvor stort er overskuddet da?
Jeg tegner grafen F i GeoGebra og finner toppunkt med kommandoen «Ekstremalpunkt»



Overskuddet er størst når det produseres 74 enheter.
Overskuddet er da kroner 6471.

Oppgave 37 (2 poeng)

Vi har gitt likningen

$900 \cdot 1{,}10^x = 1500 \cdot k^x$

Bestem k slik at $x = 10$ er en løsning av likningen.

Jeg setter inn 10 i stedet for x i likningen og løser likningen med hensyn på k ved å bruke CAS i GeoGebra.

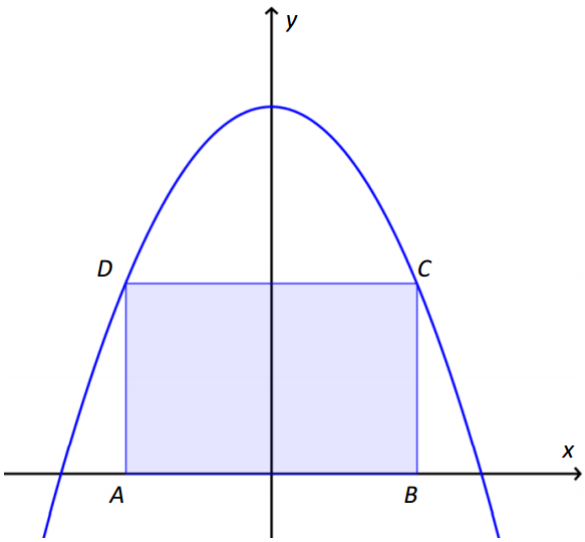
1	900*1.10^10=1500*k^10 ✓ $900 \cdot 1.1^{10} = 1500\ k^{10}$
2	900 (1.1¹⁰) = 1500k¹⁰ NLøs: $\{k = -1.05, k = 1.05\}$

Jeg får $k = \underline{\underline{-1{,}05}} \quad \vee \quad k = \underline{\underline{1{,}05}}$

Oppgave 38 (8 poeng)

Figuren viser grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 6 - \frac{1}{2}x^2 \quad , \qquad D_f = \square$$



Under grafen og over x-aksen er det skrevet inn et rektangel $ABCD$ slik figuren viser. Punktene A og B ligger på x-aksen, og C og D ligger på grafen. Punktet B har førstekoordinaten x, der $x > 0$.

a) Forklar at arealet F av rektangelet kan skrives som en funksjon av x gitt ved

$$F(x)=12x-x^3$$

Bestem D_F.

Grunnlinjen $AB=2x$ siden f er symmetrisk om $y-$aksen. Høyden $BC=f(x)$ siden punktet $C=(x,f(x))$. Arealet av rektangelet er derfor: $F(x)=2x\cdot f(x)=2x\cdot\left(6-\frac{1}{2}x^2\right)=\underline{\underline{12x-x^3}}$

For å få et rektangel som beskrevet, må punktet B ligge til venstre for f sitt positive nullpunkt.

Jeg setter $f(x)=0 \Rightarrow 6-\frac{1}{2}x^2=0 \Rightarrow x^2=12 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$

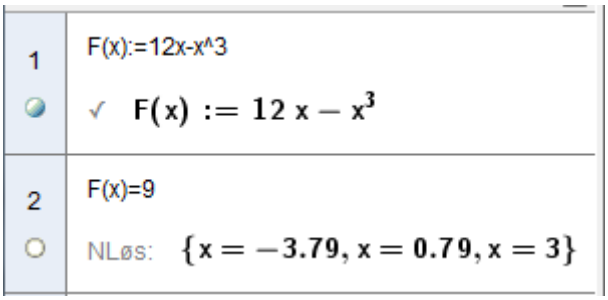
Det betyr at $D_F=\underline{\underline{\langle 0,2\sqrt{3}\rangle}}$

b) Det fins to verdier av x som gjør at arealet av rektangelet blir lik 9.
Bestem disse to verdiene.

Jeg løser likningen $F(x)=9$ i GeoGebra.

Arealet av rektangelet blir lik 9 når

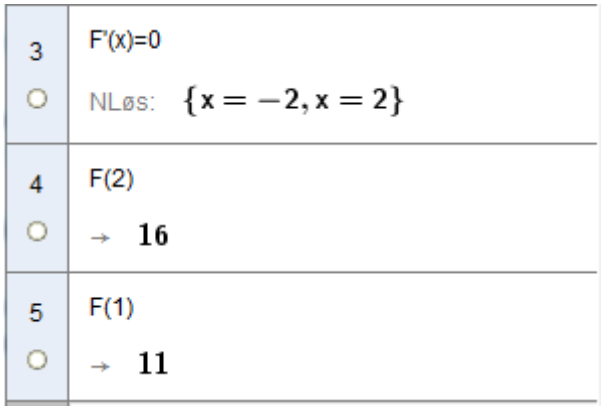
$x=\underline{\underline{0,79}} \vee x=\underline{\underline{3}}$



c) Bestem den verdien av x som gjør at arealet av rektangelet blir størst mulig.
Hva blir det største arealet?

Jeg setter den deriverte til arealfunksjonen lik null og finner at det finnes kun én verdi for x i definisjonsområdet som gir en ekstremalverdi. Det er for $x=\underline{\underline{2}}$.

Siden $F(2)$ er større enn en tilfeldig annen arealverdi i definisjonsområdet, må $F(2)=\underline{\underline{16}}$ være det største arealet.



d) Bestem et uttrykk for omkretsen av rektangelet. Bestem den verdien av x som gjør at omkretsen av rektangelet blir størst mulig. Kommenter svaret.

Jeg kaller omkretsen til rektangelet for $O(x)$.

$O(x) = AB \cdot 2 + BC \cdot 2$

$O(x) = 2x \cdot 2 + f(x) \cdot 2$

$O(x) = 4x + \left(6 - \frac{1}{2}x^2\right) \cdot 2$

$O(x) = \underline{\underline{4x + 12 - x^2}}$

Jeg bruker samme metode på $O(x)$ som på $F(x)$ i oppgave c).

Omkretsen blir størst mulig når $x = \underline{\underline{2}}$

Dette er den samme verdien for x som også gjør arealet størst mulig. Rektangelet er da et kvadrat med side 4 fordi $AB = 2x = 2 \cdot 2 = 4$ og

$BC = f(2) = 6 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 6 - 2 = 4$

6	O(x):=4x+12-x^2 ✓ $O(x) := 4x + 12 - x^2$
7	O'(x)=0 ✓ $O'(x) = 0$
8	O'(x) = 0 NLøs: $\{x = 2\}$
9	O(2) → 16
10	O(1) → 15

Oppgave 39 (8 poeng)

Et bakeri lager x kaker per dag, i tillegg til andre bakervarer. Bakeriet har funnet ut at de totale kostnadene $K(x)$ i kroner ved kakeproduksjonen avhenger av antall kaker, slik tabellen viser.

Antall kaker x	0	50	90	150	180	250
Totale kostnader $K(x)$	0	900	1000	1100	1500	4400

a) Bruk regresjon til å bestemme en polynomfunksjon av tredje grad som passer best mulig med tallene i tabellen.

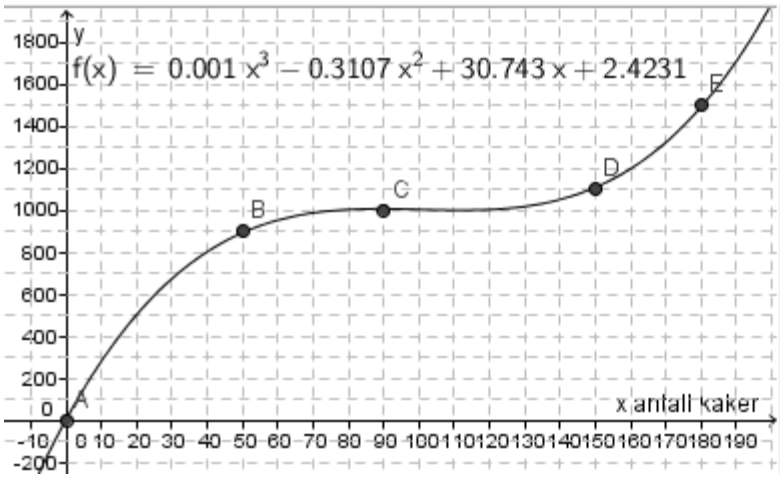
I regnearket laget jeg en liste med punkter fra tabellen.

Liste1 = {(0, 0), (50, 900), (90, 1000), (150, 1100), (180, 1500), (250, 4400)}

Så laget jeg funksjonen f ved kommandoen

Navn: f

Definisjon: RegPoly[Liste1, 3]



	A	B
1	0	0
2	50	900
3	90	1000
4	150	1100
5	180	1500
6	250	4400
7		
8		
9		
10		

Polynomfunksjonen av 3. grad som passer best med tallene i tabellen er

$f(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3107x^2 + 30{,}743x + 2{,}4231$

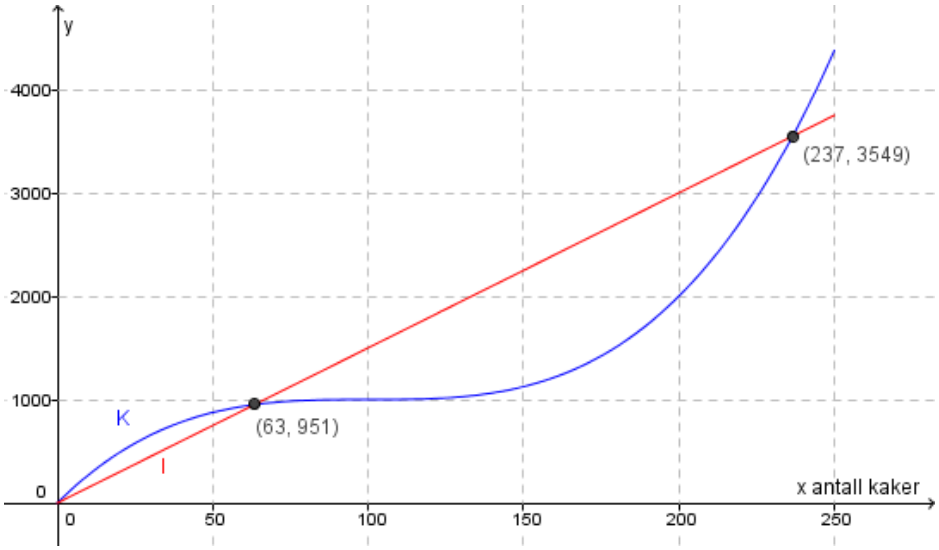
I resten av oppgaven vil vi bruke kostnadsfunksjonen K gitt ved

$$K(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 30x\ , \qquad x \in [0,250]$$

Bakeriet selger alle kakene for 15 kroner per stykk. Inntektsfunksjonen I er da gitt ved

$$I(x) = 15x$$

b) Tegn grafene til K og I i samme koordinatsystem.
Bestem hvilke produksjonsmengder som gir overskudd, og hvilke som gir underskudd.



Jeg har brukt kommandoen «Skjæring mellom to objekt» for å finne skjæringspunktene mellom grafene.

For x-verdier mellom 63 og 237 ligger grafen for inntektsfunksjonen over grafen for kostnadsfunksjonen. For de andre x-verdiene er det motsatt. Det betyr:

Det blir overskudd når det produseres mellom 63 og 237 kaker per dag.

Det blir underskudd når det produseres mindre enn 63 eller flere enn 237 kaker per dag.

c) Bruk derivasjon til å bestemme hvor mange kaker som bør produseres dersom overskuddet skal bli størst mulig.

Jeg definerer overskuddsfunksjonen $O(x)$ som

Navn:	O
Definisjon:	Funksjon[I(x) - K(x), 0, 250]

Jeg finner ved regning i CAS , se utklipp, at det bør produseres 171 kaker for at overskuddet skal bli størst mulig.

1	O'(x)=0 NLøs: $\{x = 29, x = 171\}$
2	O'(20) ≈ -4
3	O'(100) ≈ 15
4	O'(200) ≈ -15
5	O(171) ≈ 1207

Hva er det største overskuddet bakeriet kan oppnå per dag når vi bare ser på kakeproduksjonen?

Regningen i CAS viser at dette største overskuddet er på 1207 kroner

Som et ekstra tilbud til kundene vurderer bakeriet å sette ned prisen per kake.

La prisen per kake være p kroner. Bestem den minste verdien p kan ha dersom det skal være mulig å oppnå balanse mellom kostnader og inntekter?

d) Hvor mange kaker bør lages og selges per dag når p har denne verdien?

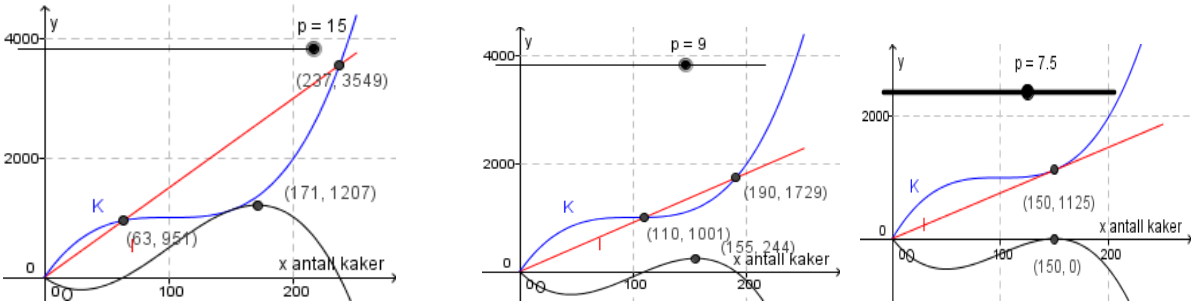
Jeg definerer glideren $p=15$.

Jeg omdefinerer inntektsfunksjonen slik at $I(x)=p\cdot x$.

Funksjon I

Funksjon[p x, 0, 250]

Når $p=15$ har vi samme situasjon som ovenfor. Se grafen nedenfor hvor også grafen til overskuddsfunksjonen er tegnet.



Når vi reduserer prisen, for eksempel setter $p=9$, ser vi at området som gir overskudd skrumper inn og overskuddet avtar. Grafene tangerer når $p=7{,}5$.

Når prisen er redusert til 7,5 kroner, er overskuddet redusert til null, og kakeproduksjonen går akkurat i balanse. Det produseres og selges da 150 kaker per dag.

Oppgave 40 (5 poeng)

Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom høyden over havet målt i kilometer og lufttrykket målt i hektopascal (hPa), under visse betingelser.

Høyde x (km over havet)	0	1,10	2,10	4,20	6,00
Lufttrykk $P(x)$ (hPa)	1013	900	800	600	500

Jeg løser alle oppgavene i GeoGebra. Se figur nedenfor

a) Bruk eksponentiell regresjon til å bestemme en modell $p(x)$ som viser lufttrykket som funksjon av høyden x over havet.

Jeg får modellen $p(x)=1019{,}56\cdot 0{,}89^x$

b) Titicacasjøen ligger 3,8 km over havet på grensen mellom Peru og Bolivia.
Bruk modellen $p(x)$ og bestem lufttrykket i denne høyden.

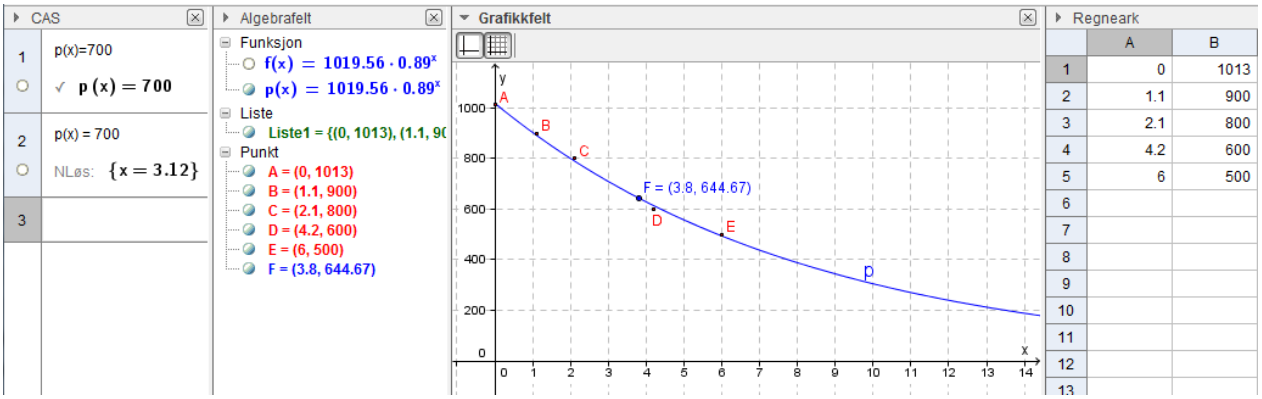
Jeg leste grafisk fra modellen punktet $(3{,}8,\ p(3{,}8))=(3{,}8,\ 644{,}67)$.

Lufttrykket 3,8 km over havet er 645 hPa.

c) Bestem ved regning hvor høyt vi er over havet når vi måler lufttrykket til 700 hPa.

Løsning av likningen $p(x)=700$ viser at

Vi er 3,12 km over havet når lufttrykket er 700 hPa.

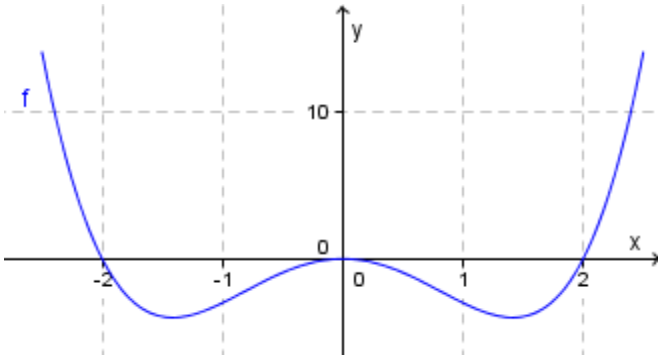


Oppgave 41 (10 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^4-4x^2$$

a) Tegn grafen til f når $x\in\langle -2{,}5,\ 2{,}5\rangle$.



b) Bestem ved regning grafens skjæringspunkter med koordinataksene.

1	f(x)=0
	NLøs: $\{x=0, x=0, x=-2, x=2\}$
2	f(0)
	→ 0

Grafen skjærer x-aksen for $x=-2$, $x=0$ og $x=2$

Grafen skjærer y-aksen for $y=0$

c) Bruk $f'(x)$ til å avgjøre hvor grafen til f stiger, og hvor den synker.
Bestem koordinatene til topp- og bunnpunkter på grafen til f.

3	f(x) → $4x^3 - 8x$	5	f'(-2) ≈ -16	7	f'(1) ≈ -4
4	f(x)=0 NLøs: $\{x = 0, x = -1.41, x = 1.41\}$	6	f'(-1) ≈ 4	8	f'(2) ≈ 16

9	f(-1.41) ≈ -4	10	f(0) ≈ 0	11	f(1.41) ≈ -4

Grafen til f stiger når f' er positiv og synker når f' er negativ. Den deriverte funksjonen kan bare skifte fortegn i nullpunktene. Regningen ovenfor viser derfor at

Grafen til f stiger når $-1{,}41 < x < 0$ og når $x > 1{,}41$

Grafen til f synker når $x < -1{,}41$ og når $0 < x < 1{,}41$

Koordinatene til toppunktet er $(0, f(0) = (0,0)$

Koordinatene til bunnpunktene er og $(1{,}41, f(1{,}41) = (1{,}41, -4)$

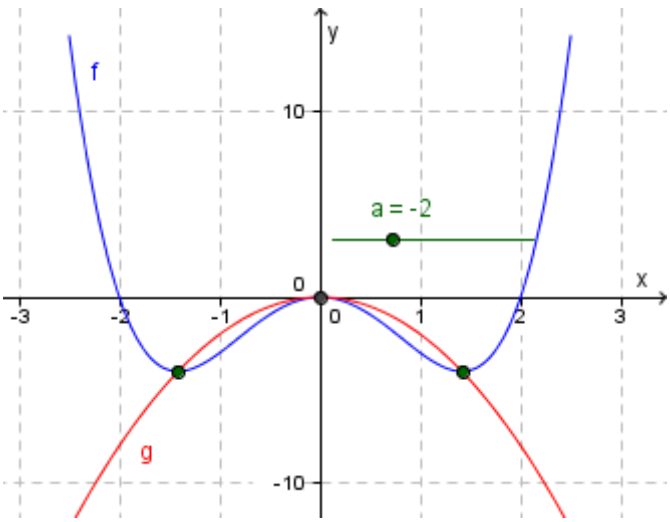
En annen funksjon er gitt ved

$g(x) = ax^2$, der a er en konstant.

Grafen til g skal gå gjennom de to bunnpunktene på grafen til f.

d) Bestem a.
Jeg lar konstanten a være en glider i GeoGebra. Jeg regulerer glideren inntil grafen til g går gjennom bunnpunktene til f. Jeg får at $a = -2$

e) Tegn grafen til g i samme koordinatsystem som grafen til f.

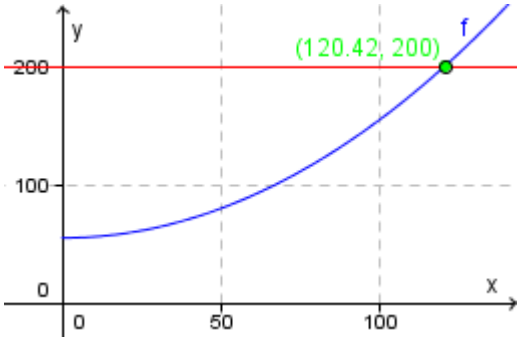


Oppgave 42 (9 poeng)

En bedrift har funnet ut at de samlede kostnadene f ved å produsere x enheter av en vare er gitt ved

$$f(x)=55+0,01x^2$$

a) De samlede kostnadene må ikke overstige 200. Hvor mange enheter kan bedriften da høyst produsere?

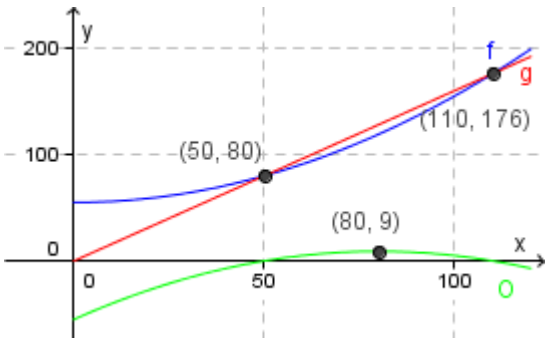


Bedriften kan høyst produsere 120 enheter.

b) Hele produksjonen blir solgt. Salgsinntekten g er gitt ved

$$g(x)=1,6x$$

Hvilke produksjonsmengder gir overskudd for bedriften? Hvilken produksjonsmengde gir størst overskudd? Hvor stort er dette overskuddet?



For produksjonsmengder mellom 50 og 110 enheter er inntekten større enn kostnadene, og bedriften går med overskudd.

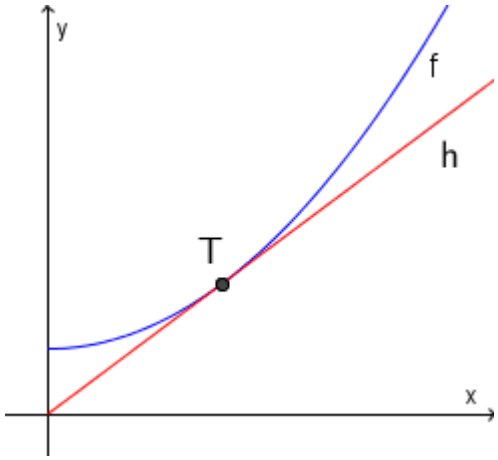
Jeg definerer overskuddsfunksjonen $O(x)=g(x)-f(x)$. Med kommandoen «Ekstremalpunkt» fant jeg toppunktet på denne funksjonen.

Maksimalt overskudd er 9. Dette oppnås med en produksjonsmengde på 80 enheter.

Hvis prisen per enhet er p, kan salgsinntekten skrives som

$$h(x) = p \cdot x$$

Bedriften vil undersøke hvor lavt prisen kan settes dersom det skal være mulig å oppnå balanse mellom kostnader og inntekter.



a) Forklar at vi kan bestemme denne minsteprisen når grafen til h tangerer grafen til f. Se figuren.

Prisen p er stigningstallet til linjen h. La p_0 være den prisen som gjør at grafen til h tangerer grafen til f.
Hvis $p < p_0$ så vil grafen til h ligge under grafen til f og kostnadene er hele tiden høyere enn inntektene.
Hvis $p \geq p_0$ så vil grafen til h skjære grafen til f og det kan oppnås balanse mellom kostnader og inntekter.
Det betyr at $p = p_0$ er den minste prisen som gjør det mulig å oppnå balanse mellom kostnader og inntekter.

Det kan vises at den minste prisen som vil gi balanse, er $p \approx 1{,}48$

b) Forklar at prisen er minst når $p = f'(a)$, der a er førstekoordinaten til tangeringspunktet T på figuren. Bruk dette til å bestemme hvor mange enheter det produseres og selges når prisen er minst.
Minsteprisen p_0 er, som vist ovenfor, stigningstallet til tangenten til f i T, altså for $x = a$.
Men $f'(a)$ er jo per definisjon også stigningstallet til f for $x = a$.
Det betyr at $p_0 = f'(a)$.
$f(x) = 55 + 0{,}01x^2 \Rightarrow f'(x) = 0{,}02x \Rightarrow 0{,}02x = 1{,}48 \Rightarrow x = \underline{74}$
<u>Det produseres og selges 74 enheter når prisen er minst.</u>

c) Likningen $f(x) = h(x)$ kan omformes til $0{,}01x^2 - px + 55 = 0$.
Bestem en verdi for p som gjør at denne likningen har bare én løsning. Forklar hvorfor denne verdien er den minste prisen som vil gi balanse.

$$0{,}01x^2 - px + 55 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2{,}2}}{0{,}02}, \qquad p > 0$$

Likningen har bare én løsning når $p^2 - 2{,}2 = 0 \Rightarrow p = \sqrt{2{,}2} \Rightarrow p = 1{,}48$
Når likningen har to løsninger, er overskuddet lik null for disse x-verdier og overskuddet er positivt for produksjonsmengder mellom disse x-verdier. Se punkt b. Når likningen bare har én løsning, så tangerer grafen til inntektsfunksjonen grafen til kostnadsfunksjonen For mindre verdier av p blir uttrykket under rottegnet negativt, og likningen har ingen løsning. Grafene skjærer ikke hverandre. Prisen $p = 1{,}48$ er derfor den minste prisen som gir balanse.

Oppgave 43 (9 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2$$

a) Bestem ved regning skjæringspunktene mellom grafen til f og koordinataksene.

1	f(x):=1/3x^3-3/2x^2 ✓ $f(x) := \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$
2	f(0) ≈ 0
3	f(x)=0 NLøs: $\{x = 0, x = 0, x = 4.5\}$

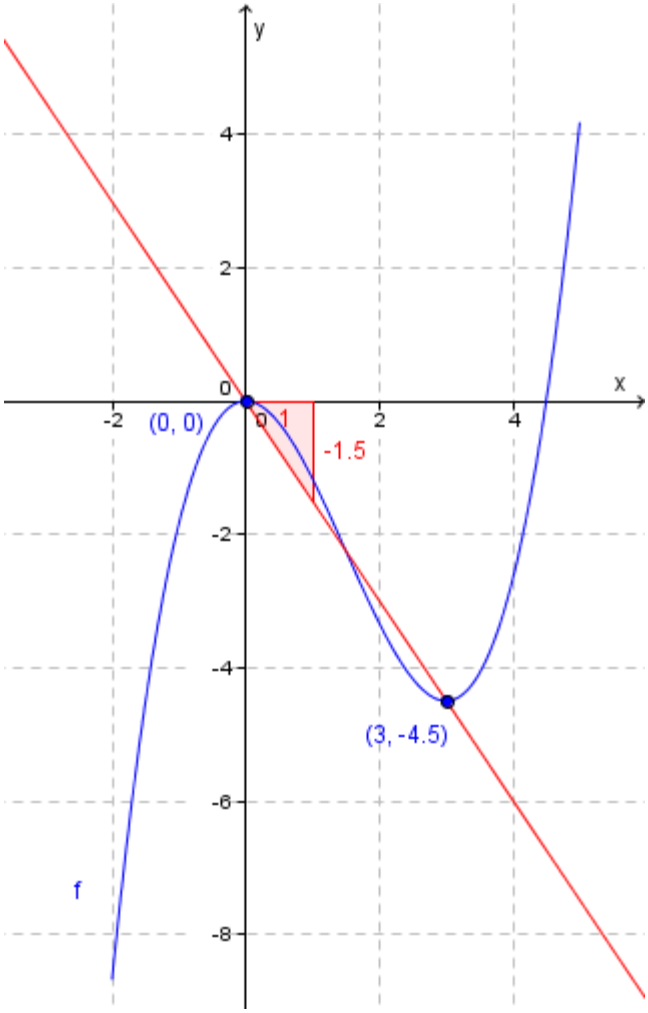
Jeg definerer funksjonen i GeoGebra.
Utregninger i GeoGebra viser at

Grafen skjærer y-aksen i punktet $(0,0)$

Grafen skjærer x-aksen i punktene $(0,0)$ og $(4{,}5,\ 0)$

b) Tegn grafen til f når $x \in \langle -2,5 \rangle$. Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[0,3]$.

Jeg tegner grafen til f i GeoGebra for $x \in \langle -2,5 \rangle$



Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[0,3]$, er stigningstallet til den rette linja som går gjennom punktene $(0, f(0)) = (0,0)$ og $(3, f(3)) = (3, -4,5)$

Den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[0,3]$ er $-1,5$.

(Se koordinatsystemet ovenfor.)

c) Bruk $f'(x)$ til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

Utregninger i GeoGebra viser at den deriverte er null for $x=0$, og for $x=3$. Den deriverte er positiv, det vil si at grafen stiger når $x<0$ og når $x>3$. Den deriverte er negativ, det vil si at grafen synker når $0<x<3$.

4	f'(x)=0 Løs: $\{x=3, x=0\}$
5	f'(-2) ≈ 10
6	f'(2) ≈ -2
7	f'(4) ≈ 4
8	f(0) ≈ 0
9	f(3) ≈ -4.5

Grafen til f har toppunkt $(0, f(0)) = (0,0)$

Grafen til f har bunnpunkt $(3, f(3)) = (3, -4,5)$

d) For hvilke verdier av x er den momentane vekstfarten lik $-1,5$?

Jeg løser likningen $f'(x) = -1,5$ i GeoGebra

12	f'(x)=-1.5 NLøs: $\{x=0.634, x=2.366\}$

Den momentane vekstfarten lik $-1,5$ når $x=0,6$ og når $x=2,4$

Oppgave 44 (7 poeng)

Kostnadene f målt i kroner, ved å produsere en bestemt vare er gitt ved funksjonen

$$f(x)=3^{0,4x}+2000$$

der x er antall hundre produserte enheter. For eksempel svarer $x=20$ til 2 000 enheter.

Produsenten selger hele produksjonen. Prisen per enhet er 5,00 kroner.

a) Forklar at inntektsfunksjonen g er gitt ved

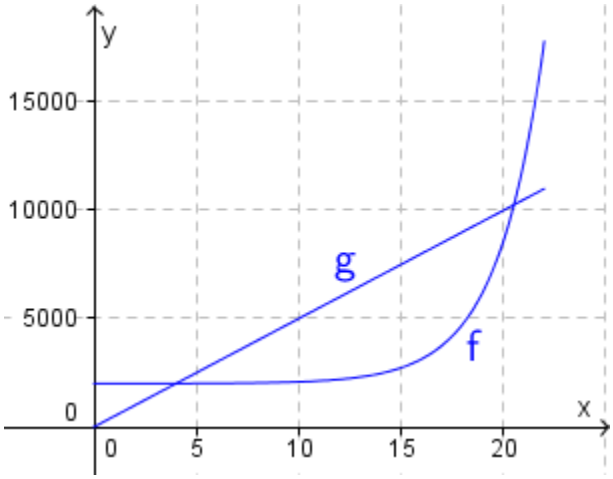
$$g(x)=500x$$

Tegn grafene til f og g i samme koordinatsystem når $x\in[0,22]$.

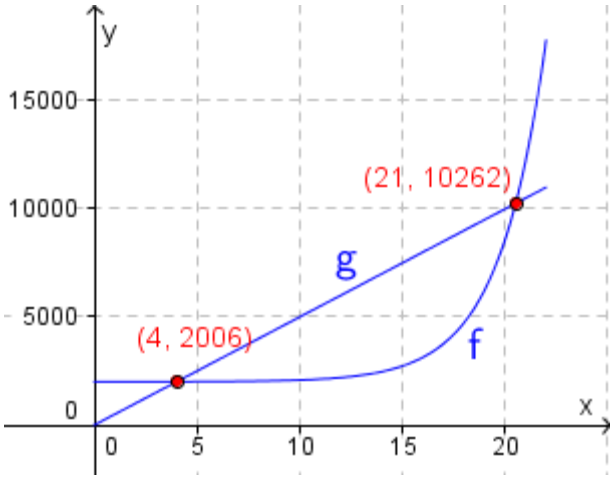
Inntekten, $g(x)$, er lik antall solgte enheter, $x\cdot 100$, multiplisert med pris per enhet, 5,00 kroner.

Vi får $g(x)=x\cdot 100\cdot 5{,}00=\underline{\underline{500x}}$

Vi tegner grafene til f og g i GeoGebra for $x\in[0,22]$



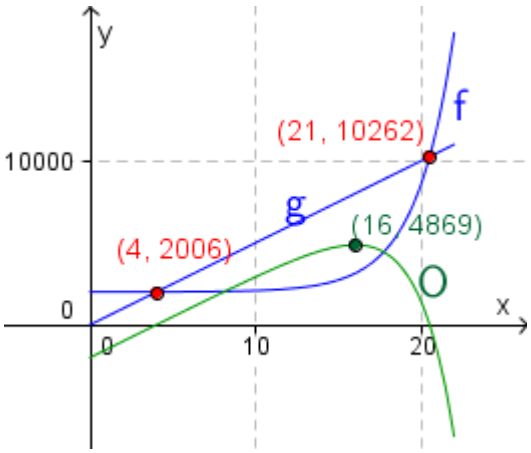
b) Bestem hvor mange enheter som må produseres og selges for at driften skal gå i balanse.



Jeg finner skjæringspunktene mellom grafene til kostnadsfunksjonen og inntektsfunksjonen ved

kommandoen "skjæring mellom to objekt" i GeoGebra.
Skjæringspunktene mellom kostnadsfunksjonen og inntektsfunksjonen viser at inntekter og kostnader like store, det vil si at bedriften går i balanse, når det produseres og selges 400 enheter og når det produseres og selges 2 100 enheter.

c) Bestem den produksjonsmengden som gir størst overskudd.
Hvor stort er det største overskuddet?



Jeg finner grafisk toppunktet på overskuddsfunksjonen $O(x)=f(x)-g(x)$ ved kommandoen "Ekstremalpunkt" i GeoGebra.
En produksjonsmengde på 1 600 enheter gir størst overskudd. Det største overskuddet er på 4 869 kroner.

Oppgave 45 (6 poeng)

En produsent skal lage en rett, lukket sylinder. Høyden h og diameteren d kan variere, men $d+h=6$. Vi setter radius i sylinderen lik x. Volumet V av sylinderen da kan skrives som

$$V(x)=6\pi x^2-2\pi x^3$$

a) Vis at i denne oppgaven må $x\in\langle 0,3\rangle$.

$$d+h=6$$
$$2x+h=6$$
$$h=\underline{6-2x}$$

$$V=G\cdot h=\pi r^2\cdot h$$
$$V(x)=\pi x^2\cdot(6-2x)$$
$$V(x)=\underline{\underline{6\pi x^2-2\pi x^3}}$$

For å få en sylinder må radius og høyde være større enn null. Det gir $x>0$ og $h>0$.
$h>0 \Rightarrow 6-2x>0 \Rightarrow -2x>-6 \Rightarrow 2x<6 \Rightarrow x<3$

Vi må altså ha $x\in\langle 0,3\rangle$

b) Bruk $V'(x)$ til å vise at det største volumet sylinderen kan få, er nøyaktig lik 8π.
Jeg definerer først volumfunksjonen i GeoGebra (linje 1).

Jeg finner toppunktet til volumfunksjonen der den deriverte funksjonen er lik null forutsatt at den deriverte er positiv, grafen stiger, til venstre for punktet og den deriverte er negativ til høyre for punktet (linje 2,3 og 4).

Jeg kan ikke bruke løsningen $x=0$ fordi denne løsningen ligger utenfor definisjonsområdet.
Sylinderen får sitt største volum når $x=2$.

Linje 5 viser at:
Det største volumet sylinderen kan få er 8π.

1	V(x):=6*π*x^2-2*π*x^3 ✓ $V(x) := 6\pi x^2 - 2\pi x^3$
2	V'(x) =0 NLøs: $\{x=0, x=2\}$
3	V'(1) ≈ 18.8496
4	V'(2.5) ≈ −23.5619
5	V(2) → 8π